

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Simulação Numérica da Transferência de Calor  
em Problemas Radiativos – Condutores**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

**MARCUS VINICIUS FILGUEIRAS DOS REIS**

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 2001

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR  
EM PROBLEMAS RADIATIVOS - CONDUTIVOS**

**MARCUS VINICIUS FILGUEIRAS DOS REIS**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

---

Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.  
**ORIENTADOR**

---

Prof. JÚLIO CÉSAR PASSOS, Dr. Eng. Mec.  
**COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO**

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. VICENTE DE PAULO NICOLAU, Dr. - Presidente

---

Prof. MÁRCIA BARBOSA MANTELLI, Ph. D.

---

Prof. FERNANDO OSCAR RUTTKAY PEREIRA, Ph. D.

**Dedico este trabalho a meus pais por terem me ensinado, através de  
seus exemplos pessoais, a valorizar o saber.**

## AGRADECIMENTOS

Aos contribuintes brasileiros que através do CNPq financiaram este trabalho.

Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska pela orientação, motivação, suporte e paciência proporcionados em todos os momentos do trabalho.

Ao amigo Axel Dihlmann pela presteza que sempre me atendeu e pelo estímulo que sempre me proporcionou.

Ao Dr. Humberto Pontes Cardoso por nos ter trazido o assunto e o desafio de trabalhar com problemas envolvendo radiação e condução.

Aos amigos Clovis R. Maliska Jr, Marcos Cabral Damiani e em especial Rodrigo M. Lucianetti, pela valiosa e imprescindível colaboração e suporte na programação do simulador por mim utilizado neste trabalho.

A Noeli por toda sua colaboração e paciência ao longo do período de elaboração deste texto.

Aos colegas do SINMEC pelo excelente ambiente de trabalho.

Aos professores do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b><u>INTRODUÇÃO</u></b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>3</b>
1.2.1	FATOR DE FORMA	3
1.2.2	TROCA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES	9
1.2.3	METODOLOGIAS COMPUTACIONAIS	11
<b>1.3</b>	<b>OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES</b>	<b>11</b>
<b>1.4</b>	<b>ESCOPO DO TRABALHO</b>	<b>12</b>

<b>2</b>	<b><u>CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA</u></b>	<b>14</b>
----------	--	-----------

<b>2.1</b>	<b>O P9]TJ 7-L3(E)10871 164.5(M9)-6.4(E)]TJ 11.04 0 0 11.04 237.8806 511.6403 Tm 0 Tc (R)Tj 9 0 0 04 80.0401 221.6403 Tm -01</b>	
------------	--	--

<b>4.5</b>	<b>GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DA RADIOSIDADE</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO</b>	<b>67</b>
<b>5.1</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO GEOMÉTRICA</b>	<b>67</b>
<b>5.2</b>	<b>A VIZINHANÇA</b>	<b>68</b>
<b>5.3</b>	<b>SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR</b>	<b>69</b>
<b>5.4</b>	<b>ACOPLAMENTO DAS SOLUÇÕES CONDUTIVAS E RADIATIVAS</b>	<b>73</b>
5.4.1	ACOPLAMENTO COM O MÉTODO DA RADIOSIDADE	74
5.4.2	ACOPLAMENTO COM O MÉTODO DE GEBHART	76
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>80</b>
<b>6.1</b>	<b>ALGUMAS OBSERVAÇÕES QUANTO ÀS IMPLEMENTAÇÕES COMPUTACIONAIS DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE FORMA</b>	<b>80</b>
<b>6.2</b>	<b>ANÁLISE DA PRECISÃO DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE FORMA</b>	<b>82</b>
6.2.3	DUAS PLACAS PARALELAS	82
6.2.3.1	Hemi-Cube	83
6.2.3.2	Dupla Discretização	85
6.2.3.3	Integral de Contorno	86
6.2.3.4	Comparação entre os Métodos	88
6.2.4	DUAS PLACAS PERPENDICULARES	90
6.2.4.1	Hemi-Cube	90
6.2.4.2	Dupla Discretização	92
6.2.4.3	Integral de Contorno	93
6.2.4.4	Comparação entre os Métodos	95
6.2.5	DUAS PLACAS PARALELAS COM OBSTRUÇÃO	96
6.2.5.1	Hemi-Cube	97
6.2.5.2	Dupla Discretização	98
6.2.5.3	Integral de Contorno	99
6.2.5.4	Comparação dos Métodos	99
6.2.6	PARALELEPÍPEDO COM OBSTRUÇÃO	100
<b>6.3</b>	<b>ANÁLISE DA PERFORMANCE DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE FORMA</b>	<b>103</b>
6.3.1	GEOMETRIAS SEM OBSTRUÇÃO	103
6.3.2	DUAS PLACAS PARALELAS COM OBSTRUÇÃO	104
6.3.3	PARALELEPÍPEDO COM OBSTRUÇÃO	108
<b>6.4</b>	<b>VALIDAÇÃO NUMÉRICA DOS MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO</b>	<b>111</b>
6.4.1	CONDUÇÃO BI-DIMENSIONAL	112
6.4.2	ALETA RADIATIVA	114
<b>6.5</b>	<b>COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO</b>	<b>119</b>
6.5.1	RADIAÇÃO E CONDUÇÃO ENTRE PLACAS PLANAS	119
6.5.1.1	Análise da Convergência dos Métodos	125
6.5.1.2	Análise do Tempo de Processamento	129
<b>6.6</b>	<b>PROBLEMA ILUSTRATIVO</b>	<b>131</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>135</b>

<b>7.1</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>135</b>
<b>7.2</b>	<b>RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS</b>	<b>136</b>
	<b><u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u></b>	<b><u>138</u></b>

---

## RESUMO

O presente trabalho tem enfoque no estudo de técnicas numéricas para a solução de problemas radiativos-condutivos envolvendo superfícies difusas cinzentas.

Maior ênfase é dada nas duas principais etapas do processo de cálculo da transferência de calor: o cálculo do fator de forma entre superfícies e na metodologia de solução do

**ABSTRACT**

The present work deals with numerical techniques for the solution of coupled radiation/conduction heat transfer problems involving diffuse gray surfaces with non-absorbing media.

The two main focus of this work are the view factor calculation between obstructing surfaces and the different approaches for coup

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Problema radiativo-condutivo _____	14
Figura 2.2 – Balanço de energia em um volume de controle elementar _____	15
Figura 3.1– Troca radiativa entre dois elementos infinitesimais _____	17
Figura 3.2– Analogia de Nusselt (Siegel e Howell, 1992) _____	20
Figura 3.3– Fator de forma entre duas placas paralelas (Siegel e Howell, 1992) _____	22
Figura 3.4– Fator de forma entre duas placas perpendiculares (Siegel e Howell, 1992) _____	23
Figura 3.5– Fator de forma entre um elemento infinitesimal e um disco de raio $r$ (Siegel e Howell, 1992) _____	23
Figura 3.6– Entidades geométricas envolvidas no Teorema de Stokes (Siegel e Howell, 1992) _____	24
Figura 3.7– Discretização utilizada para o cálculo do problema radiativo _____	25
Figura 3.8– Violação da hipótese da proximidade _____	26
Figura 3.9– Violação da hipótese da visibilidade _____	27
Figura 3.10– Aproximação $F_{1-2}$ por $F_{d1-2}$ _____	28
Figura 3.11– Redução de erros devido a violação da hipótese da proximidade _____	28
Figura 3.12– Redução de erros devido a violação da hipótese da visibilidade _____	29
Figura 3.13– Elementos geométricos envolvidos no método da dupla discretização com a aproximação de disco _____	30
Figura 3.14– Fator de forma entre um elemento infinitesimal e um disco posicionado arbitrariamente no espaço _____	31
Figura 3.15– Dupla discretização com a aproximação de disco _____	33
Figura 3.16– Algoritmo do método da dupla discretização com a aproximação de disco _____	34
Figura 3.17– Implementação numérica da analogia de Nusselt _____	35
Figura 3.18– O Hemi-Cubo _____	36
Figura 3.19– <i>Pixels</i> das faces laterais e superior _____	37
Figura 3.20– Superfícies com fatores de forma idênticos _____	38
Figura 3.21– Violação da hipótese do falseamento _____	39
Figura 3.22– O processo de <i>clipping</i> _____	40
Figura 3.23– Algoritmo do método Hemi-Cube _____	41
Figura 3.24– Algoritmo do método Hemi-Cube (cont.) _____	42
Figura 3.25– Elementos geométricos envolvidos no método de Mitalas e Stephenson _____	43
Figura 3.26– Dois Segmentos em coordenadas unidimensionais _____	44
Figura 3.27– Contornos de área visível _____	46
Figura 3.28– Projeção do sub-elemento $n$ na superfície $A_m$ com obstrução _____	47
Figura 3.29– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson _____	48
Figura 3.30– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson (cont.) _____	49
Figura 3.31– Entes geométricos envolvidos no teste do cone _____	52
Figura 4.1– Cavidade com superfícies imaginárias _____	54
Figura 4.2– Discretização com superfícies isotérmicas _____	55

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,839 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:57 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

Figura 4.3– Emissividade espectral de superfície cinzenta por faixas	55
Figura 4.4– Cavity composta por $N$ superfícies	58

Figura 6.25– Placas paralelas com obstrução: Comparação da performance dos métodos _____	106
Figura 6.26– Paralelepípedo com obstrução: Performance do método Hemi-Cube _____	109
Figura 6.27– Paralelepípedo com obstrução: Análise do método Hemi-Cube _____	109

## SIMBOLOGIA

$A_s$	Área da superfície 's' ( 1, 2, 3, ...)	[m <sup>2</sup> ]
$A_p$	Área projetada	[m <sup>2</sup> ]
$\vec{n}$	Vetor normal à superfície	[m]
$dA$	Elemento de área infinitesimal	[m <sup>2</sup> ]
$F_{1-2}$	Fator de forma entre $A_1$ e $A_2$	
$F_{I-J}$	Fator de forma entre $A_I$ e $A_J$	
$F_{d1-d2}$	Fator de forma entre $dA_1$ e $dA_2$	
$F_{d1-2}$	Fator de forma entre $dA_1$ e $A_2$	
$F_{i-j}$	Fator de forma entre $A_i$ e $A_j$	
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann	[W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> ]
$\alpha$	Absortividade	
$\varepsilon$	Emissividade	
$\rho$	Refletividade	
$\tau$	Transmissividade	
$k$	Condutividade térmica	[W/mK]
$c_p$	Calor específico	[J/KgK]
$\rho$	Densidade	[kg/m <sup>3</sup> ]
$I$	Intensidade Radiativa	[W/m <sup>2</sup> sr]
$E$	Emitância	[W/m <sup>2</sup> ]
$G$	Irradiância	[W/m <sup>2</sup> ]
$J$	Radiosidade	[W/m <sup>2</sup> ]
$G_{i-j}$	Acoplamento radiativo entre as superfícies $A_i$ e $A_j$	
$T$	Temperatura	[K]
$Q''$	Fluxo de Calor	[W/m <sup>2</sup> ]
$\dot{E}$	Energia por unidade de tempo	[W]
$\dot{q}$	Geração de calor	[W/m <sup>3</sup> ]
$\Phi$	Energia radiante	[J]
$q$	Taxa de fluxo da calor	[W]

$t$	Tempo	[s]
$w$	Ângulo sólido	[sr]
$\theta$	Ângulo polar (medido da normal da superfície)	[rad]
$\varphi$	Ângulo azimutal	[rad]
$\vec{r}$	Distância em coordenadas esféricas	[m]
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas	[m]
$\lambda$	Comprimento de onda	[ $\mu m$ ]
$S$	Distância entre duas superfícies	[m]
$N$	Número de superfícies em uma cavidade	
$\  \cdot \ _2$	Norma Euclidiana dos resíduos	

### Subíndices e Superíndices

$P$	Área projetada
1, 2, ...	Superfícies 1, 2, ...
$d1, d2, \dots$	Elemento de área infinitesimal 1, 2, ...
$i, j, \dots$	Superfícies $i, j, \dots$
$\lambda$	Grandeza espectral
$e$	Energia emitida
$s$	Área superficial
$i$	Energia Incidente
$b$	Corpo Negro
$\cdot$	Grandeza direcional

# **1 Introdução**

---

## **1.1 Preliminares**

Fenômenos envolvendo troca de calor por radiação e condução são comumente encontrados em inúmeras situações de engenharia. A título de exemplo, pode-se citar os problemas envolvidos no controle térmico de satélites. Em virtude de diferentes solicitações térmicas, tanto externas como internas, durante todo o período de sua existência, os satélites encontram-se sujeitos a elevados gradientes de temperaturas. Por um lado, tem-se grandes fontes de calor como a radiação solar e a dissipação de energia devido a componentes internos, e por outro, tem-se todo o espaço sideral ao seu redor, um enorme sumidouro de calor comumente considerado como um corpo negro a 4 K

Sob a influência destes grandes gradientes de temperatura, grande parte de sua carga útil (*payload*), como baterias, lentes e sensores ópticos, possuem características de comportamento térmico bem peculiares e necessitam permanecer em estreitas faixas de temperatura para a obtenção de seus pontos ótimos de funcionamento. O bom funcionamento destes componentes assegura todo o período de vida útil do satélite. Como no espaço existe vácuo, a forma mais eficiente de dissipação de calor é obtida através do controle de fenômenos de radiação e da condução de calor no interior dos equipamentos.

Conhecer o comportamento do campo de temperaturas nos pontos críticos do projeto, isto é, as temperaturas máximas e mínimas para cada ponto de interesse e garantir que todos os componentes operem dentro da faixa desejada ao longo de toda a órbita, é o objetivo do engenheiro térmico. Em virtude dos altos custos envolvidos tanto na construção e na operação destes equipamentos espaciais, a simulação computacional de todo o sistema térmico é uma ferramenta útil e de vital importância para o engenheiro desta área, pois possibilita de maneira prática e econômica, que todas as situações possam ser simuladas e previstas em computador, visando garantir que os comportamentos térmicos de todos os componentes durante o vôo, estejam dentro dos limites especificados.

O trabalho aqui proposto consiste no estudo e desenvolvimento de técnicas numéricas

para a simulação de problemas radiativos-condutivos acoplados, envolvendo superfícies difusas, cinzentas e opacas, na ausência de fluidos (meio participante).

Não somente na indústria espacial como também em outras aplicações, a hipótese de superfícies difusas, cinzentas, opacas *in vacuo* pode ser assumida. De acordo com Gebhart

uma boa aproximação mesmo tratando-se de superfícies não  
 geral estas encontram-se sujeitas a vários tipos de desgastes,  
 os tipos de alterações superficiais que acabam por alterar as

a maior ênfase nas duas principais etapas do processo de  
 fenômenos acima mencionados: o cálculo do fator de forma  
 superfícies e nas possíveis metodologias de solução do  
 ando radiação e condução.

as grandes dificuldades em problemas radiativos é a precisão  
 a entre um conjunto de superfícies quaisquer e o tempo  
 seu cálculo.

a de uma superfície no interior de um cubo para as outras  
 madamente 0,2. Valores do fator de forma computados entre  
 separadas por distâncias de 1, 2, 5 e 10, são aproximadamente  
 oria dos problemas reais, distâncias de aproximadamente 5  
 cas representam a maior parte dos problemas e os valores  
 0,01 e 0,1; sendo usualmente encontrados valores da ordem de  
 erfícies. Analisando os dados aqui demonstrados, conclui-se  
 cional utilizado para este cálculo, deve ser capaz de obter  
 gitos ou mais.

987), o problema no cálculo dos fatores de forma não está no  
 de serem computados, mas sim, no fato de que o tempo  
 ento aumenta exponencialmente com o número de superfícies

e envolvem  $N$  superfícies, existem  $N^2$  fatores de forma que  
 precisam ser calculados. Utilizando simplificações como a reciprocidade (mostrada adiante),  
 ocorre uma redução desse valor para  $N(N - 1)/2$ . Se existem bloqueios entre superfícies para  
 cada cálculo do fator de forma devem ser realizadas  $(N - 2)$  checagens para a procura de  
 possíveis superfícies que causem obstruções. Isto fornece um total de  $N(N - 1)(N - 2)/2$

verificações, resultando em valores da ordem de  $N^3$ . Em adição a isso, a maioria dos procedimentos para o cálculo onde há bloqueio, tende a ser muito menos eficiente, mais demorada e menos precisa.

Taylor *et al.* (1994) demonstrou também que o cômputo da troca de calor pode ser altamente sensível à imprecisão do cálculo do fator de forma, sendo este o responsável por consideráveis fontes de erros nos modelos.

A solução do problema conjugado da troca de calor radiativa e condutiva não é recente e vem ao longo do tempo sendo realizado de diversas maneiras. Diversos simuladores térmicos voltados para aplicações espaciais e industriais já foram construídos e vem sendo utilizados amplamente. Dentre eles destacam-se o SINDA (1992), construído pela agência espacial americana - NASA, o ESATAN (1998) – construído pela agência espacial européia – ESA, e o PCTER (1985) – Pacote de Análise Térmica, desenvolvido pelo INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. O presente trabalho pode ser entendido como uma continuação dos estudos baseados nos modelos já implementados nestes simuladores, comparando duas possíveis implementações para o cálculo da parte radiativa, visando a melhor performance e o menor custo computacional.

É importante ressaltar que caso as etapas do cálculo do fator de forma e da troca de calor radiativa sejam imprecisamente computadas, os seus efeitos podem inviabilizar a construção de modelos com alto grau de fidelidade, como os necessários na indústria espacial.

A seguir é apresentada a evolução dos diversos esquemas propostos para o cálculo do fator de forma entre superfícies, e dos modelos computacionais utilizados para a solução de problemas envolvendo radiação e condução.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

### **1.2.1 Fator de Forma**

A determinação da troca radiativa entre superfícies vem sendo objeto de pesquisa ao longo dos anos nas mais diversas áreas. Na engenharia mecânica, a radiação sempre foi e continua sendo estudada como um fenômeno de transferência de calor visando o projeto térmico de equipamentos. Pode-se citar como exemplo, o grande número de trabalhos

publicados na área de radiação em meados das décadas de 60 e 70, quando a corrida tecnológica para a conquista do espaço forneceu um grande estímulo às determinações precisas das trocas radiativas em equipamentos eletrônicos. Na área de edificações e arquitetura, o assunto de iluminação é foco de constante pesquisa envolvendo temas relacionados ao conforto térmico e o cálculo da radiação solar. Recentemente, a área de computação gráfica, a qual tem se beneficiado diretamente do imenso avanço dos recursos computacionais e do interesse em construir imagens cada vez mais realísticas considerando o preciso cálculo da iluminação em ambientes, vem realizando grandes contribuições. Esta última alicerça suas técnicas de construção de imagens em teorias básicas de radiação de calor, amplamente conhecida pelos engenheiros da área térmica.

As áreas de engenharia e física são pioneiras no estudo do fator de forma. O conceito que se podia, na equação de radiação, definir um fator que contivesse somente elementos geométricos e representasse quantidades energéticas, deve-se certamente a Nusselt (1928) no seu trabalho onde apresenta a derivação da técnica da Esfera Unitária. Neste texto ele refere-se a um “*angle-factor*”, que em termos atuais, representa a parcela de energia radiante que sai de uma superfície e é incidente em outra.

Inicialmente, quando não se tinha acesso aos computadores, para um conjunto muito limitado de configurações geométricas, valores analíticos para o cálculo do fator de forma eram calculados (Hamilton e Morgan, 1952; Howell, 1982; Gross *et al.*, 1981). Apesar desse pouco número de configurações não fornecer muita versatilidade para cálculos reais, a metodologia analítica ainda é muito utilizada para a validação e comparação de métodos numéricos. Quando existe a possibilidade de obstruções, a avaliação dos fatores de forma de maneira analítica é, em geral, impossível, sendo necessário a utilização de técnicas aproximadas.

Os métodos numéricos para o cálculo do fator de forma, diferem na maneira como realizam o cálculo da integral dupla de área, considerando a presença ou não de obstruções. Em meados da década de 60, como descrito por Kadaba (1982), com o surgimento dos computadores, técnicas numéricas aproximadas para a realização da integração da expressão do fator de forma foram desenvolvidas. Métodos como a Dupla Discretização (Shapiro, 1985) foram um dos primeiros a surgir, pois são decorrentes diretos de uma discretização superficial e da conseqüente avaliação numérica da dupla integral. Ao longo do tempo, inúmeras variações deste método foram implementadas e ainda vem sendo utilizadas em várias rotinas

computacionais como o VIEWC (Emery, 1986) e FACET (Shapiro, 1983).

Um outro exemplo da avaliação numérica da dupla integral de área, consiste na utilização do Teorema de Stokes para a redução da dupla integral de área para uma dupla integral ao longo dos contornos das superfícies envolvidas (Siegel e Howell, 1992). Este método, embora se apresente rápido quando implementado computacionalmente (Shapiro, 1985), sofre de problemas para a determinação dos contornos visíveis quando obstruções estão presentes. Com a utilização do trabalho de Mitalas e Stephenson (1966), aonde foi mostrado que quando utilizamos contornos retos, uma destas integrais de contorno pode ser resolvida analiticamente, este método ganha maior precisão, pois resulta em menores aproximações na avaliação do fator de forma.

O trabalho de Walton (1987) foi um dos pioneiros na utilização do método da Integral de Contorno considerando obstruções. Ele utiliza o trabalho de Mitalas e Stephenson e compara sua performance com a técnica da Dupla Discretização. O seu trabalho utiliza uma associação de técnicas de projeções e *clipping* (recorte) de polígonos para a determinação das regiões de sombra. Visando obter maior precisão, Walton utiliza expressões analíticas quando existem contornos adjacentes e a técnica da Quadratura Gaussiana para avaliação numérica da integral. Ele também propõe uma série de checagens hierárquicas para a eliminação de superfícies não obstrutoras. Vale a pena ser ressaltado que, em virtude do refinamento e da qualidade deste trabalho, o mesmo foi tomado como referência para o presente estudo.

Ainda no campo da engenharia, outras técnicas numéricas que possuem algumas semelhanças com o método de elementos finitos foram também utilizadas para o cálculo do fator de forma entre superfícies, sendo um bom exemplo apresentado no trabalho de Chung e Kim (1982). Em 1993, trabalhos como o de Saltiel e Koliba (1993) demonstram a utilização de malhas superficiais adaptativas na obtenção de fatores de forma cada vez mais precisos.

Paralelamente aos desenvolvimentos nos segmentos de engenharia e arquitetura, durante a década de 80, os trabalhos da área de computação gráfica trouxeram as maiores contribuições para o cálculo do fator de forma. Como vem se observando nos últimos anos, a representação de imagens realísticas tem se tornado uma vertente própria do ramo de computação gráfica. Neste tipo de aplicações, o cálculo do fator de forma está intimamente relacionado com a técnica utilizada para o cômputo da troca de calor, pois objetiva-se a determinação das intensidades luminosas incidentes nos objetos que serão desenhados nas imagens. De acordo com Claro (1998), existem duas técnicas de construção de imagens

amplamente difundidas: o método *Ray – Tracing* (termo que pode ser traduzido como perseguição ao raio) e o tradicional método das Radiosidades.

De maneira simples e genérica, o método *Ray – Tracing*

para o cálculo dos fatores de forma. Ainda de acordo com Claro (1998), a grande vantagem apontada pela utilização do *Hemi-Cube* com o método das Radiosidades é o fato de ser um modelo que relaciona a geometria entre os objetos do ambiente independentemente do ponto de vista do observador, permitindo que os valores da luminância das superfícies sejam utilizados na construção da imagem segundo diversos pontos de vista, sem a necessidade de se efetuar o cálculo a cada mudança da posição do observador. Este método será explicado em detalhe ao longo do texto, pois constitui um dos focos principais do presente estudo.

Nos anos posteriores, Wallace e Cohen (1987) e Kajiya (1986) e Immel *et al.* (1986) publicaram seus primeiros trabalhos unindo e analisando as vantagens e desvantagens da união das técnicas de *Ray-Tracing* e Radiosidades com o intuito de analisar o problema envolvendo superfícies difusas e especulares.

Em 1988, Cohen *et al.* propuseram o método do Refinamento Progressivo, o qual muda um pouco a abordagem anterior da radiosidade e da utilização do *Hemi-Cube*, focando não a superfície que recebe energia, mas sim as superfícies que emitem mais energia e depois as que emitem menos energia. No método apresentado, a visualização da imagem é possível a cada iteração. Isto foi realizado utilizando leis de reciprocidade visando a obtenção de maior eficiência do modelo. O intuito era obter a representação de imagens, alterando a posição do observador em tempo real.

Em 1989, Wallace *et al.*, publicaram um trabalho comentando as limitações do *Hemi-Cube* e propondo um esquema de *Ray-Tracing* utilizando um método baseado no Refinamento Progressivo acima citado. Este esquema propõe uma nova abordagem para a técnica da Dupla-Discretização, analisada agora do ponto de vista de um método tipo *Ray-Tracing*. Wallace sugere uma nova aproximação para a avaliação dos fatores de forma da dupla integral, utilizando a chamada “*disc approximation*”. Esta nova aproximação corrige o método da Dupla Discretização quando as superfícies envolvidas estão muito próximas, evitando que seus fatores de forma excedam a unidade. Esta aproximação será mais detalhada posteriormente.

De acordo com Claro (1998), os trabalhos acima citados de Cohen e Wallace serviram como base para praticamente todos os desenvolvimentos posteriores para os modelos de iluminação utilizados em computação gráfica, influenciando também a comunidade de engenharia preocupada com as trocas térmicas e a precisão do cálculo do fator de forma. A partir destes trabalhos, as publicações seguintes tendem a corrigir pequenas deficiências e

umentar a performance destes métodos. Nesta linha, Baum *et al.* em 1989, publicaram um artigo onde descrevem os erros inerentes do método do *Hemi-Cube* e propõem um algoritmo que verifica a existência destes erros, utilizando correções através da utilização de um método analítico. O autor ressalta também que estes erros são mais frequentes quando se utiliza a técnica do Refinamento Progressivo. O algoritmo proposto resolve a integral externa do fator de forma numericamente e a interna analiticamente. Como resultado, eles propõem uma nova estratégia chamada de Refinamento Progressivo Híbrido.

No mesmo ano, Sillion e Puech (1989), utilizando o trabalho de Wallace como base, propõem um método geral para a integração da reflexão difusa e especular. Neste trabalho, utiliza-se um novo método de distribuição de raios.

No ano seguinte, Rushmeier (1990), publicou o seu primeiro artigo que propõe uma otimização do algoritmo *Hemi-Cube* utilizando rotinas já implementadas em nível de *hardware* da máquina. Os resultados são uma redução do tempo de processamento da ordem de 6 a 7 vezes.

Na seqüência, Hanrahan *et al.* (1991), baseado em um método de *Ray-Tracing* recursivo propõem um algoritmo de Radiosidade Hierárquica Rápida, sendo detalhado posteriormente por Auperle em 1993. De maneira simplificada, este algoritmo utiliza uma sucessão de refinamento das superfícies do ambiente, até que o erro no cálculo do fator de forma esteja dentro de um valor previamente especificado.

Em 1993, Hanrahan e Schroder, apresentam um dos primeiros trabalhos com uma expressão fechada para o cálculo do fator de forma entre dois polígonos quaisquer no espaço. Porém a solução não é elementar, pois utiliza complexas e extensas funções di-logarítmicas. Os autores reconhecem que o valor principal da fórmula é ser utilizada como solução *benchmark* para os métodos numéricos. Na mesma linha que Baum *et al.* (1989), Schroder em 1993 publicou outro artigo que utiliza funções analíticas aproximadas para a estimação dos fatores de forma entre polígonos com fronteira comum. Embora este método apresente um erro relativamente baixo, é um método computacionalmente dispendioso.

Como descrito em Claro (1998), Hanrahan e Teller em 1994, visando reduzir o número de checagens para as verificações de obstruções, propõem o conceito de “células de visibilidade”, onde também permite-se a priori, excluir do cálculo do fator de forma as superfícies que não se “enxergam”. Ainda no mesmo ano, Muller e Schoeffel (1994), apresentaram um método interativo para a visualização de ambientes virtuais, ou seja, com a

movimentação do observador. Este trabalho julga o método do *Hemi-Cube* inadequado e utiliza o *Ray-Tracing* recursivo.

Ainda na área de computação gráfica, entre 1994 e 1997 inúmeros trabalhos surgiram dando, agora, mais ênfase no método de Monte Carlo (*Ray-Tracing*) e melhorando sua performance. Dentre eles podemos citar (Keller, 1995; Drakos, 1996; Khodulev, 1996 e Rademacher, 1997). Em virtude do crescimento do poder computacional e da utilização de funções já implementadas em nível de *hardware*, o método de Monte Carlo deixou de ser tão custoso computacionalmente, e por ser mais flexível para poder lidar com superfícies mais complexas (especulares) começou a ser utilizado em maior escala.

Recentemente alguns trabalhos começaram a tirar proveito das arquiteturas distribuídas e das técnicas de processamento paralelo, visando um cálculo mais preciso dos fatores de forma. Os trabalhos de Schmidt (1997) e Stuttard *et al.* (1996) são bons exemplos de técnicas aproximadas para o cálculo do fator de forma que utilizam tal funcionalidade.

As técnicas e melhorias introduzidas pela computação gráfica contribuíram muito para o cálculo do fator de forma, mas pouco influenciaram nos algoritmos de solução das equações de troca de calor radiativa. Alguma contribuição pode ser obtida quando da utilização do método probabilístico de Monte Carlo para a obtenção da troca de calor, mas quando voltamos nossa atenção para a

acordo com Sparrow (1963), os métodos apresentados por Hottel (1954), Oppenheim (1956), Eckert e Drake (1959), e Gebhart (1961) podem ser referenciados como os pioneiros neste tipo de aplicação.

O texto de Eckert e Drake (1959) descreve o clássico Método das Radiosidades. icofazou- 2.(mi)-

### 1.2.3 Metodologias Computacionais

Referente a construção de sistemas computacionais completos que acoplem a solução radiativa com a solução dos outros modos de transferência de calor, várias metodologias numéricas como o método dos nós, diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos já foram utilizadas e são amplamente difundidas para a solução de problemas de difusão e convecção.

O presente trabalho resolve a condução de calor em superfícies bi-dimensionais (placas planas delgadas) posicionadas arbitrariamente no espaço e discretizadas em triângulos. Um esquema tipo CVFEM (*Control Volume Based Finite Element Method*) (Baliga e Patankar, 1980), é usado para a aproximação do problema difusivo. Maiores informações sobre este método e outras técnicas numéricas para a solução de problemas de condução de calor podem ser encontradas em Maliska (1995).

Especificamente, no início da indústria aeroespacial, quando não se dispunha de computadores, metodologias mais simples que representavam sistemas térmicos analisados de forma discreta como em circuitos elétricos foram utilizados. Análises simplificadas podem ser facilmente realizadas à mão e modelos mais complexos acabam sendo resolvidos em computador. Métodos numéricos baseados nesta metodologia tipo “*lumped*” foram desenvolvidos inicialmente por Southwell, Emmons e Dusenberre nos anos 40 (ESATAN, 1998). Em 1966 J. Gaski na NASA, baseado nesta metodologia, desenvolve o código SINDA (1992) – “*System Improved Numerical Differencing Analyzer*”, constituindo o primeiro sistema de análise térmica voltado para aplicações espaciais. Já no início da década de 80 a ESA desenvolve o ESATAN (1998), substituindo o SINDA em seus laboratórios e adicionando algumas melhorias. Com a mesma filosofia, no Brasil, o PC-TER (1985) foi desenvolvido pelo INPE. Como dito anteriormente, o trabalho aqui proposto pode ser entendido como um descendente direto desta evolução.

## 1.3 Objetivos e Contribuições

Os objetivos do trabalho aqui proposto estão galgados no estudo e implementação de técnicas numéricas para o cálculo do fator de forma entre superfícies difusas, cinzentas e opacas. Visando investigar aspectos como acurácia, desempenho do método na presença de

obstruções e rapidez computacional, algumas configurações geométricas de interesse são analisadas.

Além do estudo envolvendo o cálculo do fator de forma, o trabalho apresenta duas possíveis implementações para a solução de problemas envolvendo radiação e condução acoplados. A primeira implementação utiliza o tradicional Método das Radiosidades e a segunda o Método de Gebhart. Como dito anteriormente, para a solução da parte difusiva é empregado um esquema tipo CVFEM, implementado aqui para tratar superfícies discretizadas em triângulos. Em virtude destes dois métodos apresentarem características distintas de acoplamento com a solução da condução de calor e de como tratam as não linearidades do problema, fatores como convergência e tempo de processamento são objetos de interesse.

Uma contribuição importante deste estudo é o fato de que o mesmo foi diretamente empregado no desenvolvimento do aplicativo de análise térmica SATER100 (2000). O *software* SATER100 consiste de uma ferramenta de simulação e análise do problema conjugado de transferência de calor por condução e radiação, em superfícies de geometrias tri-dimensionais. O aplicativo também apresenta a flexibilidade de tratar problemas de convecção e transferência de massa, por utilizar uma representação simplificada destes coeficientes quando tais fenômenos estão presentes. O projeto citado acima, iniciou em fevereiro de 1999, e tem seu encerramento planejado para o início de 2001, sendo um consórcio desenvolvido entre as empresas ESSS-*Engineering Simulation and Scientific Software* (Florianópolis), Equatorial Sistemas (São José dos Campos), TCS Engenharia (São José dos Campos) e o Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor – EMC/UFSC. O presente estudo visou analisar, implementar e verificar quais metodologias seriam mais adequadas e eficientes para o tipo de aplicação que se pretende resolver com tal aplicativo.

Toda a implementação computacional foi desenvolvida na linguagem C++, utilizando a técnica de “Programação Orientada a Objetos” (OOP), visando garantir uma boa performance numérica aliada a uma programação organizada e de fácil re-usabilidade (Barton e Nackman, 1997).

## 1.4 Escopo do Trabalho

Os capítulos subsequentes estão divididos da seguinte maneira:

No capítulo seguinte (segundo) caracteriza-se o problema a ser estudado e apresenta-se alguns fundamentos e definições físicas necessários para a introdução e o entendimento de hipóteses envolvendo os fenômenos radiativos e condutivos que serão expostos. Objetiva-se neste capítulo fornecer uma visão geral do problema e abordar alguns aspectos e conceitos que podem, se adequadamente esclarecidos, facilitar o estudo de outros engenheiros que porventura necessitem trabalhar com problemas envolvendo condução e principalmente radiação.

No terceiro capítulo é introduzido o assunto sobre fatores de forma, apresentando sua definição, suas características e os métodos aqui utilizados para o seu cálculo computacional. Em síntese, são apresentados os métodos de Dupla Discretização, Integral de Contorno e *Hemi-Cube*. Neste capítulo são também discutidas as rotinas computacionais necessárias para a implementação destes métodos adicionados de algoritmos para tratamento de obstruções.

No quarto capítulo são apresentados os diversos métodos de solução do problema radiativo isolado. O tradicional Método das Radiosidades e o Método de Gebhart são apresentados e comparados sob o ponto de vista de suas formulações.

No quinto capítulo apresenta-se a metodologia CVFEM utilizada para a solução do problema da difusão de calor. Neste capítulo também é explicado como é realizado o acoplamento entre as equações de radiação e condução para os dois métodos (Radiosidades e Gebhart) apresentados para a troca de calor entre as superfícies. Este capítulo dedica-se também a explicar a implementação computacional e aos algoritmos estudados para a solução do problema radiativo-condutivo acoplado, com ênfase nos processos iterativos para a solução da não linearidade presente entre as equações.

O sexto capítulo é reservado para a apresentação dos resultados numéricos. Diversas configurações geométricas para a avaliação dos modelos do fator de forma foram utilizados. Aspectos como acurácia, sensibilidade, precisão e performance computacional são analisados. Também são apresentados resultados visando validar os algoritmos para a solução dos problemas radiativos-condutivos e analisar o efeito da influência da troca de calor por radiação em um problema tradicional de condução de calor.

Por fim, no sétimo capítulo são mencionadas as conclusões do presente estudo e recomendações para futuros trabalhos.

## **2 Caracterização do Problema**

---

Neste capítulo apresentam-se o problema de estudo, seus fundamentos físicos e matemáticos e as definições necessárias para o entendimento dos desenvolvimentos deste trabalho.

O que será apresentado abaixo foi retirado de textos clássicos de transferência de calor

A condução de calor é um fenômeno físico que está associado ao nível energético das moléculas que compõem um determinado meio. Este nível está associado ao movimento aleatório das moléculas, responsável pela transferência de energia das partículas de maior para menor nível energético. Este processo é também chamado de difusão de energia, e sempre ocorre na presença de um meio e de um gradiente de temperatura. Uma forma bastante ilustrativa de entender o fenômeno da condução está apresentado em Incropera e De Witt (1992).

A taxa com que a transferência de calor se propaga em um determinado meio é dado pela *Lei de Fourier*. Esta equação pode ser utilizada para calcular a quantidade de energia transferida neste meio por unidade de tempo, sendo expressa em termos do fluxo de calor perpendicular a uma superfície isotérmica ( $\vec{n}$ ) de acordo com a seguinte expressão

$$q''_c = -k \cdot \frac{dT}{dn} \tag{2.1}$$

onde  $T$  é a temperatura do material e  $k$  a condutividade térmica, possuindo a unidade  $W/m \cdot k$ .

A condutividade térmica ( $k$ ) é uma propriedade que proporciona uma indicação sobre a taxa de transferência de energia, que acontece pelo processo de difusão, e depende da estrutura física e molecular da matéria.

Considerando as placas da Fig. 2.1 meios bi-dimensionais homogêneos, podemos realizar o balanço de energia em um volume de controle elementar, considerando a parcela de energia que é transportada por difusão no interior deste meio e a parcela de energia que esta superfície recebe por radiação, de acordo com a Fig.2.2.

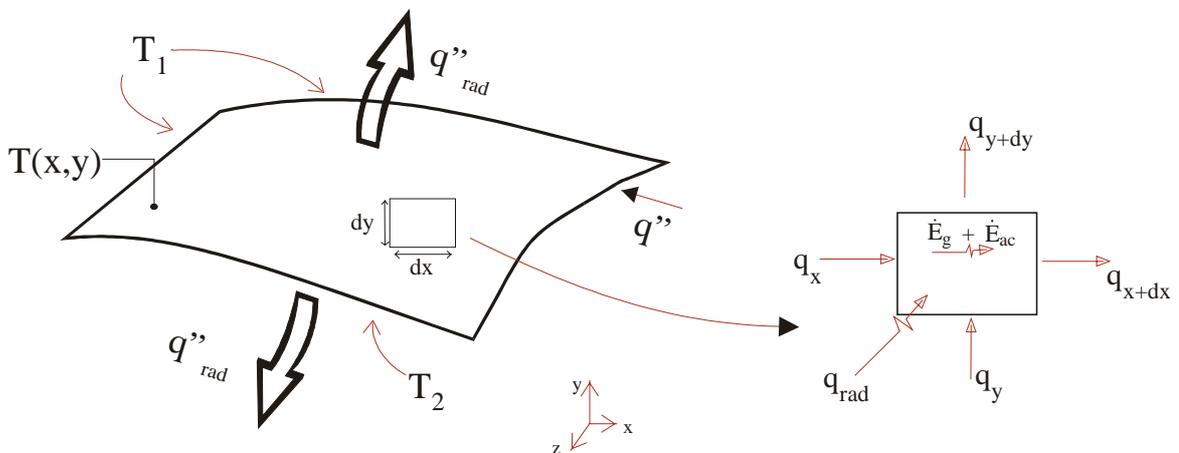


Figura 2.2 – Balanço de energia em um volume de controle elementar

O balanço de energia é dado por

$$\dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_{gerada} = \dot{E}_{acumulada} \quad (2.2)$$

### 3 Fator de Forma

---

Neste capítulo apresenta-se diversos métodos e aproximações utilizadas para o cálculo do fator de forma entre superfícies difusas emitindo radiação uniforme. Será fornecida atenção especial para as rotinas e algoritmos utilizados à verificação de obstruções entre as superfícies. Os métodos aqui descritos serão utilizados para as análises comparativas realizadas ao longo do presente estudo.

#### 3.1 Definição do Fator de Forma entre Superfícies Difusas

##### 3.1.1 Fator de Forma entre dois Elementos de Área Infinitesimal

A obtenção da expressão do fator de forma entre dois elementos de área infinitesimal que possuem superfícies difusas, inicia-se considerando a quantidade de energia que é emitida pela superfície  $dA_1$  e chega em  $dA_2$  (Fig.3.1).

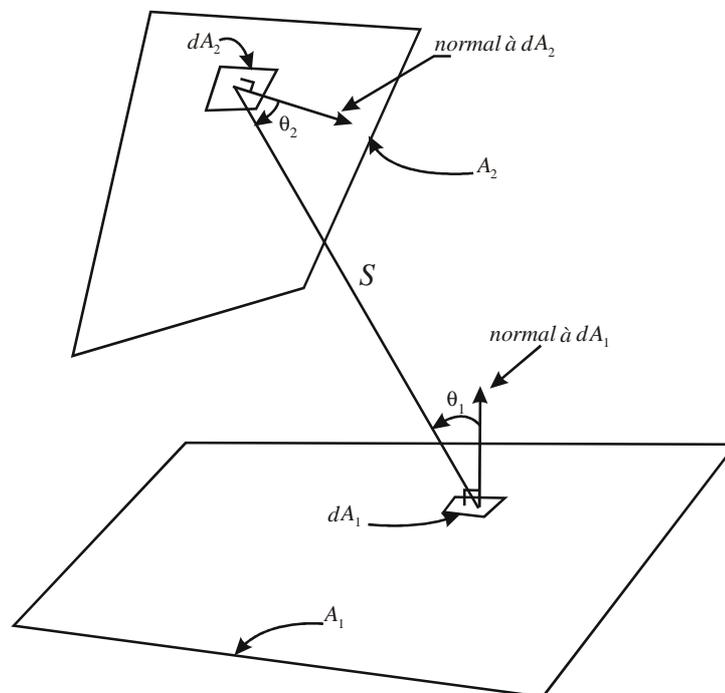


Figura 3.1– Troca radiativa entre dois elementos infinitesimais

Com auxílio do capítulo anterior, esta quantia de energia é representada por

$$dq_{1-2}(\lambda) = I_{\lambda, 1}(\lambda) dA_1 \cos \theta_1 d\omega_1$$

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1 A_2} \int \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1$$

### 3.2.3 Relação de Adição

Consideremos agora a superfície  $A_2$  composta por duas superfícies  $A_a$  e  $A_b$ . A energia proveniente de  $A_1$  que atingiu  $A_2$  é composta pela soma das parcelas que atingiram as superfícies  $A_a$  e  $A_b$ . Transportando isto para a nomenclatura do fator de forma temos

$$F_{1-2} = F_{1-a} + F_{1-b} \tag{3.10}$$

Esta expressão pode ser estendida para qualquer superfície compostas por  $N$  outras superfícies e, ao utilizar esta definição, algum cuidado deve ser tomado, pois o inverso nem sempre é verdadeiro.

### 3.2.4 Analogia de Nusselt

Uma outra característica importante do fator de forma é a chamada Analogia de Nusselt (Siegel e Howell, 1992). Considera-se um hemisfério unitário sobre um elemento de área  $dA_1$ , como mostrado na Fig.3.2

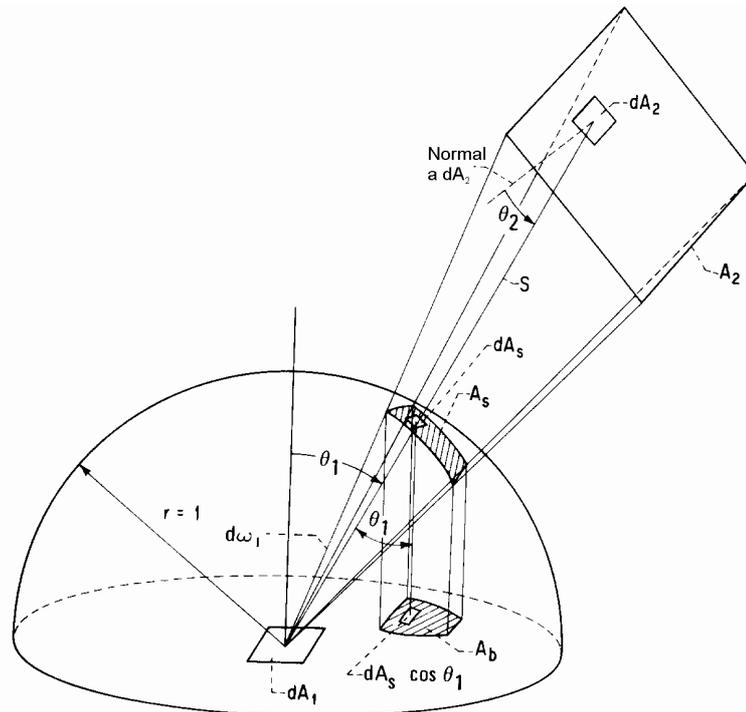


Figura 3.2– Analogia de Nusselt (Siegel e Howell, 1992)

Sabemos que o fator de forma de uma área infinitesimal para um área finita ( $A_2$ ) é dado por

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,839 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:57 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

$$- = - \int \theta \frac{\theta}{2} \quad 2 = - \int \theta_1 \omega_1 \quad (3.11)$$

Sabendo também que  $d\omega_1$  (ângulo sólido) representa a projeção de  $dA_2$  na superfície do hemisfério, obtemos

$$d\omega_1 = \frac{\cos \theta_2 dA_2}{S^2} = \frac{dA_S}{r^2} = dA_S \quad (3.12)$$

onde  $r$  representa o raio unitário. Podemos portanto, escrever o fator de forma utilizando a Eq.(3.11) da seguinte maneira

$$F_{d1-2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_S} \cos \theta_1 dA_S \quad (3.13)$$

O fator

reciprocidade representa uma medida muito mais confiável, mas como dito anteriormente, é necessário que ambos os valores de  $F_{1-2}$  e  $F_{2-1}$  sejam calculados, processo que é computacionalmente caro.

Atualmente, a maioria dos sistemas computacionais desenvolvidos para o cálculo do fator de forma utilizam a lei da reciprocidade para diminuir o número de processamentos a serem realizados e utilizam algumas expressões analíticas, desenvolvidas para configurações geométricas simples, para a verificação de sua precisão. Assim, observa-se que atualmente não existe nenhuma metodologia numérica absoluta que garanta a precisão do cálculo do fator de forma considerando a presença de obstruções.

### 3.3 Métodos Analíticos para o Cálculo do Fator de Forma

Para um grupo reduzido de configurações geométricas, a integração da Eq.(3.6) pode ser realizada analiticamente. Estas soluções analíticas, mesmo com suas limitações de configurações geométricas, são amplamente utilizadas para validação e entendimento do comportamento dos métodos numéricos. Nesta seção somente exemplos de alguns casos comumente utilizados para comparação de métodos numéricos serão apresentados.

#### 3.3.1 Integração Direta

Para o caso de geometrias simples, realizando a integração direta da Eq.(3.6), algumas expressões analíticas para o fator de forma podem ser obtidas. Apesar do resultado nos fornecer uma forma fechada para a sua avaliação, as expressões resultantes são em geral extensas. Os dois exemplos a seguir, apresentados nas Figs. 3.3 e 3.4 ilustram isto:

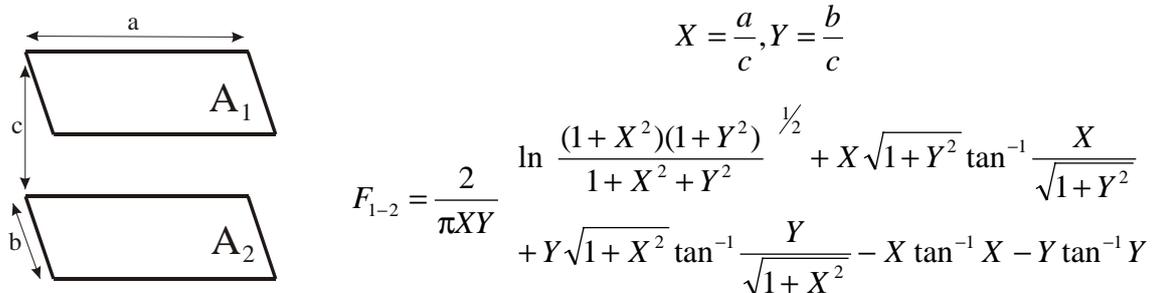
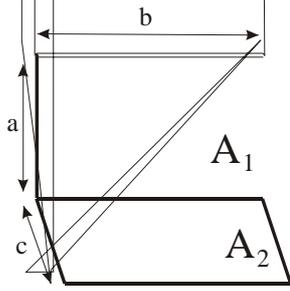


Figura 3.3– Fator de forma entre duas placas paralelas (Siegel e Howell, 1992)



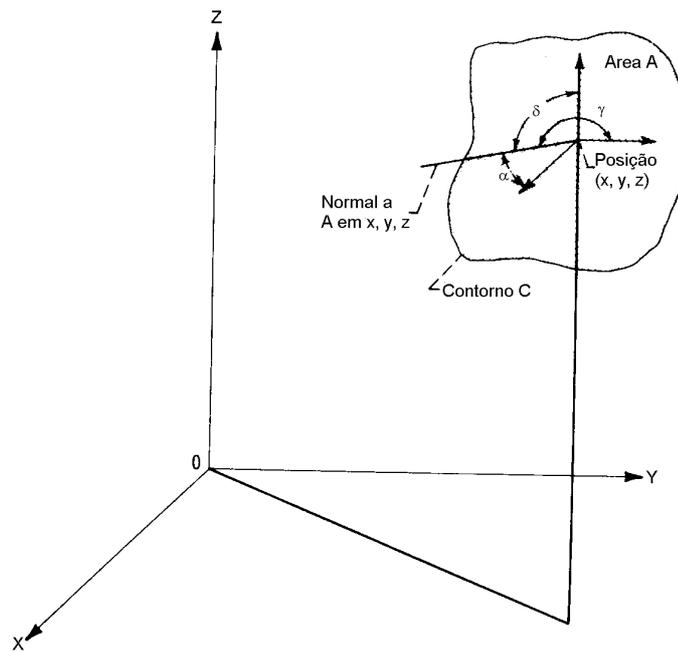


Figura 3.6– Entidades geométricas envolvidas no Teorema de Stokes (Siegel e Howell, 1992)

Representando adequadamente as funções  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , pode-se utilizar esta técnica nas integrais presentes na Eq.(3.6), resultando em

$$I_{12} = \frac{1}{2\pi} \oint \int (\ln \dots + \ln \dots + \ln \dots)$$

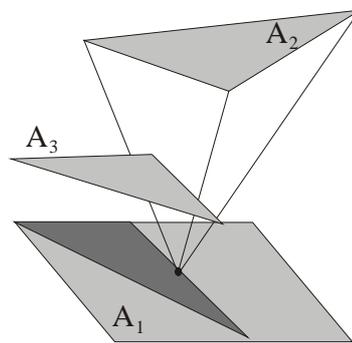
existem obstruções, os algoritmos complicam-se consideravelmente em função da pesquisa necessária para a verificação de superfícies obstrutoras e nas determinações das regiões de sombra.

As seções seguintes fornecem um apanhado sobre algumas técnicas numéricas

mostrados apresentam superfícies divididas em quadrados. Nestas ocasiões, as hipóteses em questão serão válidas para todos os tipos de elemento (quadrados ou triângulos). Caso isto não seja verdadeiro, as observações se

Por outro lado, se agora estivermos interessados no cálculo do fator de forma  $F_{2-1}$ , analisando a Fig.3.8 podemos verificar que a utilização da hipótese acima poderá fornecer boas aproximações, pois a distância  $S$  entre os centros das superfícies é grande comparada com o tamanho médio da superfície  $A_2$ . Assim, como a variação de  $F_{d2-1}$  ao longo da superfície  $A_2$  é menor comparada com a variação  $F_{d1-2}$  ao longo da superfície  $A_1$ , a aproximação de  $F_{2-1}$  por  $F_{d2-1}$  será mais bem avaliada do que  $F_{1-2}$  por  $F_{d1-2}$ .

Uma outra aproximação comumente assumida é que a visibilidade da superfície  $A_2$  é constante quando vista da superfície  $A_1$ . Esta hipótese é chamada de *hipótese da visibilidade* (Baum *et al.* 1989).



**Figura 3.9– Violação da hipótese da visibilidade**

Analisando a Fig.3.9, o centro da superfície  $A_1$  não será representativo da visibilidade que  $A_1$  possui de  $A_2$ .

Ambas as hipóteses até agora apresentadas, assumem que  $F_{d1-2}$  seja constante ao longo de  $A_1$ , sendo assim, é fácil perceber que, à medida que o tamanho de  $A_1$  cresce, a chance de violações nas hipóteses da proximidade e visibilidade também cresce (ver Fig.3.10). Portanto, reduzindo o tamanho destas superfícies, teremos maiores chances de estarmos utilizando estas aproximações corretamente.

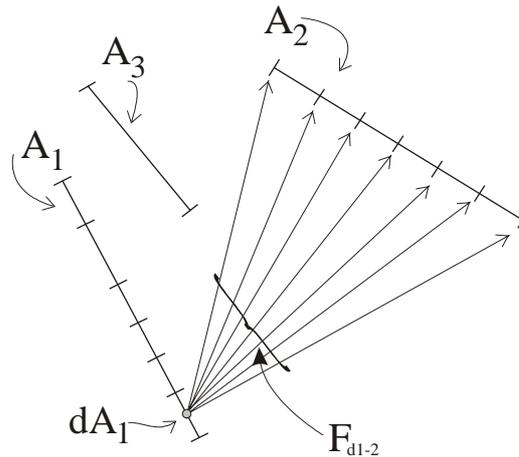


Figura 3.10– Aproximação  $F_{1-2}$  por  $F_{d1-2}$

Se agora utilizarmos um outro nível de subdivisões no interior dos elementos oriundos da discretização, ou seja, um refinamento desta malha, obteremos melhores resultados. Considerando a superfície  $A_1$  subdividida em  $M$  sub-elementos, a Eq.(3.17) resulta em

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \sum_{u=1}^M F_{d1,u-2} \Delta A_{1,u} \tag{3.19}$$

Percebe-se que com a subdivisão dos elementos discretizados e a utilização da expressão acima, estamos avaliando numericamente a integral externa da expressão do fator de forma, resultando em um valor mais preciso e menos sujeito a erros de visibilidade.

Variando o número de  $M$  sub-elementos na superfície  $A_1$ , teremos controle sobre a precisão do método e também do tempo computacional. A subdivisão uniforme gera um tempo computacional elevado e muitas vezes cria sub-elementos desnecessários, sem fornecer qualquer melhoria na precisão. Pode-se utilizar um procedimento mais adequado, como o descrito por Sillion e Puech (1994), aonde os elementos discretizados são divididos (refinados) adaptativamente, somente nas regiões que violam as hipóteses acima, concentrando acurácia e otimizando o tempo de processamento.

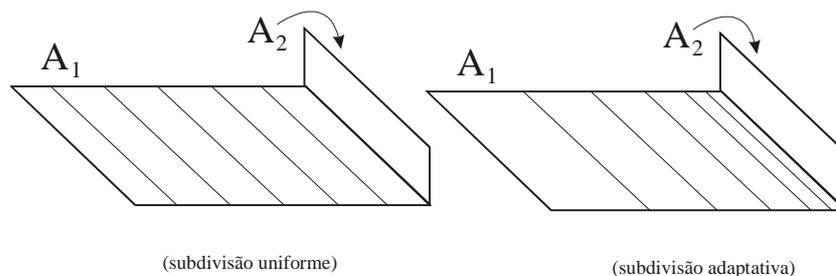
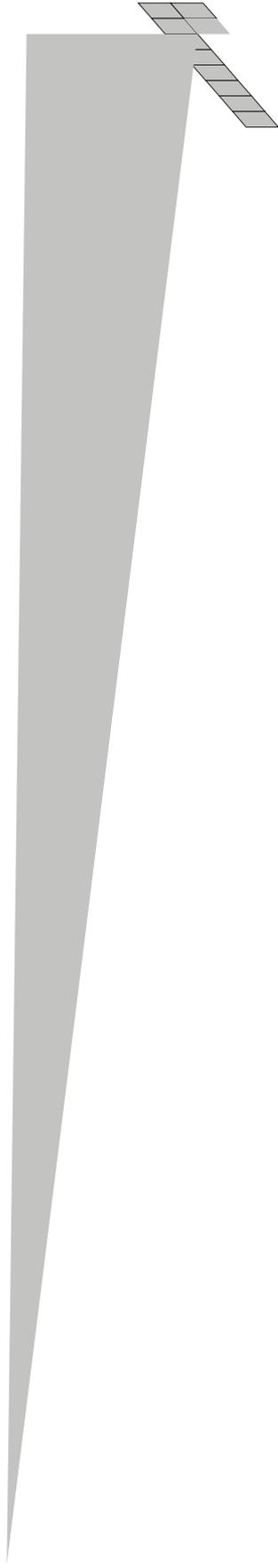


Figura 3.11– Redução de erros devido a violação da hipótese da proximidade



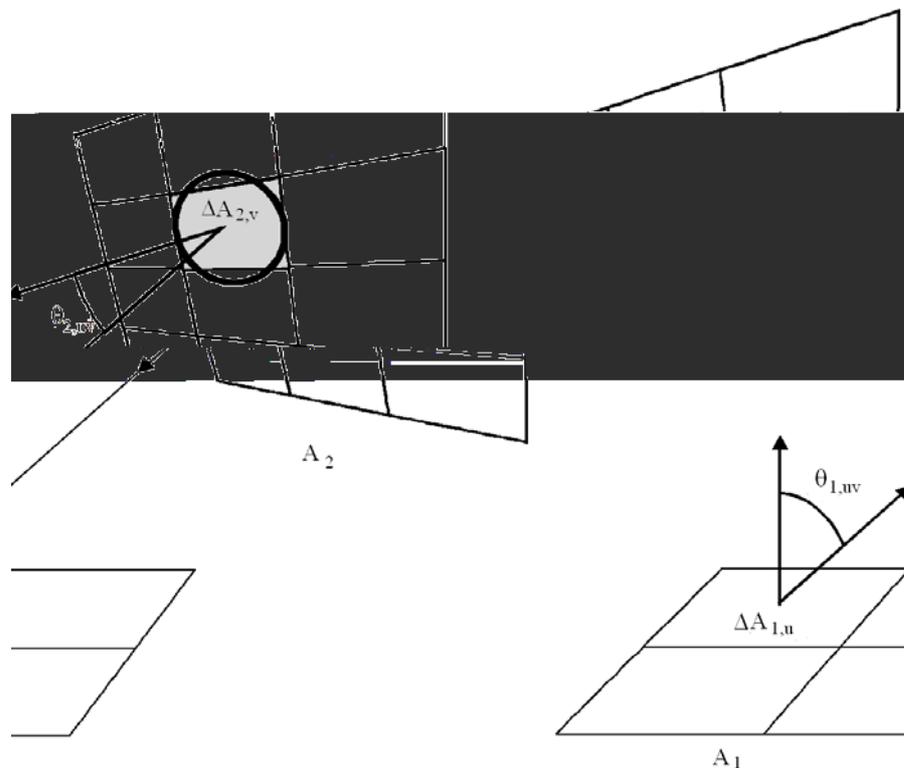
Assumindo a hipótese de que  $\Delta A_{2,v}$  é pequeno quando comparado com o termo da distância ( $S^2$ ), podemos aproximar a Eq.(3.22) por

$$\frac{v^2}{v}$$

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,840 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:57 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

sugerem que  $\Delta A_{2,v}$  seja aproximado por um simples elemento geométrico com a mesma área, para o qual uma fórmula simples eata do f ator deforma seja conhecida. Em virtuded a simplicidade, a utilização da 8xpressão contida na Fig.3.5 é recomendada. Esta expressão

$$F_d = \sum_{v=1}^N \frac{\theta_v}{\pi S + \Delta A_v} \Delta A_v$$



**Figura 3.15– Dupla discretização com a aproximação de disco**

A rotina computacional para a implementação desta técnica é apresentada de maneira simples para dois elementos ( $A_1$  e  $A_2$ ) no diagrama contido na Fig.3.16.

Uma das principais vantagens deste método é a facilidade com que ele pode ser implementado para utilizar discretizações adaptativas, reduzindo os erros nas suas aproximações. Obviamente, o mesmo pode ser atingido utilizando-se um refinamento uniforme, mas utilizando uma malha adaptativa pode-se otimizar o tempo computacional necessário com um ganho efetivo na precisão, refinando mais em elementos mais críticos. Por outro lado, em virtude deste método comumente necessitar de um número elevado de elementos nas superfícies envolvidas, quando o mesmo não utiliza técnicas de aceleração para o processamento dos raios, ele se apresenta lento computacionalmente quando comparado com os outros métodos. Este fato será verificado ao longo deste trabalho.

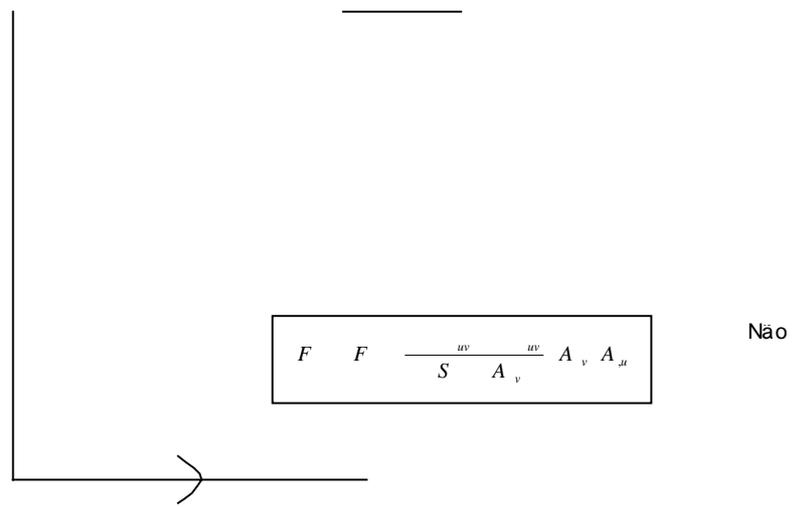


Figura 3.16– Algoritmo do método da dupla discretização com a aproximação de disco

### 3.4.3 Hemi-Cube

O método do Hemi-Cube, desenvolvido por Cohen e Greenberg (1985), é diretamente derivado da Analogia de Nusselt apresentada na seção 3.2.4. Em virtude dos métodos baseados na Analogia de Nusselt possuírem a mesma abordagem, eles são também classificados como métodos de projeção e seu entendimento fica fácil quando observamos a Fig.3.17.

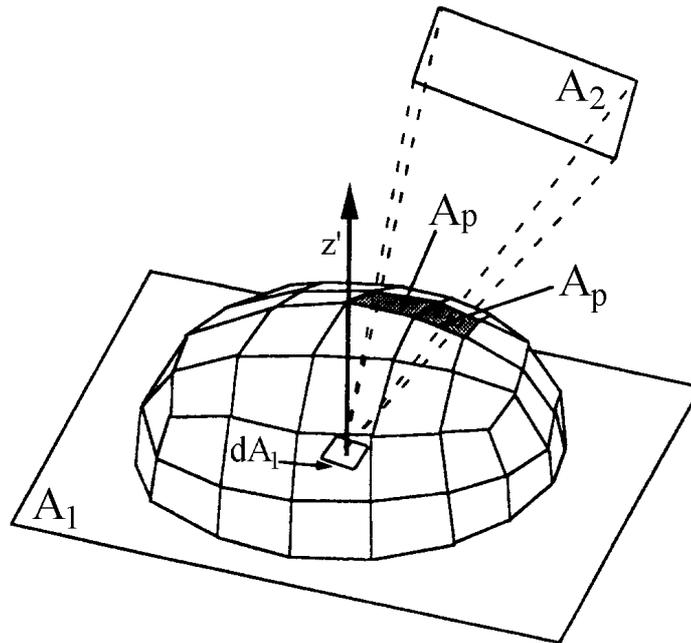


Figura 3.17– Implementação numérica da analogia de Nusselt

A primeira etapa destes métodos consiste na criação de um novo sistema coordenado posicionado no centro da superfície da superfície  $A_1$  e um novo eixo ( $z'$ ) normal a esta superfície. Assim, somente superfícies que estão acima do plano  $z'=0$  são consideradas, pois as que estão abaixo dela possuem fator de forma nulo. Após isto, divide-se o hemisfério da Fig.3.2 em um determinado número de sub-elementos denominados *pixels*, e que são projetados em pequenas áreas da base. À medida que uma superfície  $A_2$ , para o qual se deseja calcular o fator de forma, cobre um determinado conjunto de *pixels*, utilizando-se a Eq.(3.14) calcula-se o fator de forma somando as áreas projetadas pelos *pixels* que são cobertos por esta superfície. Se existir casos onde uma superfície  $A_3$  cobre o mesmo *pixel* já coberto por outra, é então verificada a distância de cada superfície até o centro da superfície considerada, sendo creditado o fator de forma àquele que possuir menor distância.

A implementação computacional destes métodos apresentaram algumas falhas. Dentre elas pode-se citar o fato de que a projeção de elementos na superfície e posterior projeção na

pode ser aproximado pela expressão do fator de forma entre dois elementos infinitesimais, dada por

$$\Delta F = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} \Delta A \quad (3.29)$$

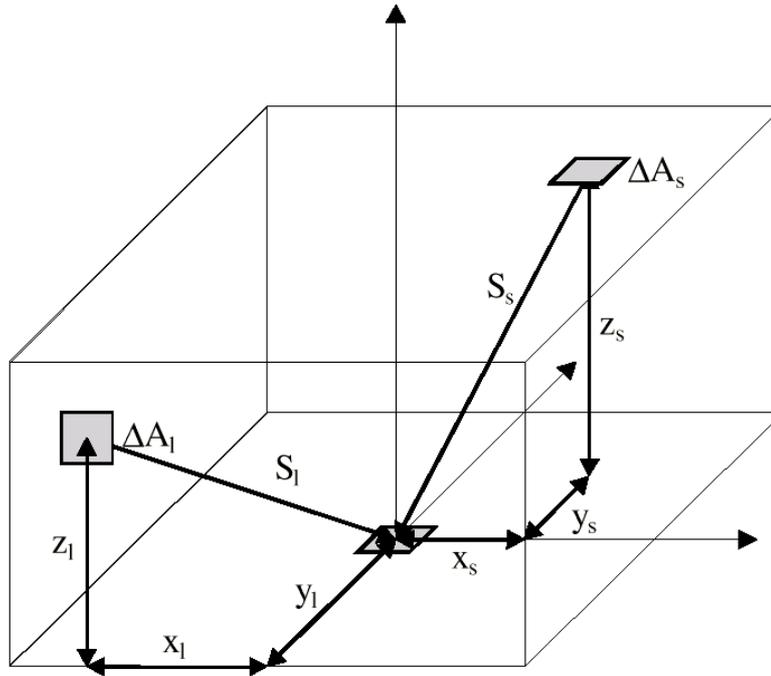


Figura 3.19– Pixels das faces laterais e superior

Devido a simetria, somente um quarto da face superior e um oitavo das faces laterais necessita ser calculado e armazenado. Para estes *pixels* temos

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ e} \quad (3.30)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{z}{S} \quad (3.31)$$

Para a face superior, com z constante, temos

$$\cos \theta_2 = \frac{z_s}{S_s}, \text{ e} \quad (3.32)$$

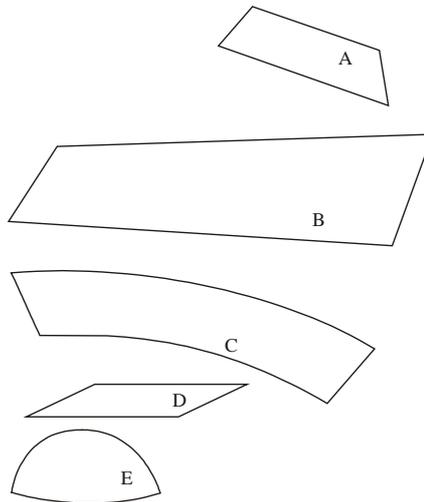
$$\Delta F_s = \frac{z_s^2}{\pi S_s^4} \Delta A_s = \frac{z_s^2}{\pi(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)^2} \Delta A_s \quad (3.33)$$

Analogamente, na face lateral

$$\cos \theta_2 = \frac{y_l}{S_l}, \text{ e} \quad (3.34)$$

$$\Delta F_s = \frac{y_l z_l}{\pi S_l^4} \Delta A_l = \frac{y_l z_l}{\pi(x_l^2 + y_l^2 + z_l^2)^2} \Delta A_l \quad (3.35)$$

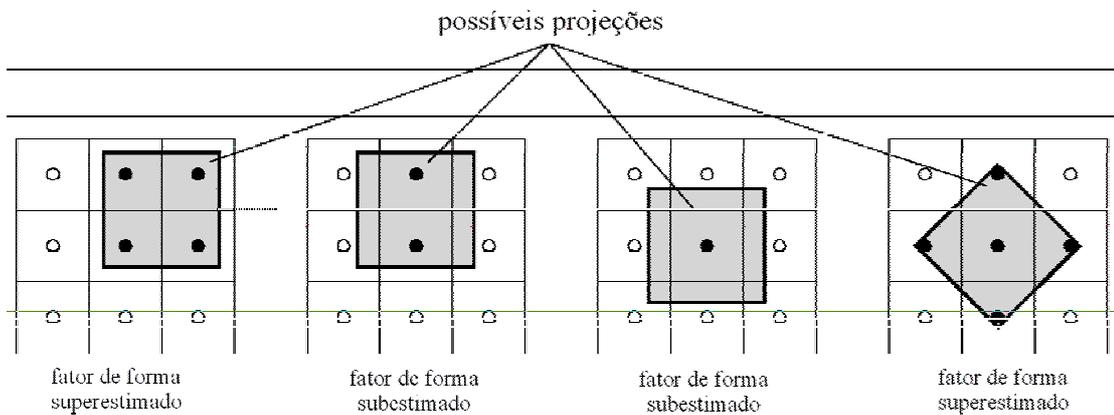
Da definição do fator de forma sabemos também que se duas superfícies distintas dispostas aleatoriamente no espaço, quando projetadas com relação a um centróide, cobrirem a mesma área de um hemisfério (Fig.3.20), estas possuirão o mesmo ângulo sólido e conseqüentemente, o mesmo fator de forma.



$$F_{d1-2} = \sum_{q \in P_2} \Delta F_q \tag{3.36}$$

onde  $P_2$  é o conjunto de *pixels* cobertos pela projeção de  $A_2$ .

Esta aproximação é baseada em uma simplificação chamada de *hipótese do falseamento* (*aliasing*). Esta simplificação assume que a projeção de uma superfície visível nas faces do hemi-cubo é precisamente avaliada pelas áreas dos *pixels* cobertos em um hemi-cubo de resolução finita. É sabido, entretanto, que alguns problemas sempre surgirão, pois a discretização finita e uniforme das faces do hemi-cubo é incapaz de captar corretamente todos os contornos que podem surgir. Estes erros são conhecidos como *erros de falseamento* e eles podem vir a superestimar ou subestimar os valores do fator de forma, conforme mostrado na Fig.3.21.



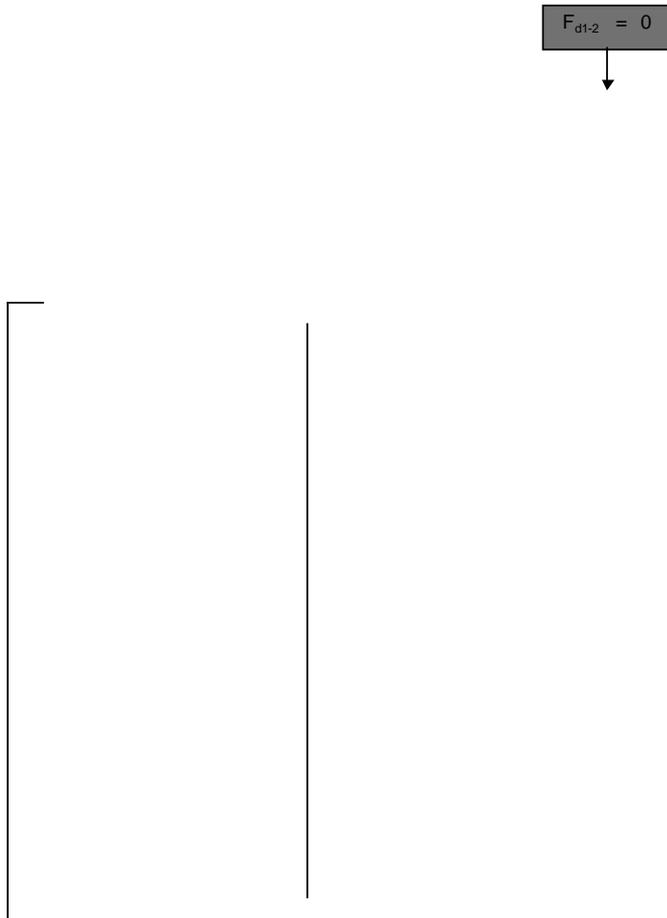
**Figura 3.21– Violação da hipótese do falseamento**

Erros de falseamento são reduzidos com o aumento da resolução do hemi-cubo, resultando também em um aumento do tempo de processamento. Intuitivamente, a escolha da resolução adequada de um hemi-cubo depende do número de superfícies envolvidas [  $O(N)$  ]. Deve-se também levar em consideração o formato geométrico destas superfícies e o fato de que superfícies mais próximas são mais propícias a este tipo de problema do que as mais afastadas, pois em geral, possuem maior área projetada. Resumindo, a escolha do grau de refino da face do hemi-cubo não é uma tarefa fácil, pois constitui um compromisso entre acurácia e tempo de processamento.

É importante salientar que neste método temos a necessidade de se efetuar o processamento de corte (*clipping*) nas faces do cubo, quando a região das superfícies

projetadas abranjam parcialmente sua área, conforme Fig.3.22. Vários algoritmos como o Sutherland-Hodgman descrito em (Foley *et al.*, 1990) podem ser utilizados para este fim.

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,840 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)



**Figura 3.23**– Algoritmo do método Hemi-Cube

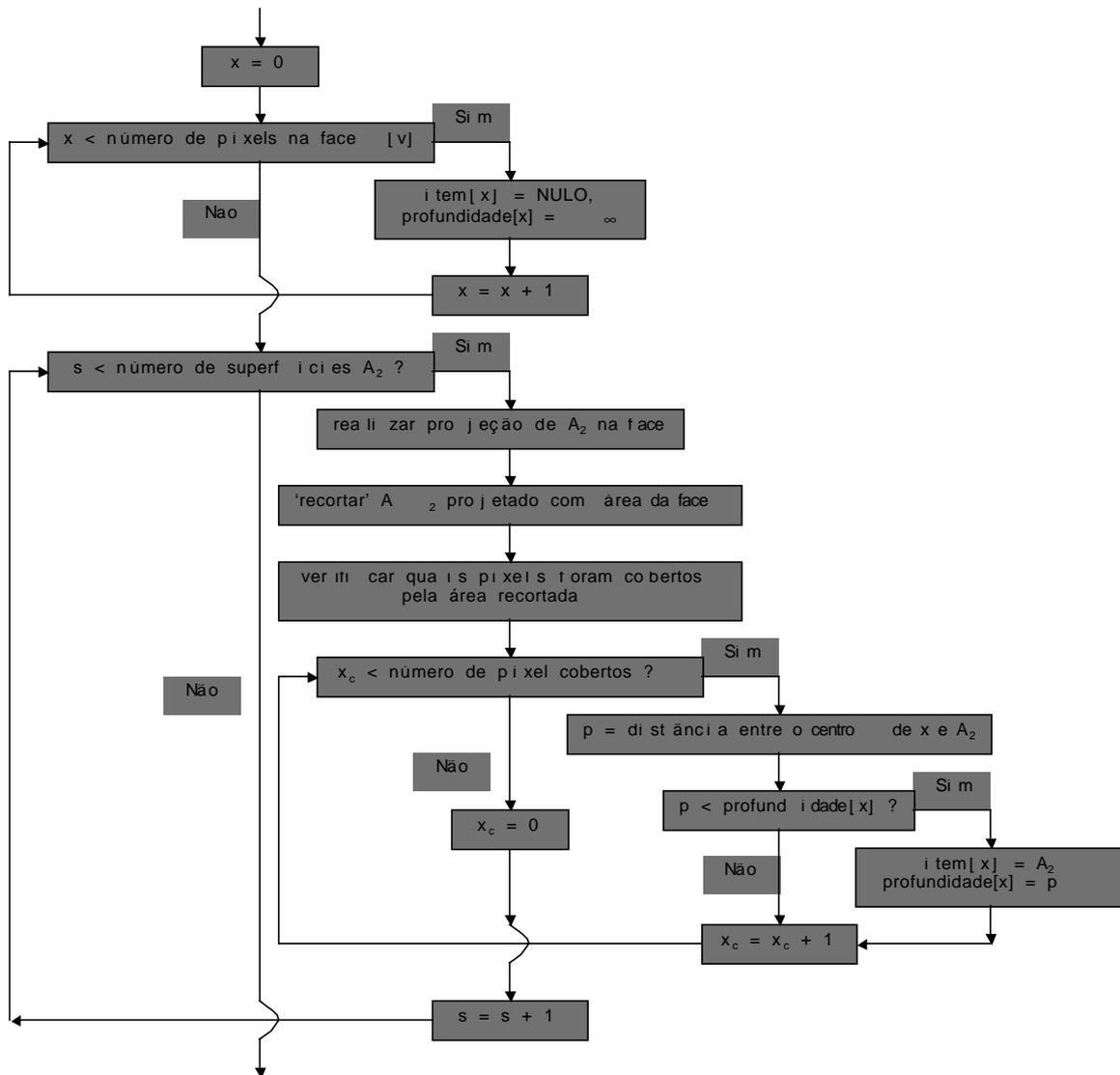


Figura 3.24– Algoritmo do método Hemi-Cube (cont.)

Em virtude da filosofia inerente deste algoritmo, o mesmo não necessita realizar processos de checagem (como os que serão descritos na seção 3.4.5) utilizados para a seleção de superfícies obstrutoras. O fato de o próprio método do hemi-cube ser responsável por esta tarefa faz com que este tenha boa performance computacional.

Atualmente, este método está tirando proveito da capacidade computacional das poderosas *workstations* presentes no mercado. Estas rotinas para projeção, *clipping* e verificação de interferências já estão otimizados e se encontram presentes e implementados em bibliotecas em nível do “*hardware*” da máquina, sendo responsabilidade do usuário somente acessá-las e utilizá-las. Um exemplo da aplicação destas novas técnicas é mostrada

por Rushmeier *et al.* (1990), onde uma redução drástica no tempo de processamento é atingida.

Como foi mostrado, o método Hemi-Cube calcula fator de forma  $F_{d1-2}$

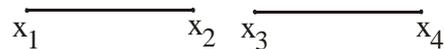
onde  $C_l$  é o contorno da superfície  $A_1$  e  $\theta_{p,q}$  é ângulo entre os contornos  $p$  e  $q$ . As variáveis  $S, T, U, \alpha, \beta$  e  $\gamma$  são funções de  $l$ , que é a posição ao longo do contorno  $p$  onde está sendo avaliada a integral.

Por simplificação, as áreas  $A_1$  e  $A_2$  são apresentadas possuindo 4 lados, mas a Eq.(3.37) pode ser estendida para dois polígonos quaisquer de  $n$  e  $m$  lados, respectivamente.

O método numérico utilizando a expressão de Mitalas e Stephenson consiste na avaliação numérica da integral da Eq.(3.37), obtida realizando-se a divisão do contorno  $p$  em um número discreto de segmentos. De acordo com Walton (1987), a maior precisão é atingida avaliando a integral ao longo da fronteira da superfície que possuir menores contornos.

O presente estudo utiliza ainda mais duas sugestões descritas por Walton (1987). A primeira consiste em utilizar a metodologia da Quadratura Gaussiana (Abramowitz e Stegun, 1964) para a avaliação numérica da integral, que consiste na divisão do contorno  $p$  em segmentos de tamanhos diferentes, resultando em uma maior precisão na avaliação da integral. O tamanho destes segmentos e a posição onde a integral será avaliada é escolhida pelo método, em virtude do número de segmentos escolhidos para a discretização do contorno em questão. Walton (1987) relata em seu trabalho significantes melhorias na precisão com a utilização deste procedimento.

A segunda sugestão aqui implementada consiste na verificação da existência de contornos adjacentes e na avaliação analítica desta integral, quando isto acontecer. Se dois contornos forem adjacentes, como no problema de duas placas perpendiculares mostradas na Fig.3.4, avaliando-se numericamente a integral da maneira com que é apresentada na Eq.(3.37) resultará em erros grosseiros. Estes problemas podem ser resolvidos avaliando a expressão da Eq.(3.37) analiticamente. A dedução abaixo, ilustra como obter a expressão utilizada para a avaliação analítica da integral. Por simplicidade é assumido um sistema coordenado unidimensional.



**Figura 3.26– Dois Segmentos em coordenadas unidimensionais**

Conforme a Fig.3.26, temos

$$\begin{aligned}
 a &= x_2 - x_1 & b &= x_4 - x_3 & c &= x_3 - x_1 \\
 d &= x_4 - x_1 & e &= x_3 - x_2 & f &= x_4 - x_2
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

$$\left[ \frac{(d^2 \ln d^2 - d^2 + c^2 - c^2 \ln c^2 + e^2 \ln e^2 - e^2 + f^2 - f^2 \ln f^2)}{4 - ab} \right] \quad (3.39)$$

Sabemos também que se dois segmentos forem colineares  $\cos \theta_{p,q} = -1$  e  $U = 0$ . Assim, observando a Fig.3.26 quando o início e o fim dos dois contornos são coincidentes, a expressão da Eq.(3.39) resulta em

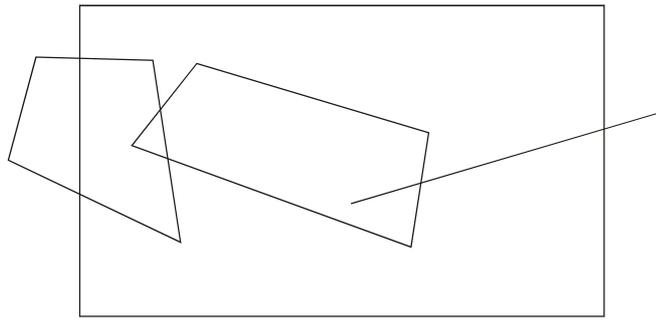
$$\left[ \frac{(R^2 \ln R^2 - R^2)}{2 - R^2} \right] \quad (3.40)$$

Walton (1987) também descreve que o tempo de processamento necessário para utilizar a expressão analítica não é muito diferente do que aquele comparado com a avaliação numérica, mesmo tendo que se verificar a existência de contornos adjacentes. Isto porque o tempo gasto nesta verificação é compensado pela rápida avaliação analítica da integral.

Uma vantagem deste método é que, à medida que as distâncias entre as superfícies envolvidas vai aumentando, uma divisão cada vez menor de elementos é necessária para mantermos a mesma precisão do resultado. Portanto, podemos controlar a velocidade de processamento do algoritmo realizando um número de divisões baseadas em uma precisão constante, previamente estipulada em função das distâncias.

Em virtude da grande dificuldade, e conseqüentemente do tempo computacional envolvido para a determinação dos contornos de inúmeras superfícies obstrutoras, o método aqui implementado, da mesma maneira que o método da Dupla Discretização apresentado na seção anterior, utiliza as rotinas que serão descritas na seção 3.4.5, visando a diminuição da lista de superfícies que podem estar causando obstruções.

Uma vez determinadas as superfícies  $A_1$  e  $A_2$  e uma lista de superfícies obstrutoras, o fator de forma utilizando integral de contorno e considerando obstruções, é verificado utilizando técnicas de projeção. Isto é feito somando o fator de forma da área da superfície de interesse sem obstrução e subtraindo da soma do fator de forma da área de sombra das superfícies que obstruem o campo de visão. Este procedimento será mais bem detalhado a seguir.



entre as superfícies.

Em seguida, a superfície  $A_n$  é discretizada em  $N$  sub-elementos. Para cada ponto de vista de um sub-elemento  $n$ , uma projeção no plano  $z' =$

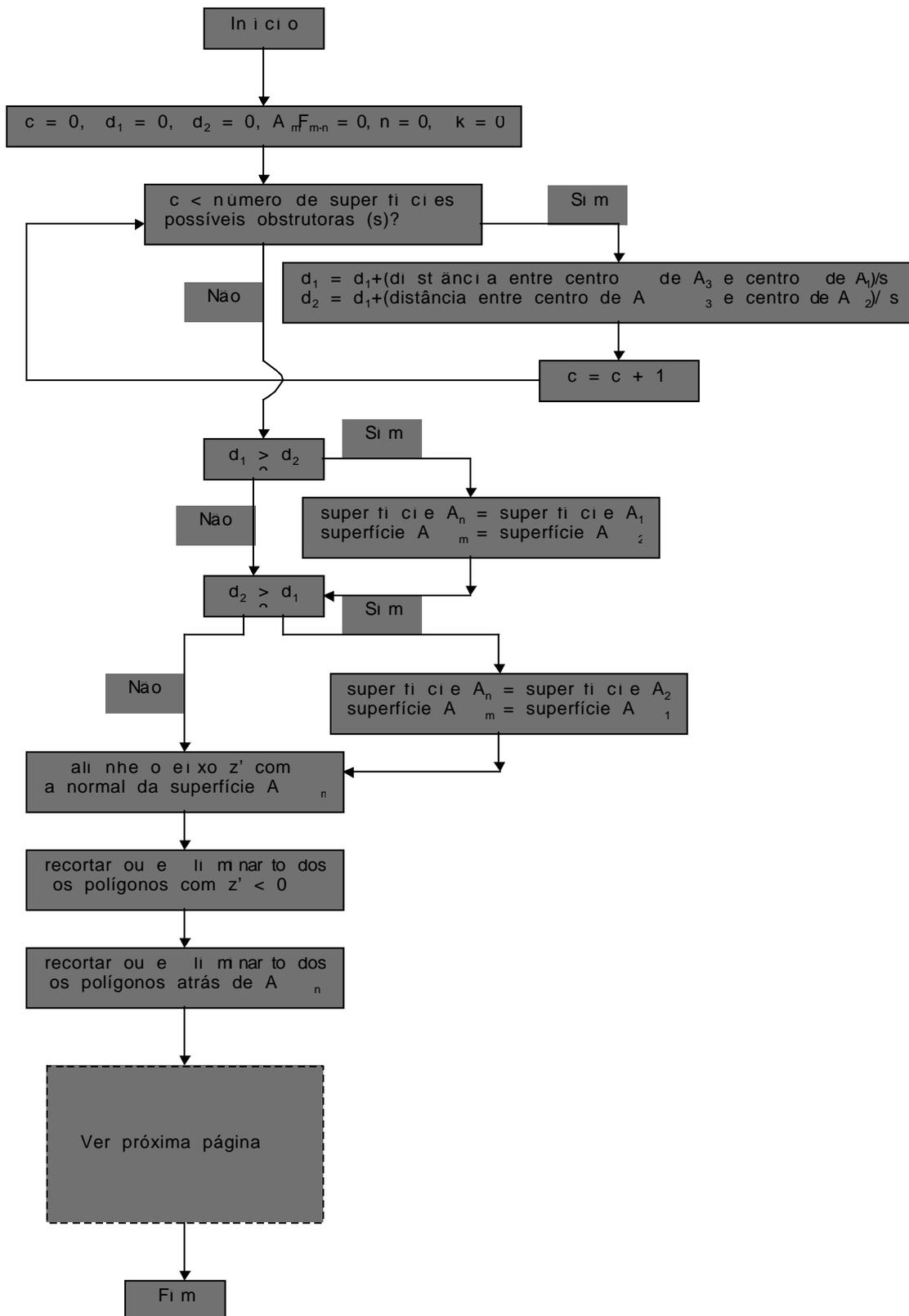


Figura 3.29– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson

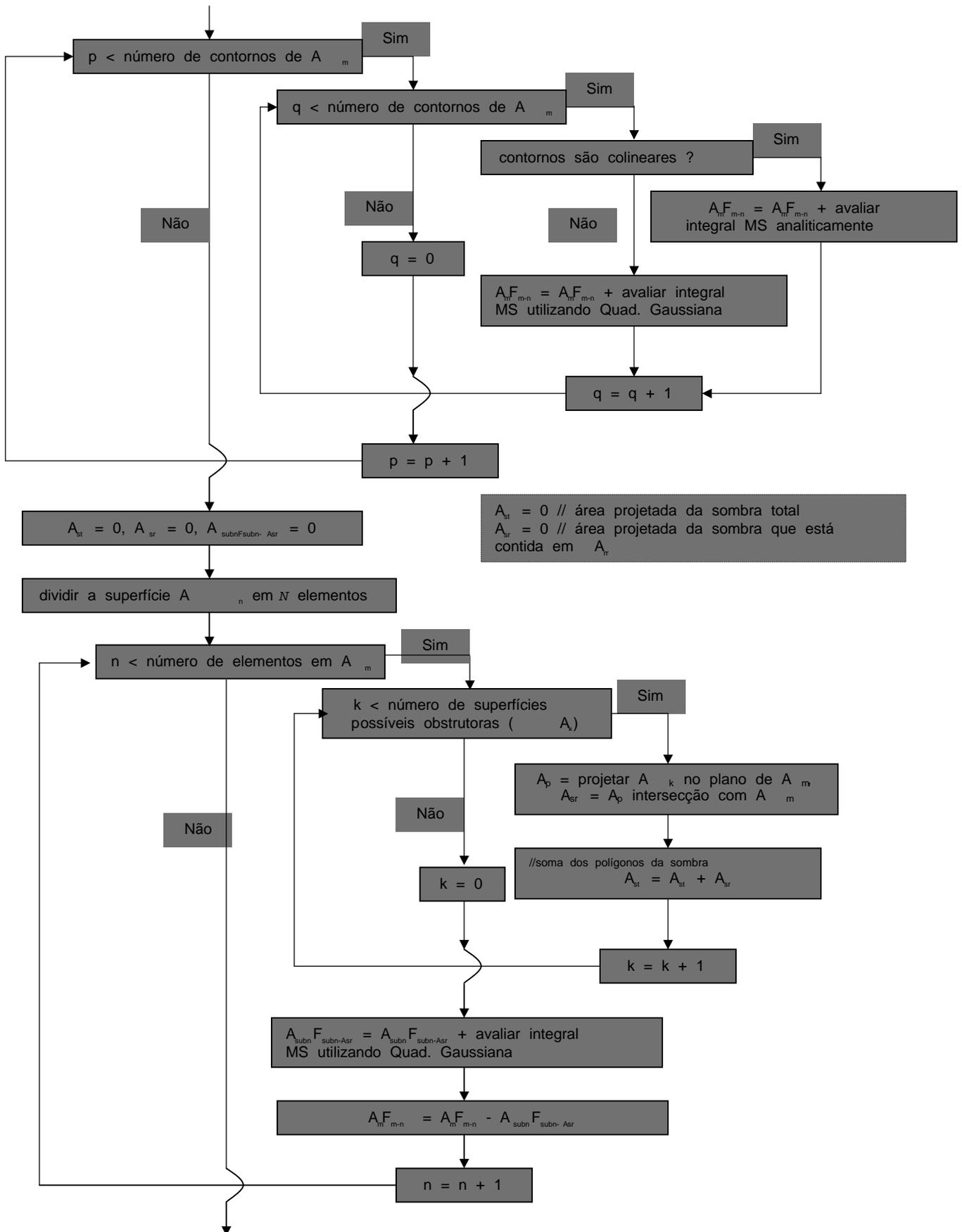


Figura 3.30– Algoritmo do método de Mitalas e Stephenson (cont.)

Uma característica importante desta metodologia está no fato de que ela necessita que somente seja discretizada uma das superfícies em questão, resultando em menos processamento. Por outro lado, por ser bastante complexa com relação as checagens e as operações de recorte, união, interseções e projeções de polígonos, esta metodologia é propícia ao surgimento de erros relacionados com imprecisão das operações computacionais, que em geral utilizam valores não-inteiros truncados para armazenamento das variáveis.

### 3.4.5 Verificação de Obstruções

Como já dito anteriormente, métodos numéricos como a Dupla Discretização são em geral mais custosos computacionalmente. Este fato, não é somente devido a natureza intrínseca de seus métodos, mas principalmente ao tempo gasto para a realização de inúmeras checagens por possíveis superfícies obstrutoras. O tempo de processamento necessário para esta tarefa é da ordem de  $N^3$ , aumentando drasticamente com o aumento do número de superfícies em questão.

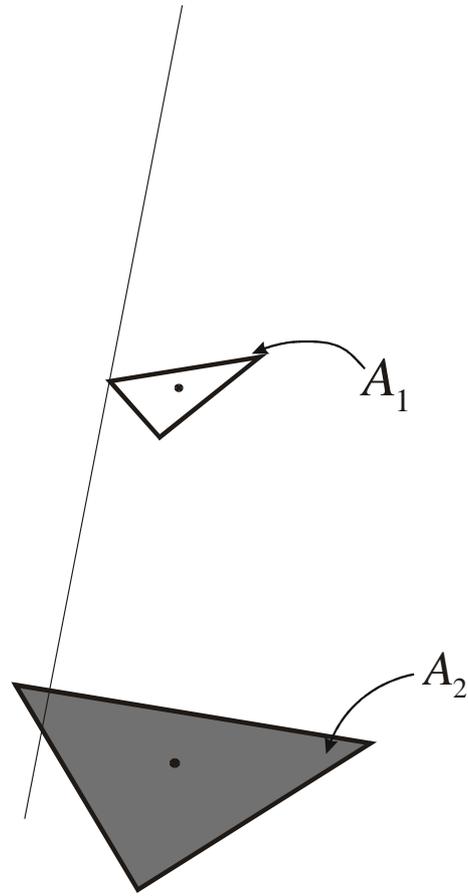
Visando reduzir este número de verificações, os algoritmos utilizados neste estudo, com exceção do *Hemi-Cube*, utilizam um conjunto de testes que objetivam reduzir o número de superfícies a serem consideradas como possíveis obstrutoras. A metodologia aqui demonstrada é baseada no trabalho de Walton (1987) e será brevemente descrita.

Dado um par de superfícies entre as quais

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336

iniciais do algoritmo, pois diferentemente dos outros, ele não necessita que se saiba a priori entre quais superfícies deseja-se calcular o fator de forma.

2. teste da **auto-obstrução**. Dadas duas superfícies  $A_1$  e  $A$



atrás de  $A_1$ ; c)  $A_1$  e  $A_2$  estão ambos na frente de  $A_3$  e d)  $A_1$  e  $A_2$  estão ambos atrás de  $A_3$ .

5. testes de **projeção**. Este último teste é um pouco mais elaborado computacionalmente. Consiste na criação de um novo eixo ( $z'$ ) alinhado com o vetor que une os centros das superfícies  $A_1$  e  $A_2$ . Em virtude da razão entre os tamanhos dos raios das circunferências que circunscrevem estas áreas, uma projeção reta ou cônica (similar ao teste do cone) é realizada envolvendo estas duas superfícies. De posse das áreas destas projeções, é então construído o menor polígono convexo que contém as duas áreas. Este polígono é comumente chamado de *convex hull* pelos especialistas em computação gráfica e sua construção é também realizada utilizando os conceitos de coordenadas homogêneas (Foley *et al.* 1990). Após isto, cada superfície obstrutora é projetada neste plano, sendo eliminada da lista caso nenhum ponto da projeção de seus vértices esteja dentro deste polígono.

## 4 Troca Radiativa entre Superfícies Difusas Cinzentas

Neste capítulo serão apresentadas duas metodologias comumente utilizadas para o cômputo de trocas radiativas entre superfícies difusas cinzentas, o método de Gebhart e o tradicional método da Radiosidade. Estas abordagens são amplamente empregadas nos

Como será mostrado, estas metodologias baseiam-se no mesmo conjunto de hipóteses fundamentais e portanto fornecem os mesmos resultados.

### 4.1 Hipóteses Simplificativas

Como descrito por Sparrow (1963), todo problema envolvendo trocas radiativas começa com o conceito de cavidade. Este conceito é muito útil para desenvolvermos as relações de troca de calor entre superfícies  $A_1$  da Fig.4.1 onde as superfícies estão trocando calor por radiação. Para determinarmos a quantidade de calor incidente em  $A_1$  é necessário levarmos em consideração todas as parcelas provenientes das demais superfícies do ambiente. Isto fica facilitado se construirmos uma cavidade com superfícies em questão. O termo fictício é introduzido, pois algumas fronteiras desta cavidade a aberta em um ambiente pode ser entendida igual a toda a radiação que passa através dela.

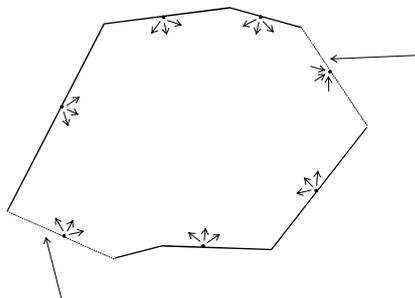
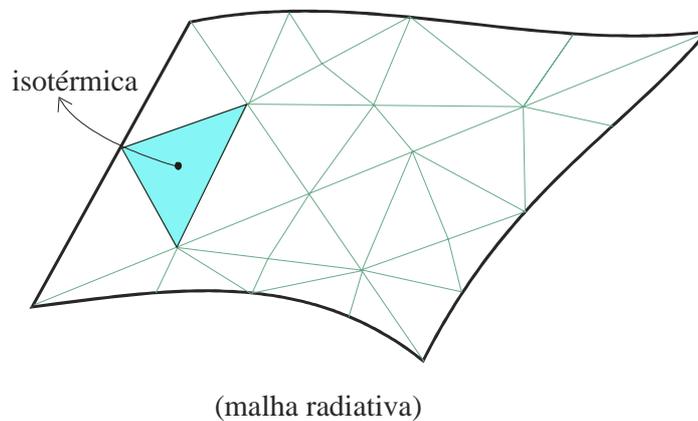


Figura 4.1– Cavidade com superfícies imaginárias

De posse do conceito de cavidade, os balanços radiativos para cada superfície podem ser realizados e todas as parcelas levadas em consideração como se fossem simples superfícies interagindo entre si através das multi-reflexões.

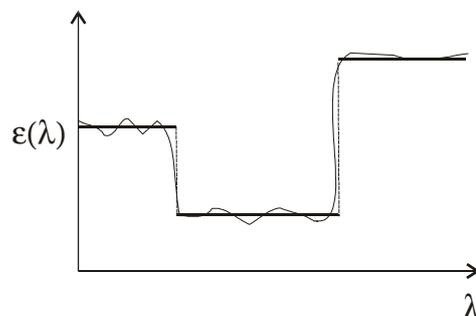
Não somente os métodos que serão apresentados a seguir, como também o método de Hottel (1954) e o método de Oppenheim(1956), são baseados em um determinado conjunto de hipóteses, cinco no total, que formulam a base para o entendimento e posterior cômputo da troca radiativa entre superfícies.

A primeira hipótese é de que as superfícies em questão são isotérmicas. Na prática o que acontece é que durante a aplicação destes métodos, a superfície é discretizada em superfícies menores, processo conhecido como geração da malha radiativa, e as superfícies contidas nesta malha são assumidas tendo somente um valor de temperatura, como ilustrado pela Fig.4.2.



**Figura 4.2– Discretização com superfícies isotérmicas**

A segunda hipótese considera as superfícies cinzentas. Caso as superfícies não apresentem tal comportamento em todo o espectro em questão, o intervalo de interesse pode ser dividido em bandas menores e as superfícies serem tratadas como cinzentas nestes intervalos, tornando válidas as aplicações destes métodos (Fig.4.3).



**Figura 4.3– Emissividade espectral de superfície cinzenta por faixas**

Ressalta-se que durante este trabalho estamos levando em consideração somente a faixa de comprimento de onda relativa ao espectro infra-vermelho, e todas as superfícies envolvidas serão consideradas cinzentas nesta faixa. Se, por exemplo, estivéssemos também interessados no cômputo das trocas de calor no espectro solar, teríamos que considerar se as propriedades em questão (emissividade, absorvidade e refletividade) no espectro da luz visível possuem os mesmos valores e comportamentos que no espectro infra-vermelho. Se isto acontecer, podemos utilizar as mesmas simplificações e resolver o problema conjuntamente. Caso esta simplificação não se aplique, as trocas radiativas no espectro visível devem ser computadas separadamente do espectro infra-vermelho e os valores dos fluxos radiativos devem ser adicionados no final.

A terceira simplificação é pertinente à energia que é refletida pela superfície. Esta simplificação assume que a superfície reflete energia difusamente, isto é, a reflexão acontece de maneira uniforme em todos os ângulos. Analogamente, a quarta hipótese assume que emissão de energia pela superfície não possui também direção preferencial, ou seja, é difusa. O conjunto destas duas hipóteses, como já foi apresentado, define o conceito de superfícies difusas e faz com que as trocas radiativas não tenham histórico, pois um observador quando para uma superfície qualquer não terá condições de distinguir qual parcela de energia é refletida e emitida, sendo todas as parcelas tratadas juntas como a energia total (refletida + emitida) que deixa a superfície, conhecida como radiosidade.

A quinta e última hipótese é talvez a menos difundida, pois aparece indiretamente nas equações e nos cálculos efetuados. Esta simplificação está relacionada com a utilização do valor constante do fator de forma de uma superfície finita para outra superfície finita. Quando estamos utilizando este valor no cálculo da energia trocada entre superfícies, estamos implicitamente assumindo que a energia total que deixa ou incide em uma superfície é uniformemente distribuída ao longo dela. Em problemas reais, mesmo com temperaturas e emissividades uniformes é pouco provável que teremos também reflexões uniformes, desta forma, esta hipótese amplamente assumida não é em geral satisfeita.

As hipóteses acima apresentadas fazem com que o complexo fenômeno da radiação seja facilmente tratado computacionalmente.

## 4.2 Trocas Radiativas Utilizando o Conceito do Fator de Forma

À seguir, uma extensão do segundo e terceiro capítulo será fornecida somente com o intuito de introduzir as equações de trocas radiativas entre superfícies.

Manipulando as Eqs.(3.3) e (3.4) do capítulo anterior, podemos inicialmente expressar a troca radiativa entre superfícies negras em função do seu fator de forma e de suas temperaturas, obtendo a seguinte equação para a troca radiativa entre dois elementos infinitesimais de área

$$dq_{d_1-d_2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{d_1-d_2}dA_1 = \sigma(T_1^4 - T_2^4)F_{d_2-d_1}dA_2 \quad (4.1)$$

Analogamente, para um elemento infinitesimal d-245..7( 0.00na)4.7(te)4.7(a)-245.3ea u(a)-245.3(su

envolvendo as grandezas acima. Existem várias maneiras de realizarmos este balanço, sendo que estas abordagens diferem na grandeza levada em consideração. A título de exemplo

superfície  $A_1$ . É fácil de ver que esta energia é advinda das parcelas de energia que saem das outras superfícies da cavidade. Temos, por exemplo, que a energia que sai da superfície  $A_2$  e atinge diretamente a superfície  $A_1$  é igual a  $\frac{A_1}{A_2} \epsilon_2 - \epsilon_1$

obtido uma vez que a sua radiosidade é conhecida.

Deve-se salientar que o sistema linear não homogêneo, apresentado pela Eq.(4.11), possui a característica de ter dominância diagonal, sendo fácil de ser resolvido por qualquer processo iterativo. Isto pode ser comprovado analisando os valores dos elementos desta matriz. Sabemos que os valores do fator de forma e refletividade para os elementos fora da diagonal principal sempre estão entre 0 e 1, sendo que sua multiplicação em geral fornece valores pequenos (menores do que 1). Como estamos trabalhando com superfícies discretizadas em elementos convexos, os valores de  $F_{1-1}$ ,  $F_{2-2}$ , ...  $F_{N-N}$  são sempre nulos, resultando em elementos unitários na diagonal principal.

#### 4.4 Método de Gebhart

O ponto de partida da metodologia proposta por Gebhart (1961) é a expressão que fornece a troca de calor líquida de uma superfície  $A_1$  com todas as outras do sistema.

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,840 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

$A_i \varepsilon_i \sigma T_i^4$ . A porção desta energia que atinge A

$T_i^4 F_{i-n} \rho_n$ . Sob a

$$\begin{matrix}
 & G_{1-1} & G_{1-1} & \dots & G_{1-1} \\
 & G_{2-1} & G_{1-1} & \dots & G_{1-1} \\
 - & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 = & G_{-1} & G_{1-1} & \dots & G_{1-1}
 \end{matrix}$$

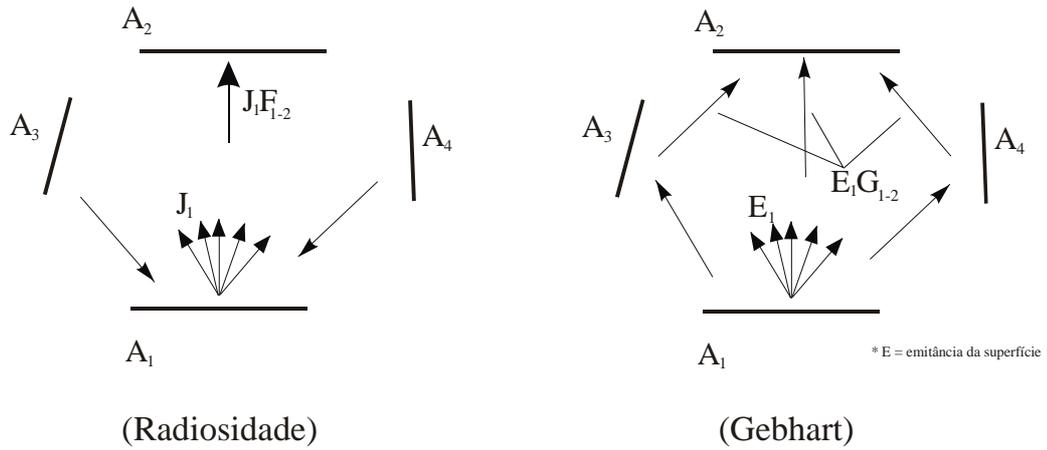
De posse das Eq.(4.23) e (4.25), podemos retornar a (4.15) que fornece a troca líquida de calor em uma superfície e reordená-la da seguinte forma

não dependem de valores de temperatura. Se agora considerássemos uma segunda cavidade onde a superfície  $A_2$ , possísse uma temperatura  $T_2$  e todas as outras cavidades possúissem temperatura zero, obteríamos os mesmo conjunto de equações, só que agora as incógnitas seriam  $\gamma^{(2)}$ . Este procedimento poderia ser repetido para inúmeras outras superfícies e todas resultariam em um conjunto de equações, aonde os seus coeficientes seriam independentes de valores de temperatura.

Consideremos agora a situação aonde a cavidade pode ser substituída por um conjunto de superfícies onde cada uma possui uma temperatura  $T_i$ . Este problema pode ser analisado como uma superposição dos diversos problemas acima onde somente uma temperatura de

$$q = \frac{\sigma}{\epsilon} (T_s^4 - T_a^4)$$

$$q_k = \frac{k}{k} \sum_i (T_i^4 - T_k^4) A_k$$



**Figura 4.5– Grandezas envolvidas no método de Gebhart e no método das Radiosidades**

Entretanto, quando estamos interessados no acoplamento da radiação com outros modos de transferência calor, como condução por exemplo, dependendo de como será realizado o procedimento de solução do problema completo, a eficiência computacional poderá ser diferente. Este assunto será o enfoque do próximo capítulo.

## **5 Solução Numérica do Problema Radiativo-Conduutivo**

O objetivo deste capítulo é apresentar os detalhes numéricos necessários para a solução do problema acoplado de transferência de calor por condução e radiação. Os métodos para resolver o problema das trocas radiativas entre superfícies difusas e cinzentas foram apresentados no capítulo anterior. Com relação a modelagem do problema condutivo, foi assumida a simplificação de que as superfícies são formadas por um conjunto de cascas finas. Esta simplificação faz com que o problema da difusão de calor seja tratado como um problema bi-dimensional em geometrias arbitrárias.

### **5.1 Discretização Geométrica**

O presente trabalho divide as superfícies em questão em um número finito de triângulos, refinados e posicionados de acordo com um critério definido pelo usuário. Nestes triângulos é calculado o fator de forma entre as superfícies, quando utilizamos o método da Radiosidade ou o método de Gebhart. É nesta malha que calculamos os acoplamentos radiativos entre as superfícies em questão. Assim, tanto para o fator de forma e conseqüentemente para os dois métodos de cômputo das trocas radiativas (Gebhart e Radiosidade) utilizamos a mesma discretização, que a partir de agora será chamada de malha radiativa.

Em virtude do cálculo do fator de forma ser uma das partes mais demoradas do processo e, em geral, a radiação não fornecer gradientes de temperatura muito grandes nas superfícies, esta malha radiativa quase sempre não apresenta um número muito grande de elementos. Por outro lado, como no fenômeno da condução podemos ter gerações de calor e condições de contorno variáveis que podem criar grandes gradientes locais de temperatura, para a grande maioria dos problemas necessitamos de uma maior resolução para a malha condutiva do que radiativa. Em busca de eficiência, a metodologia desenvolvida permite que utilizemos uma discretização diferente da radiativa para o problema difusivo. Esta discretização condutiva, utiliza a malha radiativa como base e simplesmente é resultado da subdivisão dos triângulos

que compõem a malha radiativa de acordo com um critério definido pelo usuário. Esta subdivisão é realizada de maneira simples e consiste na união dos pontos médios de cada lado do triângulo, resultando em quatro novos t

térmico de satélites, estaremos representando a vizinhança como uma superfície negra a 4 K.

$$\nabla \cdot \left( \vec{J} \right) - \dot{q} = 0 \quad (5.4)$$

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,840 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:58 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

vértices dos triângulos, permitir o cálculo de  $T$  e de suas derivadas em qualquer posição dentro do elemento triangular. Especialmente os valores das derivadas de  $T$  serão necessários nos pontos  $t$  e  $r$ , conforme mostra a Fig.5.3.

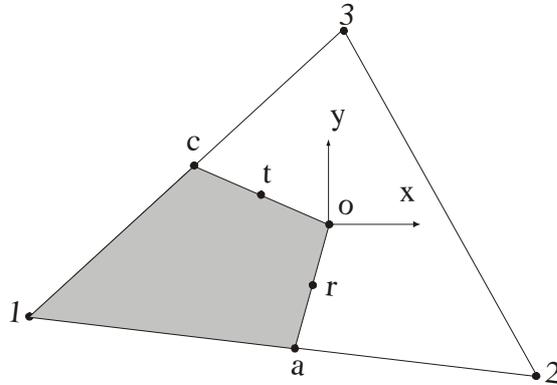


Figura 5.3 – Elemento triangular

Por estarem presentes apenas efeitos difusivos, a função de interpolação utilizada pode ser linear, dada por

$$T = Ax + By + C \tag{5.6}$$

Com os valores de  $T$ ,  $T$  e  $T_3$  e os valores das coordenadas  $(x, y)$  nos pontos 1, 2 e 3, encontramos as constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  (Maliska, 1995), como

$$A = \frac{[(y_2 \check{S} y_3)T_1 + (y_3 \check{S} y_1)T_2 + (y_1 \check{S} y_2)T_3]}{D} \tag{5.7}$$

$$B = \frac{[(x_3 \check{S} x_2)T_1 + (x_1 \check{S} x_3)T_2 + (x_2 \check{S} x_1)T_3]}{D} \tag{5.8}$$

$$C = \frac{[(x_2 y_3 \check{S} x_3 y_2)T_1 + (x_3 y_1 \check{S} x_1 y_3)T_2 + (x_1 y_2 \check{S} x_2 y_1)T_3]}{D} \tag{5.9}$$

com  $D$  dado por

$$D = (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 \check{S} x_2 y_1 \check{S} x_3 y_2 \check{S} x_1 y_3) \tag{5.10}$$

Lembrando que o vetor fluxo é dado por

$$+ \quad = \left( \check{S} \quad \text{---} \right) + \left( \check{S} \quad \text{---} \right)$$

$$\int_a^b J_n ds + \int_b^c J_n ds \check{S} \int_{a_0c}^{\epsilon} q dV = C_1 T_1 + C_2 T_2 + C_3 T_3 + B_1 \quad (5.15)$$

onde os coeficientes são dados por

$$C_1 = \frac{k}{D} [(y_a \check{S}_{y_c})(y_2 \check{S}_{y_3}) + (x_a \check{S}_{x_c})(x_2 \check{S}_{x_3})] \quad (5.16)$$

$$-n( \quad ) ( \quad ) ( \quad ) ( \quad )$$

principais deste texto.

### 5.4.1 Acoplamento com o Método da Radiosidade

Uma possibilidade para solução de problemas radiativos e condutivos simultâneos constitui em um algoritmo que utilize o método CVFEM descrito na seção anterior e o método da radiosidade para o cômputo da troca radiativa entre as superfícies. Em virtude da não linearidade existente, um processo iterativo entre as duas etapas é necessário para a obtenção da convergência. A seguir, a implementação que foi utilizada neste estudo é descrita e comentada.

Considere um conjunto de superfícies discretizadas aonde possuímos uma malha radiativa e uma malha condutiva, conforme o procedimento descrito na seção 5.1. Consideremos também um problema aonde todas as propriedades térmicas e ópticas das superfícies estão definidas, a matriz do fator de forma já calculada e desejamos conhecer o campo de temperaturas em regime permanente. Assim, a seguinte metodologia de solução é então empregada:

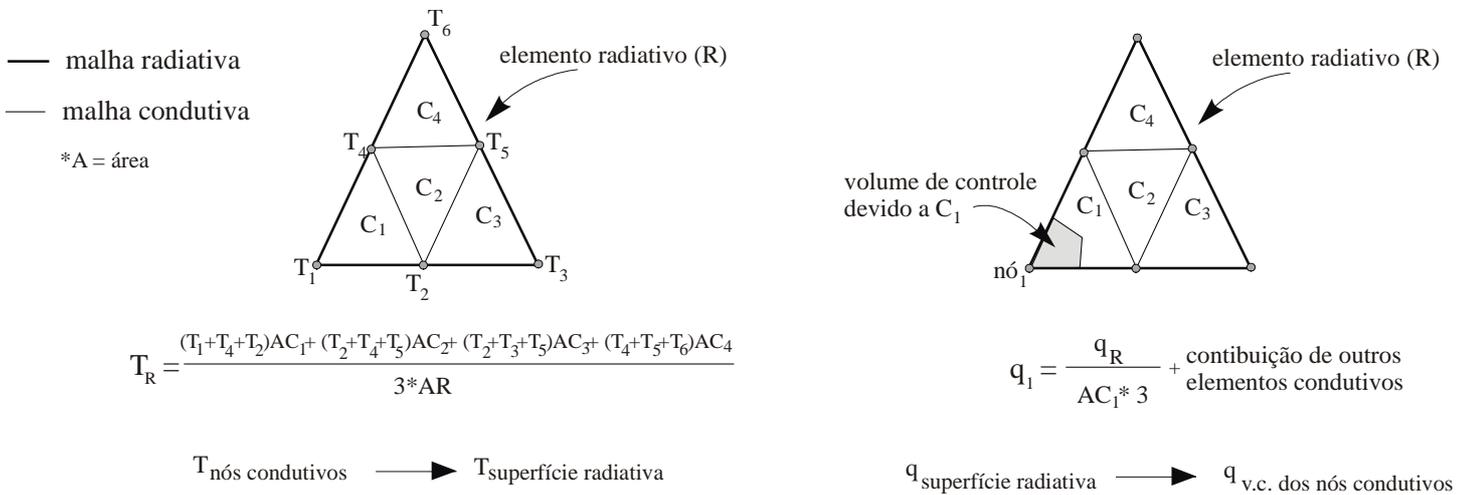
1. Como todo procedimento iterativo, o primeiro passo é fornecer um campo de temperaturas aos nós condutivos como um estimativa inicial ao processo.
2. A seguir, para cada elemento radiativo, uma média envolvendo os nós condutivos no seu interior é realizada para conhecermos os valores de temperatura nas suas faces. Este etapa se encontra ilustrada na Fig.5.5 .
3. Conhecendo o valor desta temperatura, calcula-se a matriz de radiosidades conforme descrito na Seção 4.3 do capítulo anterior utilizando um *solver* iterativo ou um método direto de inversão de matriz.
4. Com a matriz de radiosidades conhecida, facilmente obtemos o fluxo líquido de calor em cada superfície radiativa de acordo com a Eq.(4.13).
5. Transporta-se agora os fluxos radiativos para os volumes de controle dos elementos condutivos, sendo realizada uma divisão ponderada pela área de cada triângulo e posteriormente dividida pela área que cada elemento ocupa no volume de controle mostrado na Fig.5.2, ou seja, um terço da área total do triângulo condutivo. Este etapa também se encontra ilustrada na Fig.5.5 .
6. Resolve-se então a parte difusiva do problema nos volumes de controle condutivos, sendo

que os fluxos radiativos calculados anteriormente são adicionados como termos fonte da Eq.(5.20), como descrito no item 5. Em virtude da não linearidade entre as equações e dos valores altos que este termo pode assumir (oriundos dos fluxos radiativos) uma sub-relaxação aplicada a este termo fonte deve ser utilizada para evitarmos problemas de instabilidade e divergência da solução do problema. A sub-relaxação utilizada neste estudo segue a seguinte expressão, descrita por Maliska (1995).

$$q_i^{k+1} = wq_i^{k+1} + (1 - \check{S}w)q_i^k \tag{5.21}$$

Sendo  $k$ , o nível iterativo e  $w$  um coeficiente de relaxação definido pelo usuário. Analisando a equação anterior, temos que para valores de  $w$  menores do que 1, o termo fonte é sub-relaxado. Isto significa que a cada iteração somente uma parcela do mais recente valor do termo fonte será adicionado ao valor atual, fazendo com que a solução caminhe de maneira mais ‘suave’ para a convergência entre as duas equações.

- De posse deste novo campo de temperaturas nos nós condutivos, retorna-se ao item 2 e o processo é novamente repetido. Isto é realizado até que a variação da temperatura de cada nó se estabilize ou sua variação esteja dentro de um valor previamente definido pelo usuário.



**Figura 5.5 – Transferência de fluxos e temperatura nas malhas condutivas e radiativas**

O método descrito acima possui a característica de resolver os problemas de condução e radiação sucessivos, utilizando um processo iterativo para a obtenção da convergência. A única ligação entre as duas equações consiste na aplicação dos fluxos radiativos calculados

pelo método da radiosidade como termos fonte na equação da condução de calor. Este procedimento possui a vantagem de que a montagem das matrizes de radiosidades e condução

temperatura na quarta potência, ele precisa inicialmente ser linearizado para depois ser resolvido. Para esta tarefa, o presente estudo sugere uma linearização utilizando o método de Newton (Dembo *et al.*, 1982).

No método de Newton, o conjunto das equações não-lineares discretizadas [Eq.(5.22)] que regem o problema, pode ser escrito na forma de “equações resíduos”, dada por

$$F(T) = [f_1(T) \quad f_2(T) \quad \dots \quad f_n(T)]^T = 0 \quad (5.23)$$

onde  $n$  é número de nós da malha condutiva. Aplicando o método de Newton, a cada iteração é resolvido o seguinte sistema linear

$$J^k \quad T^k = \check{S}F(T^k) \quad (5.24)$$

onde,  $J$  é a matriz jacobiana,  $T$  é vetor variação da temperatura,  $F(T)$  é o resíduo da Eq.(5.22) e  $k$  refere-se a iteração newtoniana. Cada elemento da matriz jacobiana é representado pela derivada da Eq.(5.22) em relação à temperatura, dada por

$$J_{ij} = \frac{f_i}{T_j} \quad (5.25)$$

O sistema não-linear converge quando

$$\|F(T^k)\|_2 < tolF \|F(T^o)\|_2, e \quad (5.26)$$

$$\|T^k\|_2 < tolDelta \|T^{k+1}\|_2 \quad (5.27)$$

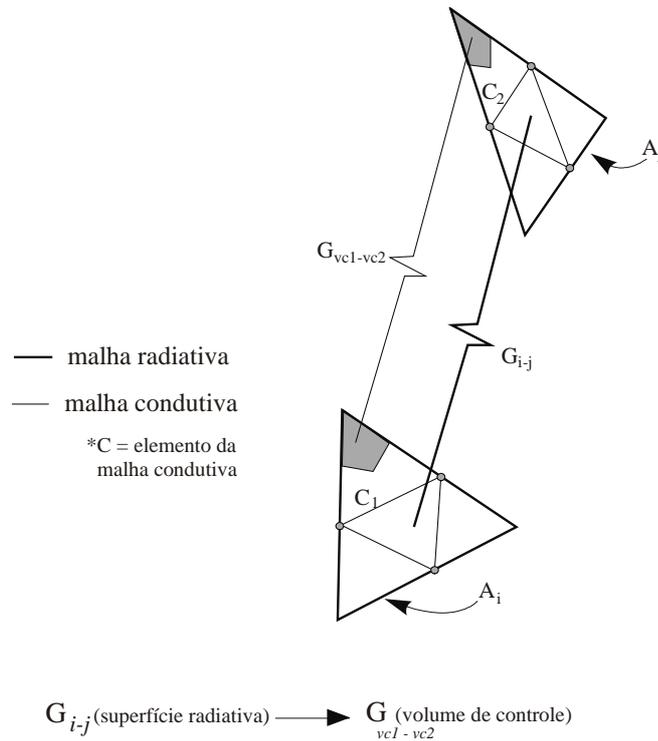
onde  $tolF$  e  $tolDelta$  são tolerâncias definidas pelo usuário.

Para a inversão da matriz jacobiana podemos utilizar um solver iterativo ou um solver direto. Ao utilizarmos um processo iterativo para a solução do sistema linear o método de Newton resultante é chamado na literatura de Método de Newton Inexato ou Método de Newton – *Krylov* (Dembo *et al.*, 1982).

Uma vez convergido este conjunto de equações possuiremos o campo de temperaturas nos nós condutivos.

De acordo com a Eq.(5.22), temos que transportar os valores dos acoplamentos radiativos que foram calculados entre as superfícies da malha radiativa para os volumes de controle centrados ao redor do nó  $i$ . Isto é realizado com um pouco de algebrismo e utilizando

as relações para  $G_{i-j}$  fornecidas no Capítulo 4. A figura a seguir ilustra esta operação.



**Figura 5.6 – Transferência dos acoplamentos radiativos das superfícies para os volumes de controle**

A expressão para obtermos o acoplamento radiativo entre dois volumes de controle utilizando valores dos acoplamentos das superfícies radiativas é obtido em dois passos consecutivos:

- € O primeiro passo consiste em obtermos os valores dos acoplamentos radiativos entre os triângulos da malha condutiva das quais estes volumes de controle fazem parte. Sabendo que a sub-divisão que gera a malha condutiva sempre fornece triângulos do mesmo tamanho, utilizando relações de reciprocidade, e assumindo a hipótese simplificativa de que  $G_{i-j}$  é constante ao longo das superfícies  $A_i$  e  $A_j$ , podemos facilmente demonstrar que:

$$G_{vc1-vc2} = \frac{G_{i-j} \check{s}_j}{n_j} \tag{5.28}$$

onde  $n_j$  é o numero de sub-elementos condutivos contidos na superfície radiativa  $A_j$ .

- € O segundo passo consiste em transferir os acoplamentos já calculados para os triângulos condutivos para os volumes de controle ao redor de cada nó. Este processo é concluído pela simples divisão da expressão anterior pela área de cada

triângulo contida no volume de controle em questão. Como o volume de controle é criado a partir da união das medianas dos triângulos, a área associada a cada volume de controle é um terço da área do triângulo. Este processo precisa ser repetido para cada triângulo condutivo ao redor do nó de interesse, o que fornece a seguinte expressão:

$$G_{vc1\check{s}vc2} = \sum_{\text{triângulos entorno dei}} \frac{G_{i\check{s}j}}{3 n_j} \quad (5.29)$$

A principal característica deste método consiste no forte acoplamento entre as duas equações. Isto acontece em virtude da utilização do método de Newton, aonde as duas equações são resolvidas simultaneamente. Por outro lado, como desvantagem, temos que sempre transportar os acoplamentos radiativos das superfícies para os volumes de controle condutivos. Esta operação pode ser muito custosa computacionalmente, pois quando temos uma malha condutiva bastante refinada comparada com a malha radiativa, o sistema necessitará de mais tempo para montar a matriz final, do que para sua própria solução.

## **6 Resultados e Discussões**

---

O presente capítulo tem o objetivo de apresentar os resultados e descrever os testes realizados para a validação e comparação dos modelos discutidos ao longo do texto. Este capítulo é dividido em duas partes. A primeira a

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,841 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:59 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 155 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

semelhante ao da criação da malha condutiva apresentada no Capítulo 5. Ou seja, para cada subdivisão teremos 4 novos triângulos. Cada uma destas subdivisões será daqui por diante chamada de

ou  $A_2$ ) do par em consideração. Por outro lado, este método é bem semelhante ao da Dupla Discretização quando temos a presença de obstruções, pois utiliza os mesmos algoritmos de checagem descritos na seção 3.4.5 do Capítulo 3, para diminuir o número de superfícies em consideração e aumentar a performance do método.

## 6.2 Análise da Precisão dos Métodos de Cálculo do Fator de Forma

Para estudo da precisão dos métodos numéricos para o cálculo do fator de forma foi realizado um conjunto de testes padrão. Estes testes envolveram superfícies simples, mas com resultado analítico do fator de forma entre elas conhecido, sendo portanto úteis para verificação da precisão dos métodos.

### 6.2.3 Duas Placas Paralelas

O primeiro teste realizado foi o clássico teste das duas placas paralelas. Este teste está ilustrado na Fig.6.1. Ele consiste no cálculo do fator de forma entre duas placas paralelas de tamanho  $1 \times 1$ , separadas por uma distância  $d$ . Nos testes realizados variou-se esta distância de 0,1 a 100 e analisou-se o comportamento dos métodos. A Fig.6.1 também apresenta a discretização das superfícies, ou seja, a malha radiativa contendo as superfícies triangulares onde foi calculado o fator de forma. Os gráficos apresentados são obtidos comparando a solução numérica com a solução analítica apresentada anteriormente pela Fig.3.3. A seguinte equação foi utilizada para o cálculo do erro percentual

$$Erro\% = \frac{F_{i-j}(Numérico) - F_{i-j}(Analítico)}{F_{i-j}(Analítico)} \times 100 \quad (6.1)$$

Valores positivos do erro indicam que o fator de forma foi superestimado, sendo que os valores negativos indicam que o mesmo foi subestimado.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos com os métodos apresentados no Capítulo 3.

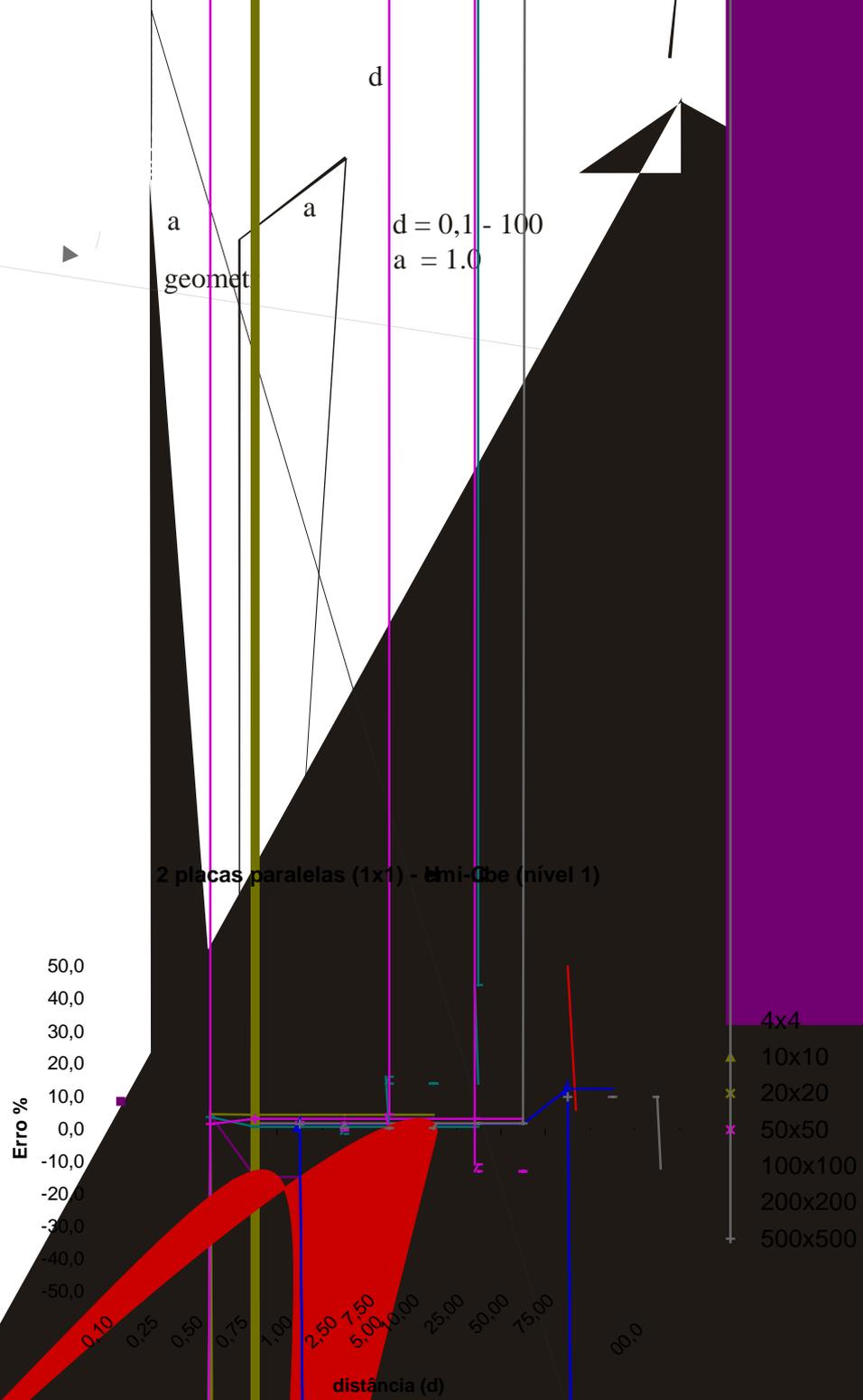
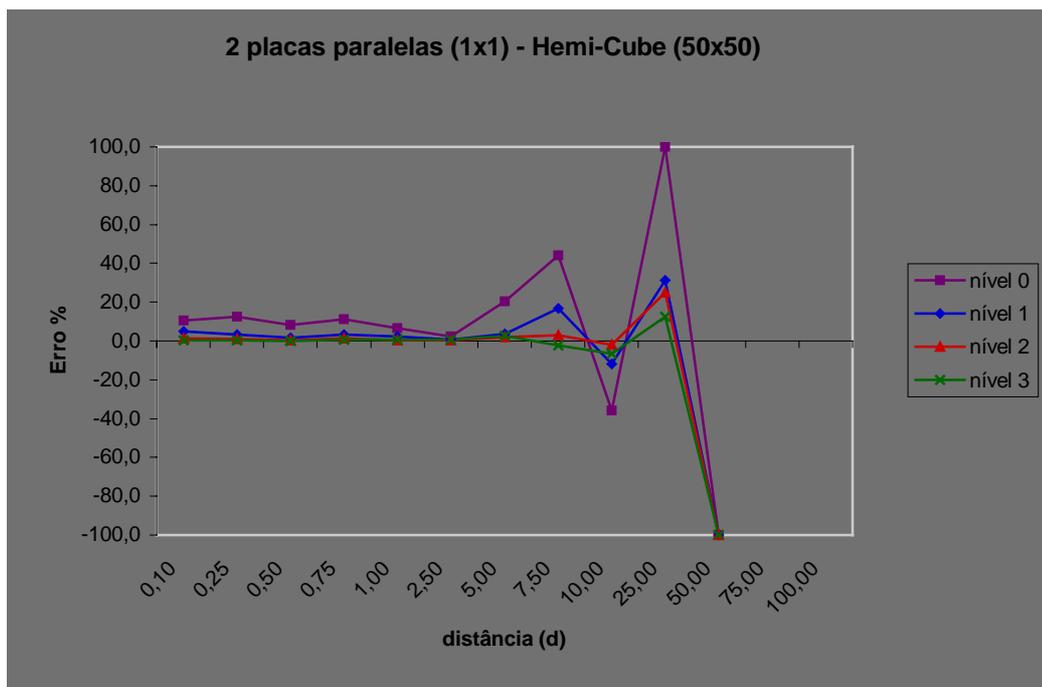


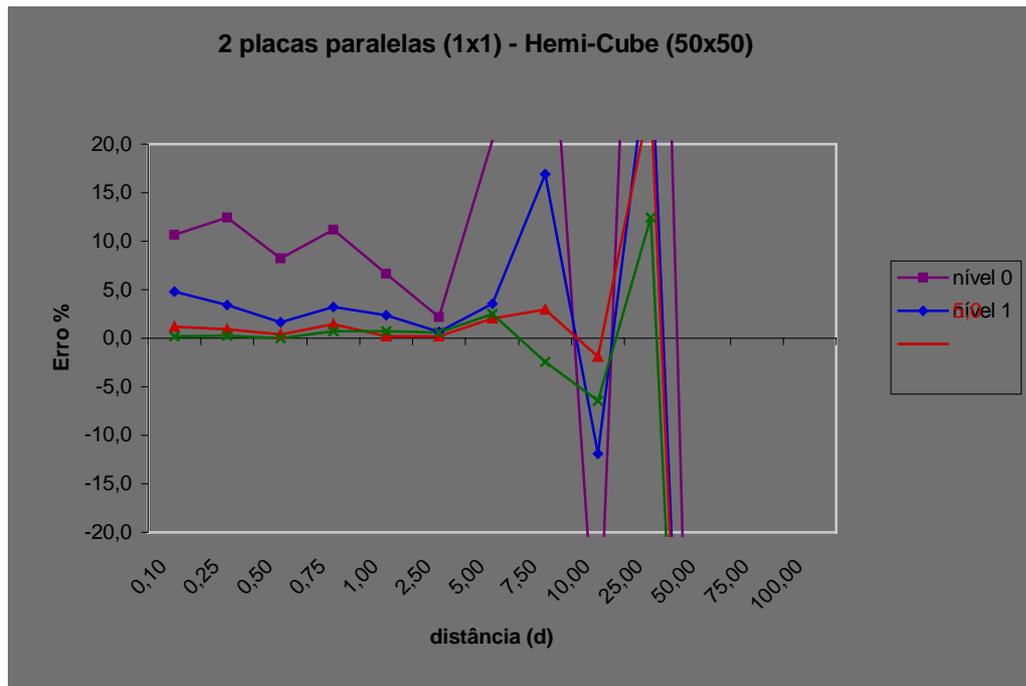
Figura 6.2– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube: Análise da resolução do Hemi-Cubo

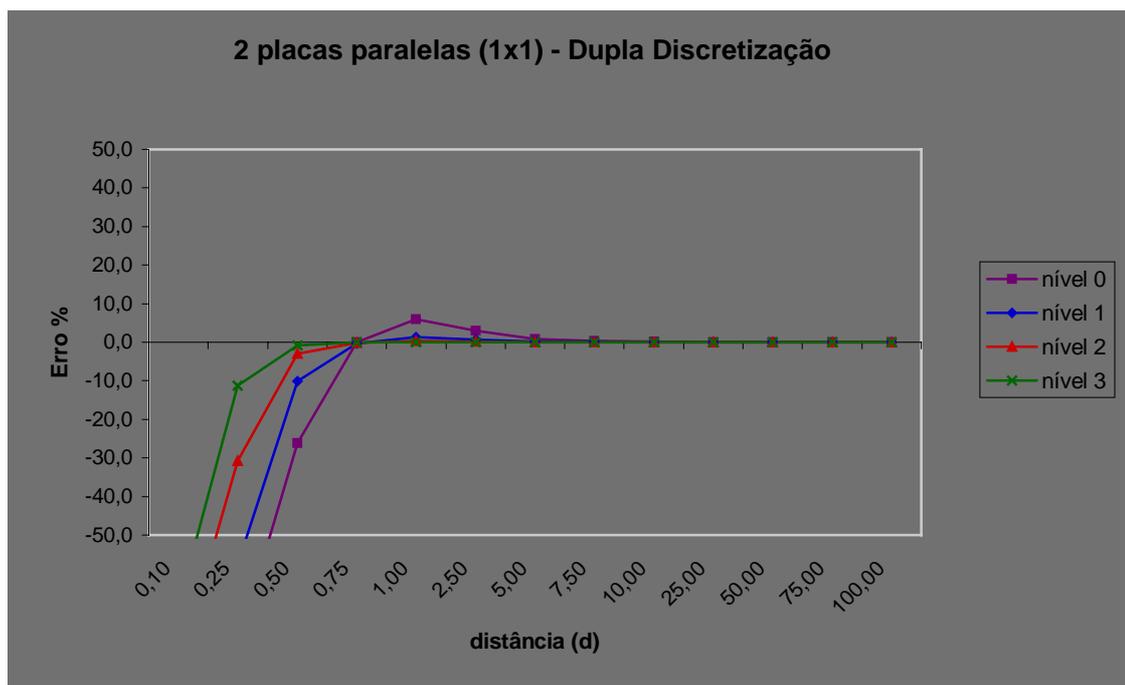
Analisando a Fig.6.2 podemos perceber que a medida que a distância vai aumentando é necessário uma resolução maior do Hemi-Cubo para que consigamos obter uma melhor precisão do fator de forma. Isto é explicado pelo fato de que a medida que os objetos ficam mais longe, a sua sombra projetada na face do Hemi-Cubo se torna menor, necessitando de uma maior resolução para que possamos defini-la. Conseqüentemente, para uma dada resolução, a partir de uma certa distância nenhum *pixel* se encontrará coberto, resultando em um valor nulo para o fator de forma entre as duas superfícies.

O segundo teste com o método Hemi-Cube foi realizado para estudar o comportamento deste método quando variamos o nível de discretização da superfície aonde estamos posicionando o Hemi-Cubo. Assim, para uma dada resolução fixa (50x50) foram utilizados vários níveis (0, 1, 2 e 3). O resultado é apresentado na Fig.6.3, sendo que o mesmo gráfico, somente com uma nova escala, é apresentado na Fig.6.4. com o objetivo de facilitar a visualização.



**Figura 6.3– Duas placas paralelas – Método Hemi-Cube: Análise do nível de discretização**





**Figura 6.5– Duas placas paralelas – Método da Dupla Discretização:  
Análise do nível de discretização**

Observando o gráfico da Fig.6.5 podemos concluir que, ao contrário do método Hemi-Cube, este método apresenta bons resultados a medida que a distância vai aumentando. A aproximação de que cada superfície possui um formato de disco se torna melhor a medida que esta é vista de distâncias maiores. Isto é válido também para níveis de discretização muito baixos, como o nível 0. Por outro lado, quando as distâncias são pequenas em comparação ao tamanho das superfícies, o formato triangular difere muito de um disco e esta aproximação falha, fornecendo resultados pobres.

### 6.2.3.3 Integral de Contorno

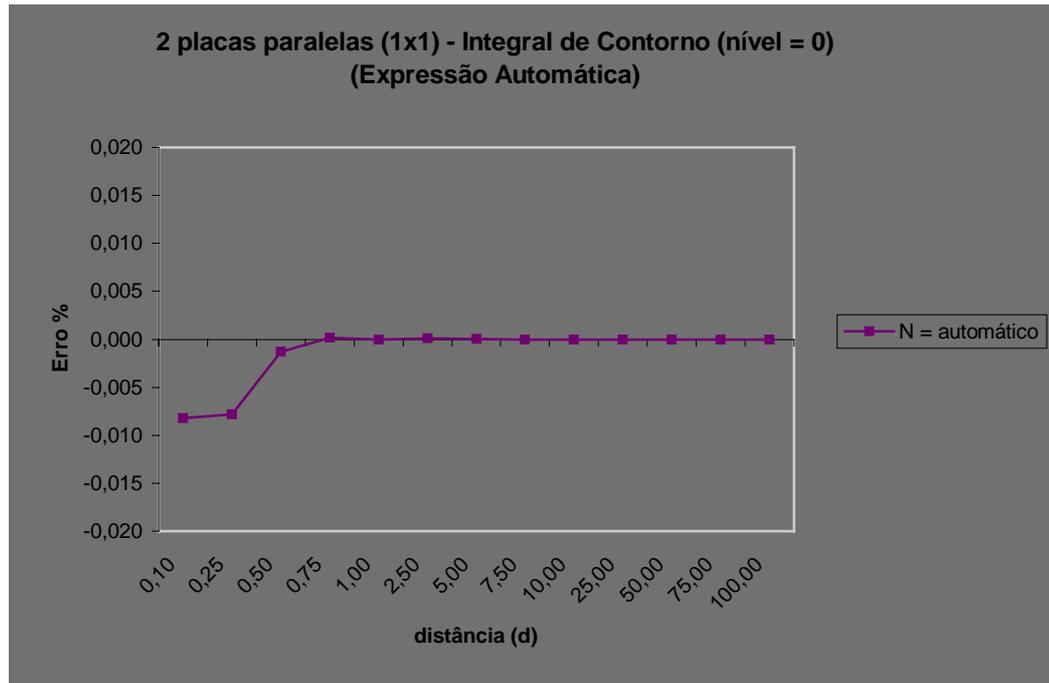
Para avaliarmos o comportamento deste método variou-se o número de divisões nos contornos das superfícies, pois é ao longo deles que avaliamos a integral. O resultado deste teste é apresentado na Fig.6.6. Como neste caso não temos a presença de obstruções, as superfícies da malha radiativa não foram subdivididas (nível 0).



$$N = (\text{int}) \left[ 3.0175 + 8.632 \cdot e^{\frac{-d}{2.875 \cdot 10^{-4}}} + 4.108 \cdot e^{\frac{-d}{0.04789}} + 2.108 \cdot e^{\frac{-d}{2.053}} \right] \quad (6.2)$$

onde  $d$  é a distância entre as placas.

Os resultados obtidos utilizando esta aproximação podem ser vistos na Fig.6.7. Podemos observar que para distâncias maiores que 1,0 o erro está dentro da margem especificada.



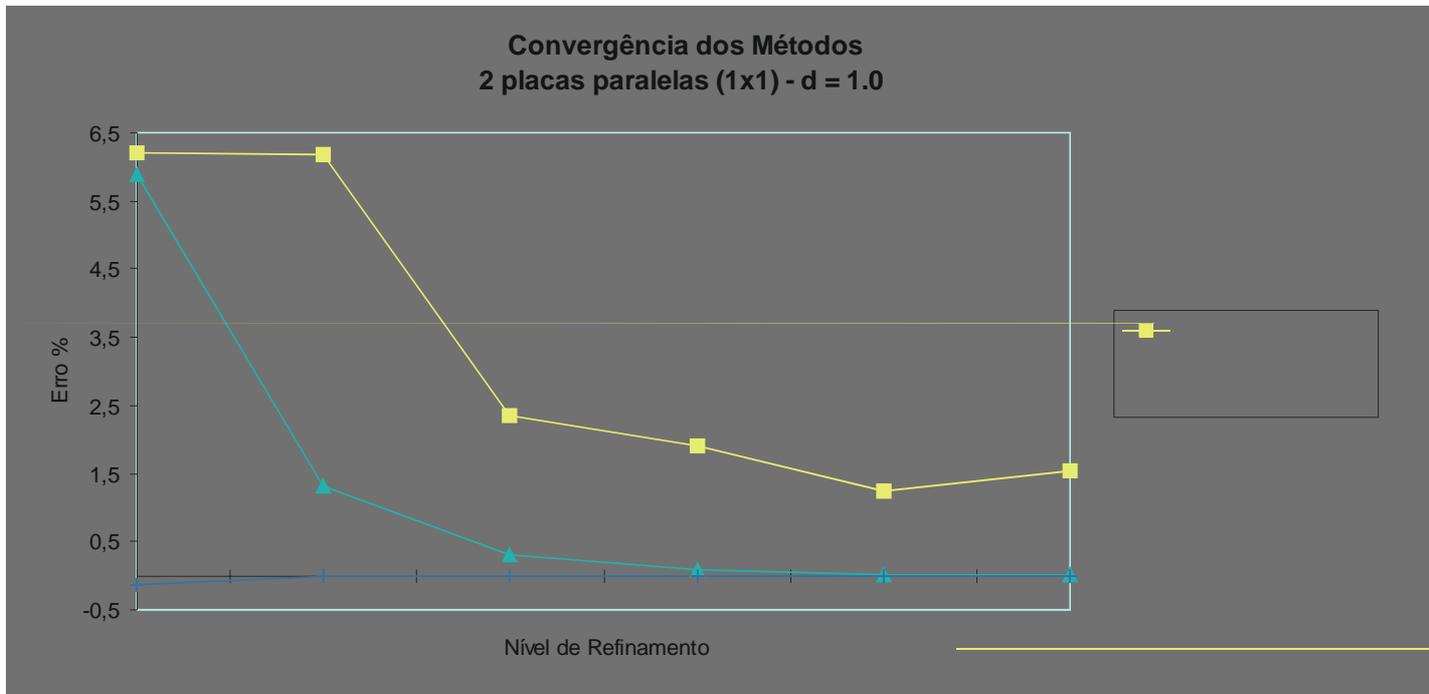
**Figura 6.7– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno: Utilizando divisão automática dos contornos**

O mesmo procedimento anteriormente apresentado para o método da Integral de Contorno pode ser facilmente estendido para o método Hemi-Cube e o método da Dupla Discretização. A única diferença é que nestes métodos ao invés de obtermos o número de divisões nos contornos podemos obter como resultado a resolução do Hemi-Cubo ou o nível de discretização das faces, no caso da Dupla Discretização, minimizando a entrada de dados pelo usuário e automatizando o processo.

### 6.2.3.4 Comparação entre os Métodos

Visando realizar uma análise comparativa entre os métodos para o caso de duas placas paralelas a uma distância fixa ( $d = 1,0$ ), a seguir, é apresentado um gráfico onde podemos

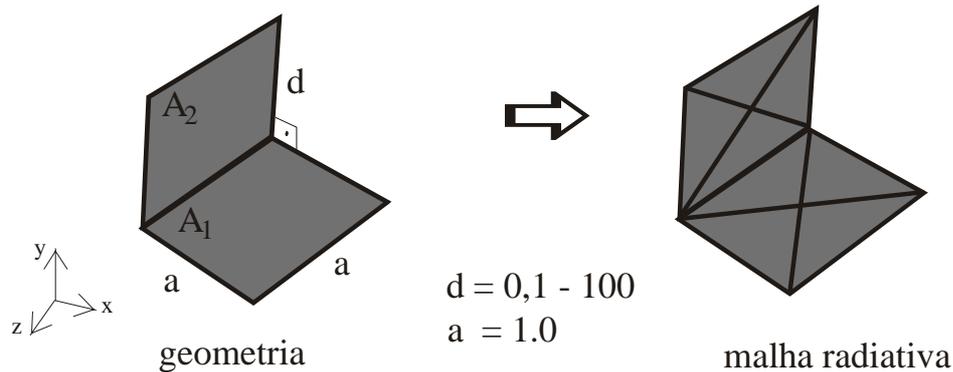
analisar a convergência dos métodos a medida que vamos aumentando o seu *nível de refinamento*. Este nível de refinamento depende do método, no caso do Hemi-Cube ele significa a sua resolução, no caso da Dupla Discretização este índice significa o nível de discretização das superfícies e no caso da Integral de Contorno este nível representa o número de divisões nos contornos.



exemplos a seguir.

### 6.2.4 Duas Placas Perpendiculares

O segundo teste realizado para avaliar o comportamento dos métodos para o cálculo do fator de forma é bem semelhante ao exemplo anterior. Nesta configuração são utilizadas duas placas perpendiculares com uma aresta coincidente, conforme ilustrado na Fig.6.9.



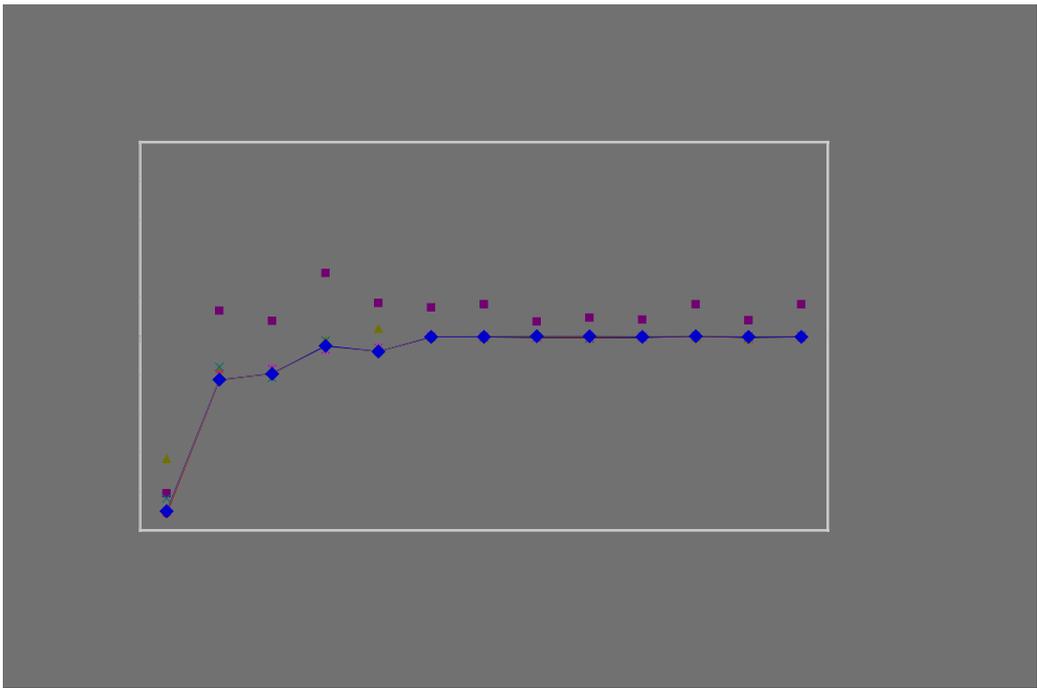
**Figura 6.9– Duas placas perpendiculares**

Nesta configuração variou-se o parâmetro  $d$  de 0,1 a 100. Os gráficos apresentados são obtidos comparando a solução numérica com a solução analítica apresentada anteriormente pela Fig.3.4 do terceiro capítulo. Os erros apresentados foram calculados utilizando a expressão da Eq.(6.1) e como neste caso não temos a presença de obstruções, as análises realizadas são semelhantes às da seção anterior.

#### 6.2.4.1 Hemi-Cube

Para esta configuração geométrica, de maneira diferente do exemplo anterior, o método Hemi-Cube apresentou bons resultados, à medida que o parâmetro  $d$  é aumentado. Como antes, foi estudado o comportamento para várias resoluções do Hemi-Cubo e posteriormente variou-se também o nível de discretização da superfície onde o Hemi-Cubo é posicionado. Os resultados destas simulações são apresentados na Fig.6.10.

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last4(g)0 -1.1512 TD 0[(C)3:PMtn[(C)3:.5(36788(t728/98)-3/01(P)-6(M)930)-24755(P)-6(M)]TJ 0 -1.1388 TD 0.0074



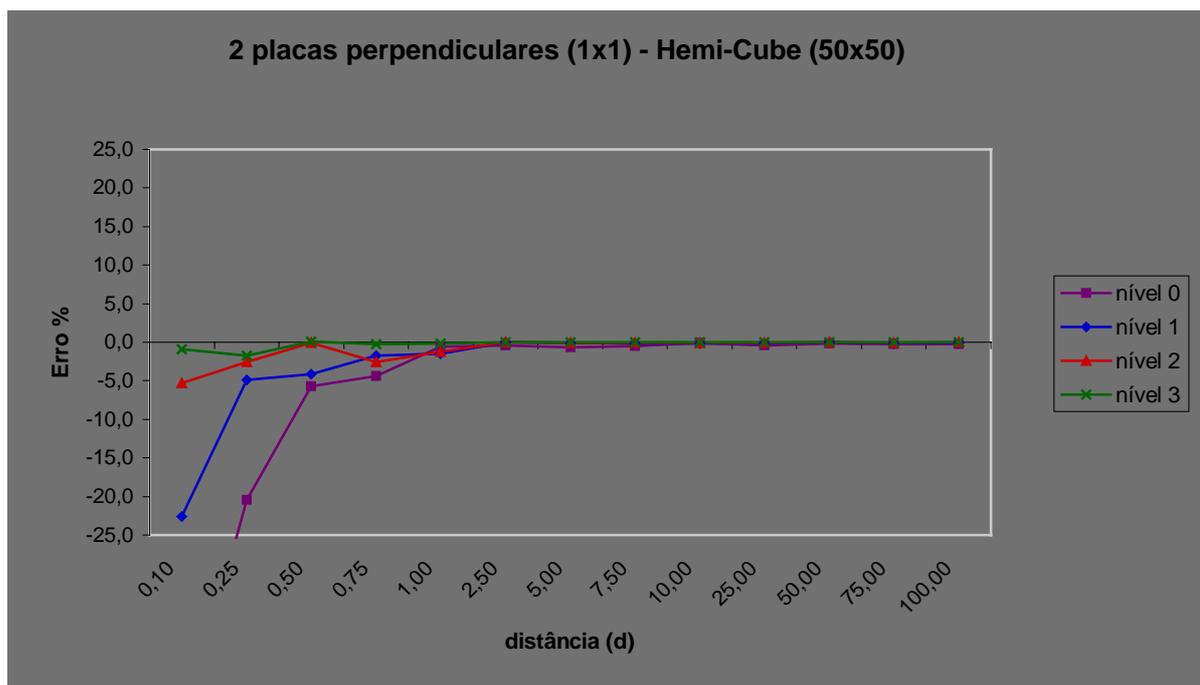
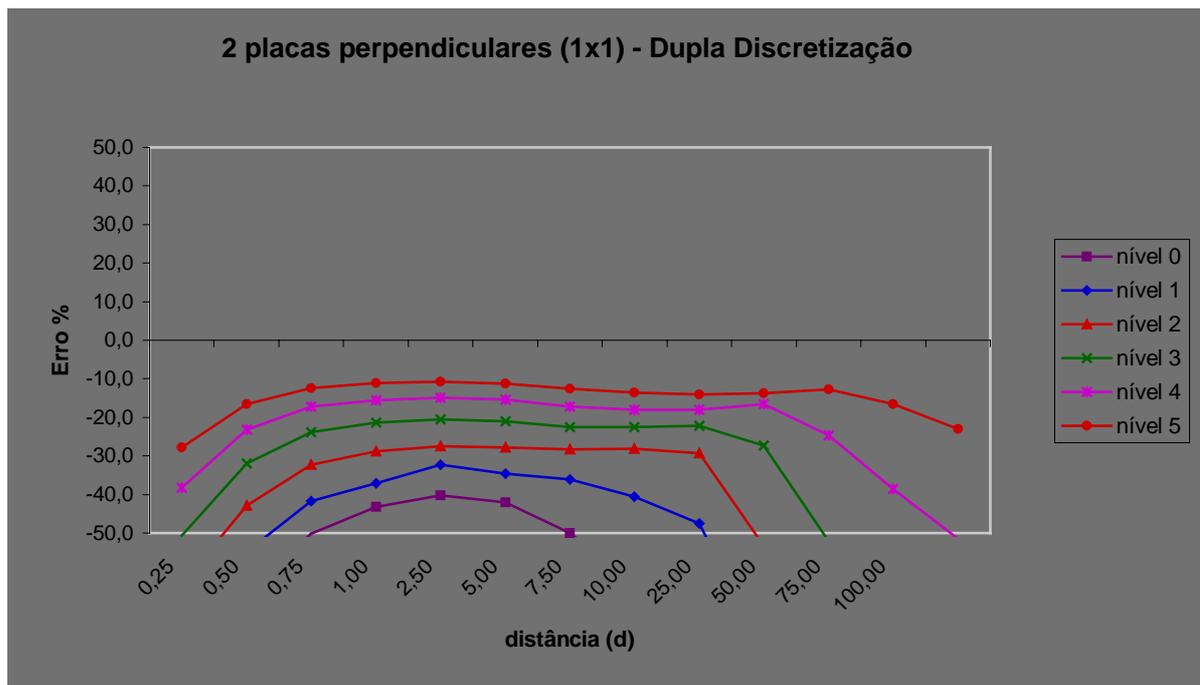


Figura 6.11– Duas placas perpendiculares– Método Hemi-Cube:  
Análise do nível de discretização da superfície

#### 6.2.4.2 Dupla Discretização

Os resultados obtidos com o método da Dupla Discretização são apresentados na Fig.6.12. Neste caso, de maneira análoga a anterior, variou-se o nível de subdivisões nas superfícies e observou-se o comportamento do método, enquanto o parâmetro  $d$  aumenta.

Analisando este gráfico observa-se que o método apresenta um alto nível de erro, sendo necessário elevados níveis de discretização para atingirmos erros da ordem de 10% para distâncias próximas a 1,0. Este fato torna-se mais grave a medida que o parâmetro  $d$  aumenta. Isto é explicado pela aproximação utilizada neste método, pois de acordo com a Fig.6.9 temos que as superfícies oriundas do processo de discretização possuem o formato triangular e à medida que o parâmetro  $d$  aumenta, a sua forma se alonga cada vez mais, diferindo em muito do formato de um disco. Para que esta aproximação seja válida é necessário um altíssimo nível de discretização, fazendo com que os triângulos resultantes fiquem cada vez menores comparados com a distância entre as superfícies.

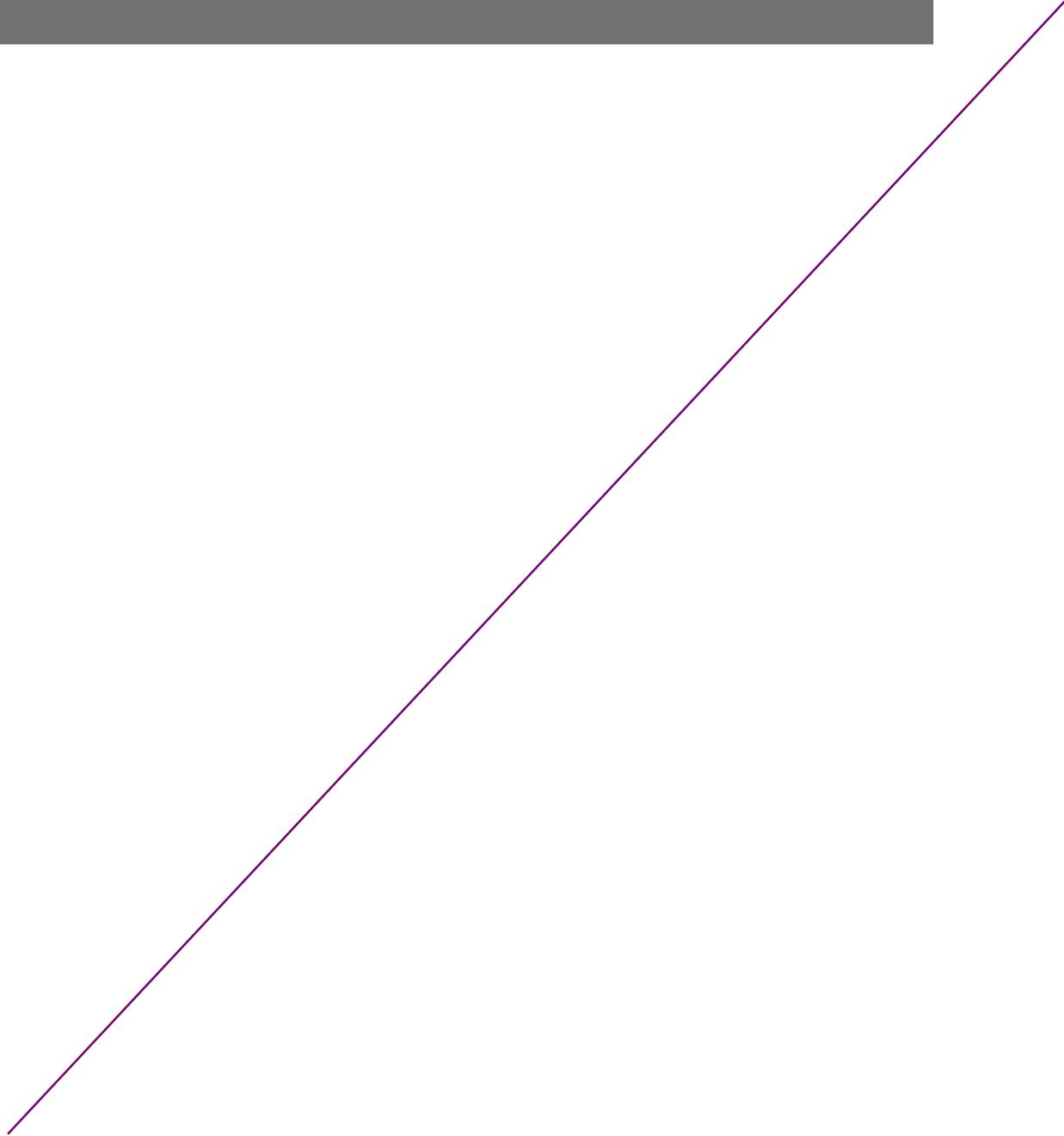
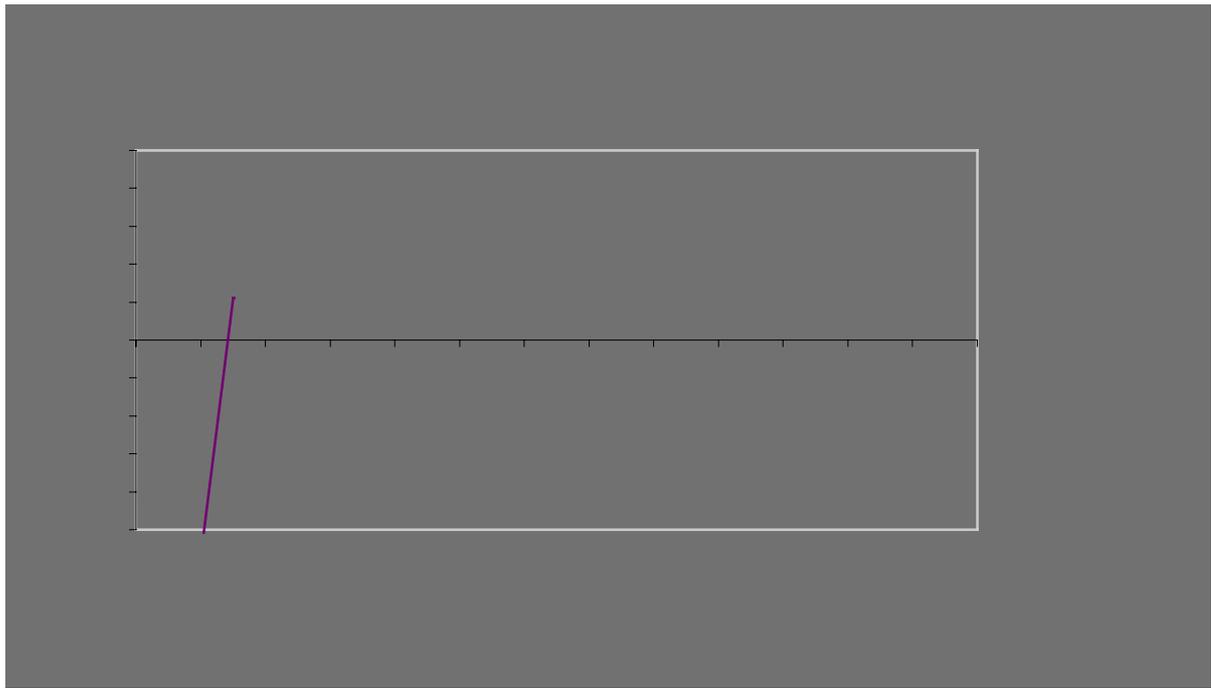


**Figura 6.12– Duas placas paralelas – Método da Dupla Discretização:  
Análise do nível de discretização**

Vale a pena ressaltar que as sub-superfícies oriundas das discretizações das superfícies da malha radiativa em níveis não altera o formato original da malha, pois o processo de subdivisão utilizado gera sempre 4 triângulos menores com o mesmo aspecto que o triângulo original. Assim, quando a distância  $d$  é grande e a discretização pobre, estaremos trabalhando com triângulos bastante distorcidos. Este comportamento indesejado pode ser reduzido se utilizarmos uma discretização um pouco mais uniforme das superfícies.

### 6.2.4.3 Integral de Contorno

A medida que vamos aumentando o número de divisões ao longo dos contornos das superfícies, para esta configuração geométrica, o método da Integral de Contorno também apresenta excelentes resultados, como ilustrado na Fig.6.13. Isto é, em grande parte, devido ao fato de estarmos avaliando analiticamente a integral contida na expressão de Mitalas-Stephenson ao longo dos contornos adjacentes, conforme procedimento descrito no Capítulo 3.



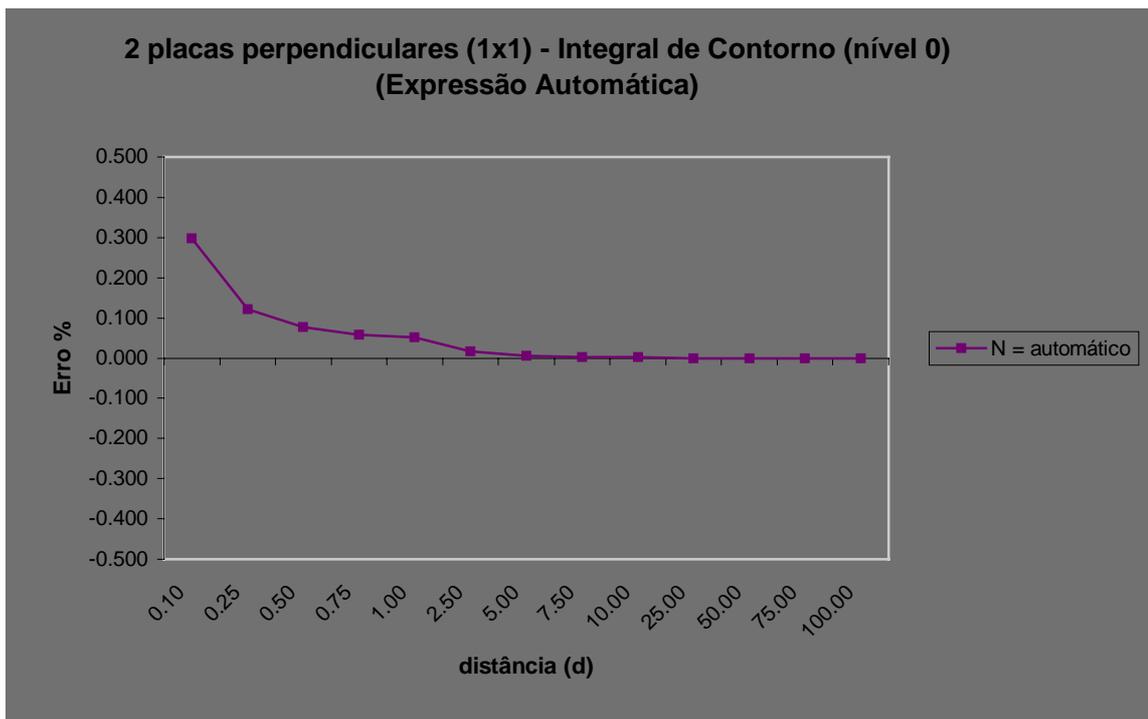


Figura 6.14– Duas placas paralelas – Método da Integral de Contorno:  
Utilizando divisão automática dos contornos

#### 6.2.4.4 Comparação entre os Métodos

Como feito na seção anterior podemos comparar a convergência destes métodos para a configuração de duas placas perpendiculares com o parâmetro  $d$  fixo. Analisando a Fig.6.15 podemos perceber que o mesmo comportamento observado no caso anterior é aqui verificado. A única diferença é que neste caso o método Hemi-Cube possui uma taxa da convergência melhor do que o da Dupla Discretização, fornecendo, em geral, erros menores.

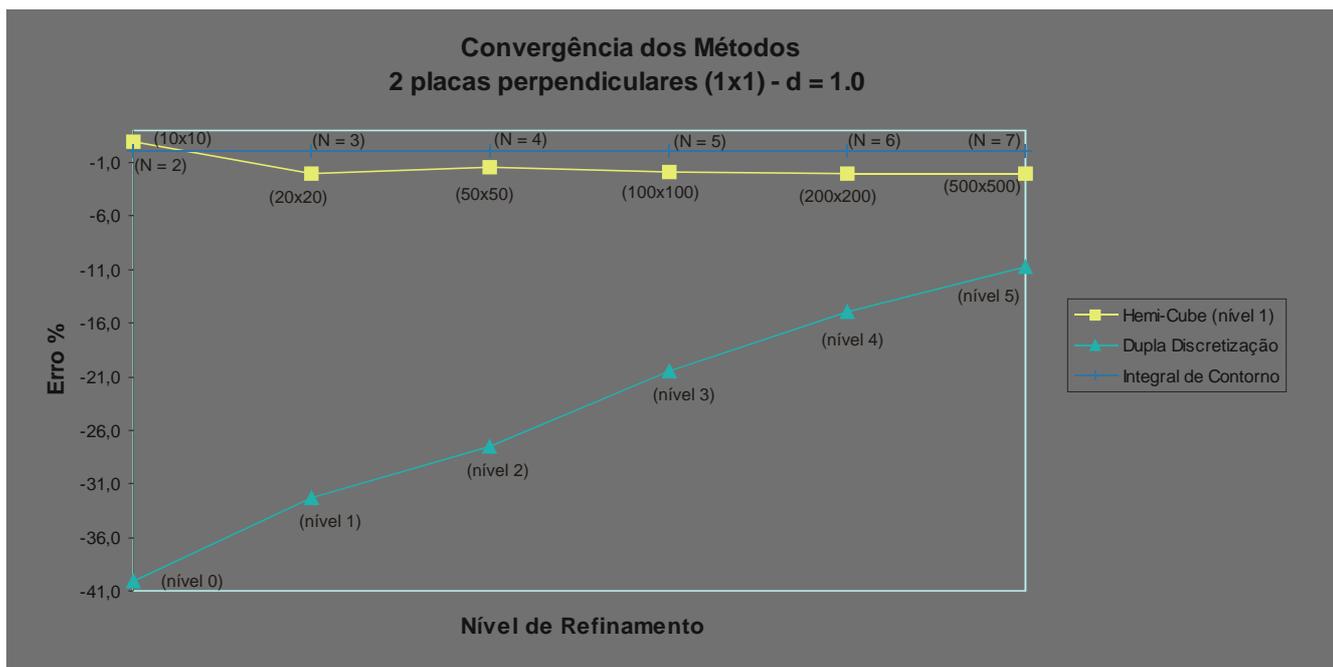


Figura 6.15– Duas placas perpendiculares – Convergência dos métodos

### 6.2.5 Duas Placas Paralelas com Obstrução

O terceiro teste realizado envolvendo o cálculo do fator de forma foi apresentado no trabalho de Walton (1987). Esta configuração geométrica, apresentada na Fig.6.16, consiste em duas placas paralelas ( $A_1$  e  $A_2$ ) de dimensões 1x1 separadas por uma distância de 1,0 e possuindo o seu campo de visão obstruído por uma superfície menor de dimensões 0,5x0,5 posicionada a 0,25 de  $A_1$ .

O objetivo deste teste é avaliar os métodos no cálculo do fator de forma entre  $A_1$  e  $A_2$  e avaliar o seu comportamento na presença de superfícies obstrutoras. De acordo com Walton (1987) o valor correto de  $F_{1-2}$  vale 0,115621.

Vale a pena lembrarmos que os métodos da Integral de Contorno e da Dupla Discretização, que foram implementados ao longo deste estudo, quando na presença de obstruções, utilizam os algoritmos de checagem e eliminação de superfícies apresentados no Capítulo 3.

Os erros apresentados nos gráficos desta seção foram também calculados utilizando a Eq.(6.1).

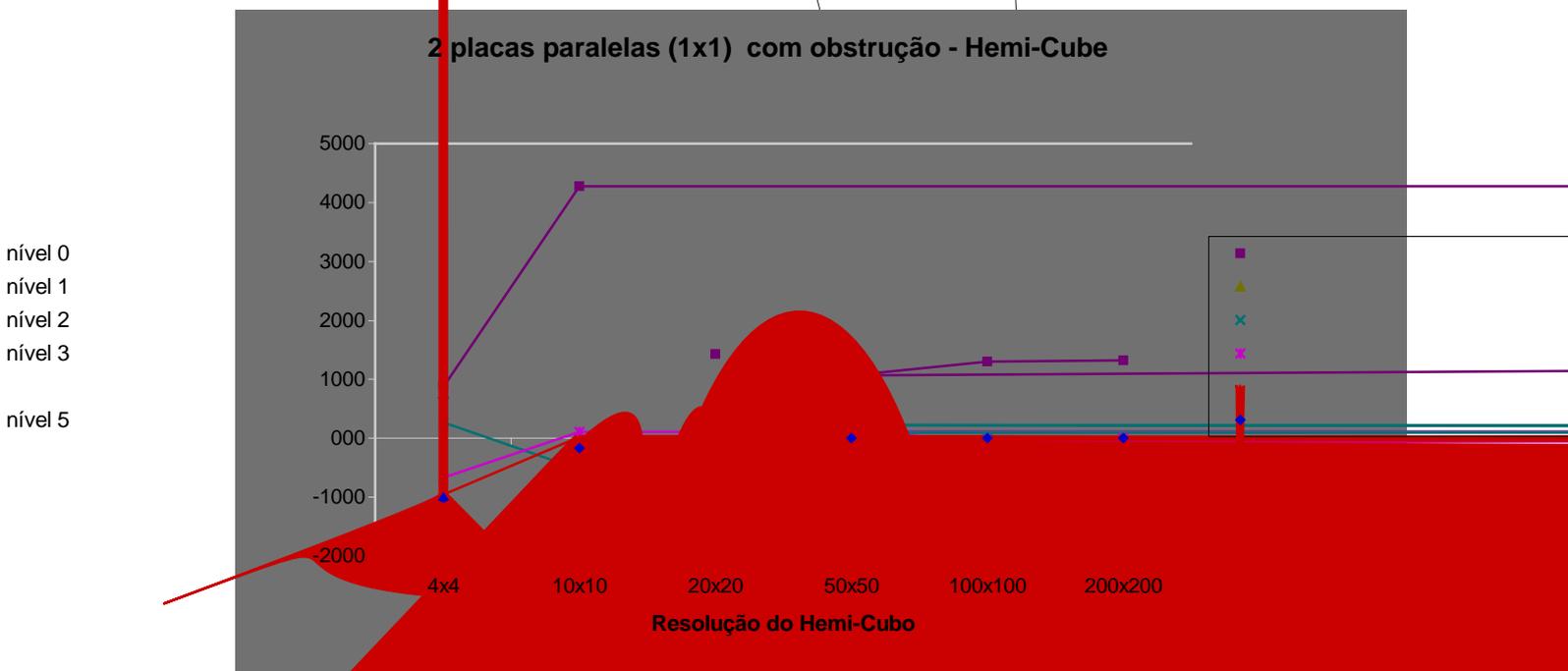
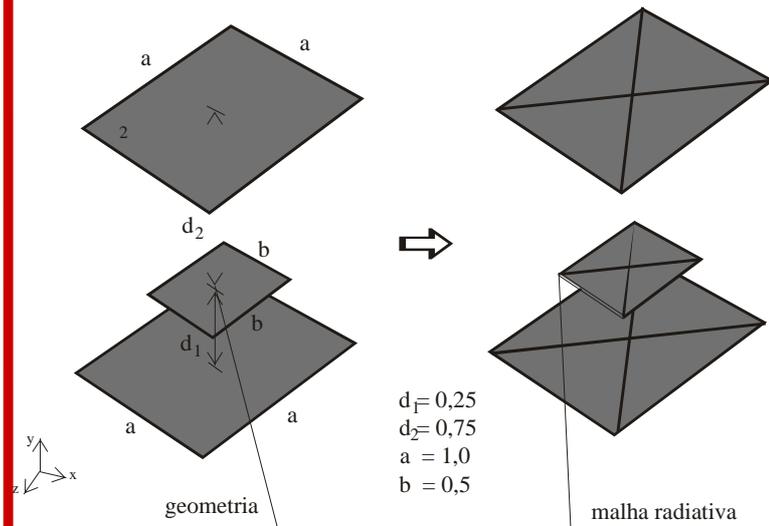


Figura 6.17- Duas placas paralelas com obstrução – Método Hemi-Cube

Analisando o gráfico anterior podemos perceber que o método Hemi-Cube apresenta bons resultados à medida que vamos aumentando a sua resolução e o nível de discretização das superfícies. Da mesma maneira que as situações anteriores, necessita

### 6.2.5.3 Integral de Contorno

Agora, além de variarmos o número de divisões nos contornos, alterou-se também o nível de discretização da superfície que será projetada para a determinação de seus contornos visíveis, neste caso a superfície  $A_2$ . Os resultados estão apresentados na Fig.6.19.

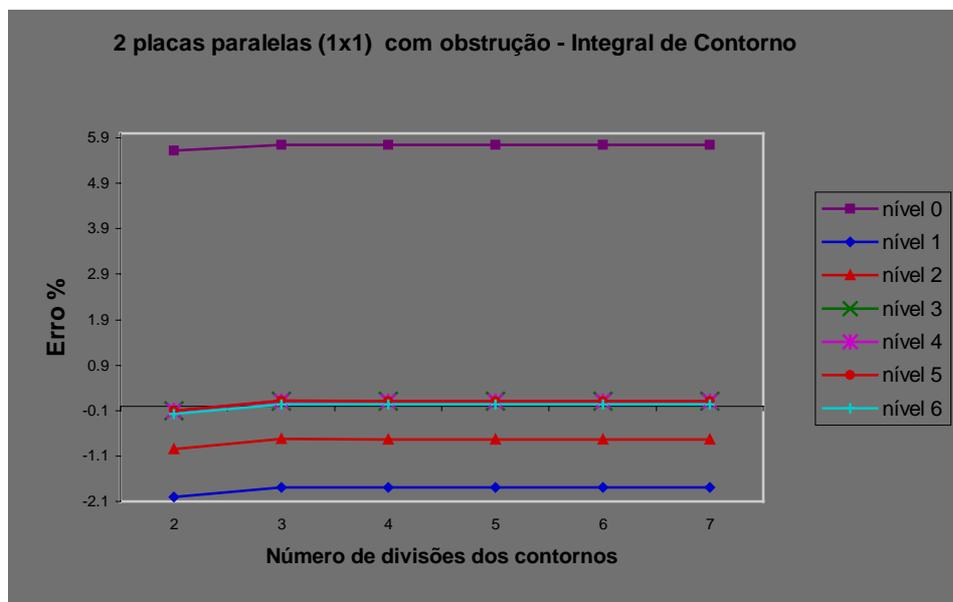


Figura 6.19– Duas placas paralelas com obstrução – Método da Integral de Contorno

Analisando o gráfico anterior podemos perceber que a precisão deste método está, agora, mais sensível ao nível de discretização da superfície do que com o aumento do número de divisão dos contornos. Observa-se que da mesma maneira que quando não possuímos obstruções, uma vez que utilizamos um nível de discretização suficiente para a determinação precisa dos contornos da região a ser projetada, este método fornece bons resultados, embora esta limitação com a dependência da discretização de uma das superfícies seja um fator limitante em aspectos de performance.

### 6.2.5.4 Comparação dos Métodos

Para uma análise comparativa da precisão envolvida, a seguir é apresentado um gráfico onde os três métodos em análise são comparados em função do seu nível de refinamento. Com o objetivo de apresentá-los na mesma escala, é ilustrada a curva de resolução para o método Hemi-Cube e o método da Integral de Contorno utilizando um nível 1 para a discretização das superfícies.

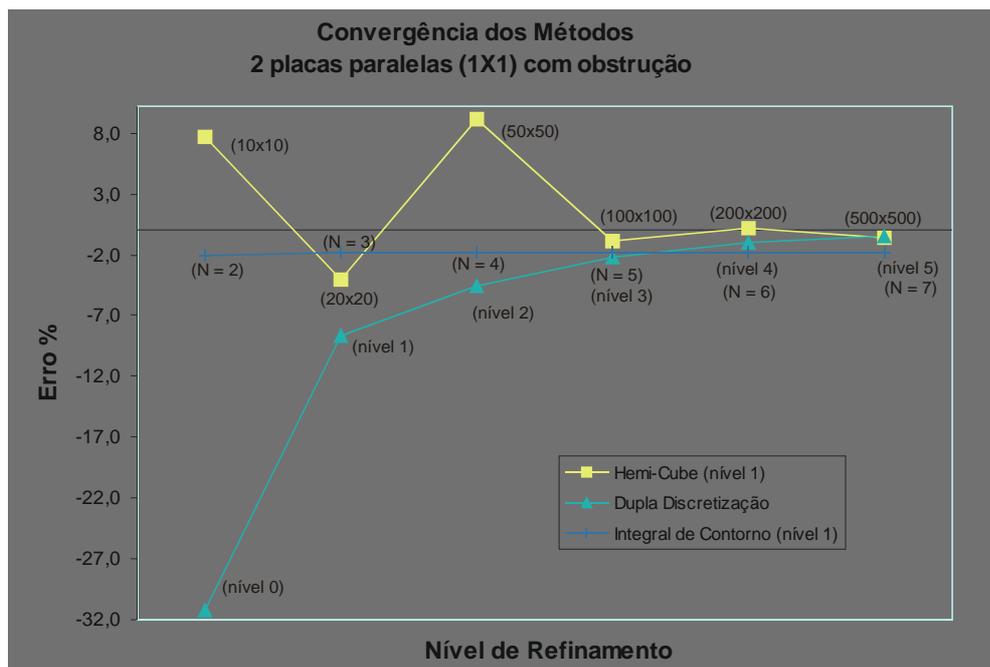


Figura 6.20– Duas placas paralelas com obstrução – Comparação dos Métodos

Observando as curvas da Fig.6.20 podemos concluir que com a presença de obstruções, a precisão do método da Integral de Contorno não é mais uma ordem de grandeza menor do que as dos outros métodos. Este método possui agora sua acurácia limitada e definida pelo nível de discretização da superfície que será projetada. Este fato faz com que o método Hemi-Cube, utilizando uma resolução de somente 100x100 apresente uma precisão melhor, utilizando o mesmo nível de refinamento nas superfícies, quando comparado com o método da Integral de Contorno.

Acredita-se que quando o número de superfícies obstrutoras aumentar, para mantermos a mesma precisão, necessitamos aumentar na mesma proporção o nível de discretização da superfície utilizado pelo Método da Integral de Contorno. Para o Hemi-Cube isto não é necessário, pois podemos variar a resolução do Hemi-Cubo, obtendo resultados equivalentes. Esta conclusão é feita baseada nos gráficos anteriores onde pode-se observar que no caso do Hemi-Cube, o aumento da resolução possui uma influência maior na precisão do que o aumento do número de divisões nos contornos para o método da Integral de Contorno.

### 6.2.6 Paralelepípedo com Obstrução

O último teste realizado para avaliação da precisão dos métodos de cálculo de fator de

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis

forma também foi retirado do trabalho de Walton (1987). Esta geometria consiste em uma caixa unitária (1x1x1) onde suas laterais fora

Hemi-Cube (nível 0)		Integral de Contorno (N=4)		Dupla Discretização	
Refinamento	Erro	Refinamento	Erro	Refinamento	Erro
10x10	-0,5460%	nível 0	1,0127%	nível 0	20,7674%
50x50	-0,0220%	nível 1	0,3706%	nível 1	1,6599%
100x100	-0,0050%	nível 2	0,0537%	nível 2	0,6581%
200x200	-0,0010%	nível 3	0,0356%	nível 3	0,2537%

**Tabela 6.1- Resultados para o teste do paralelepípedo com obstrução**

Analisando os valores apresentados na tabela acima, podemos perceber que o método Hemi-Cube apresenta os melhores resultados. Isto é uma consequência lógica da característica do método, onde em uma cavidade espera-se que todos os *pixels* das faces se encontrarão naturalmente encobertos. Os erros aqui existentes podem ser oriundos de duas fontes. A primeira fonte de erro pode acontecer quando durante as operações de projeções alguma linha ou ponto é projetada exatamente em cima de um *pixel* e, em virtude das imprecisões destes cálculos, este *pixel* pode acabar sendo processado como não coberto. A segunda fonte de erros diz respeito a aproximação do fator de forma do centro do Hemi-Cubo em relação a suas faces. Esta aproximação considera que o Hemi-Cubo tenha uma resolução suficiente para aproximarmos o valor deste fator de forma pelo valor do fator de forma entre dois elementos de áreas infinitesimais. Dependendo do tamanho da variável utilizada para o armazenamento deste valor na memória do computador, esta soma somente resulta exatamente em uma unidade para resoluções de 200x200 ou mais.

Podemos também observar que o método da Integral de Contorno apresenta um nível de precisão intermediário, mas que precisamos utilizar um nível 3 de discretização das superfícies para obtermos uma precisão equivalente ao Hemi-Cubo de resolução 50x50 possuindo um nível 0.

Quando voltamos a nossa atenção para o método da Dupla Discretização verificamos que é necessário um nível de discretização bastante elevado para obtermos um nível de erro comparável com os outros métodos.

Devemos sempre lembrar que os erros aqui apresentados, dependendo do nível de fidelidade do modelo térmico em consideração, poderão influenciar os resultados dos campos de temperatura simulados. No caso deste exemplo, se considerássemos o método da Dupla Discretização utilizando um nível 1, estaríamos modelando um sistema que possui um desbalanço de energia radiativa de 1,6 % aproximadamente.

### 6.3 Análise da Performance dos Métodos de Cálculo do Fator de Forma

Após a análise da precisão dos métodos para o cálculo do fator de forma realizou-se uma análise para determinar a sua performance computacional. Para isso realizou-se uma seqüência de testes baseados em duas geometrias anteriormente apresentadas, a de duas placas paralelas com obstrução e a geometria do paralelepípedo com obstrução. Foram levadas em conta somente as geometrias com obstruções pois o objetivo era verificar o comportamento dos métodos em situações realísticas. Estes testes basearam-se em um refinamento sucessivo das malhas radiativas obtendo um número cada vez maior de superfícies e a partir daí realizava-se o cálculo do fator de forma entre elas medindo-se o tempo de computação.

#### 6.3.1 Geometrias sem Obstrução

Antes da apresentação dos resultados, e também em virtude dos testes realizados envolverem somente geometrias com obstruções, vale a pena realizar alguns breves comentários sobre a performance dos métodos frente a geometrias sem obstrução, como as apresentadas nos testes de placas paralelas e das placas perpendiculares.

Nos casos sem obstrução observou-se que o método da Integral de Contorno apresenta o melhor desempenho computacional aliado a melhor precisão de resultados. Isto deve-se ao fato de que na ausência de obstruções o método da Integral de Contorno com a expressão de Mitalas-Stephenson somente realiza avaliação numérica de uma integral ao longo dos contornos, sendo portanto rápido e preciso. Além disto quando temos a presença de contornos adjacentes a integral é avaliada analiticamente.

Walton (1987) relata em seu trabalho que nestes casos sem obstrução, o tempo de processamento do método da Integral de Contorno utilizando a expressão de Mitalas-Stephenson é da ordem de  $N$  (número de divisões ao longo dos contornos) e se realizarmos a sua comparação com o método da Dupla Discretização, o tempo deste último é da ordem de  $N^4$ , se cada superfície for dividida em  $N^2$  elementos (onde  $N$  também é o número de divisões ao longo dos contornos).

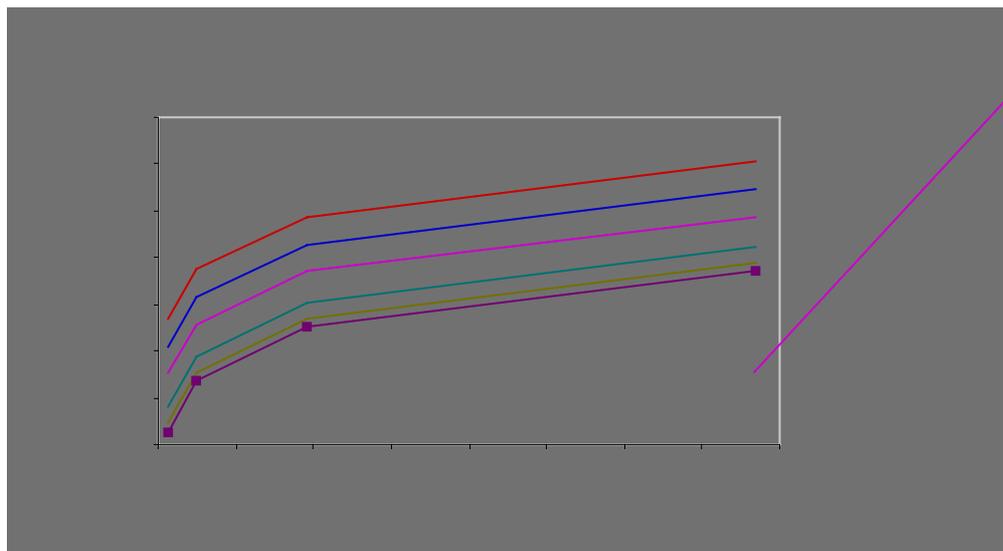
Podemos analisar também que o método Hemi-Cube não apresenta vantagens significativas quando comparado com o método da Integral de Contorno. Isto é devido ao fato de que este método utiliza o mesmo algoritmo para ambos os casos, ou seja, realiza as

mesmas operações na presença e na ausência de superfícies obstrutoras, sendo mais competitivo nas situações com obstruções.

### 6.3.2 Duas Placas Paralelas com Obstrução

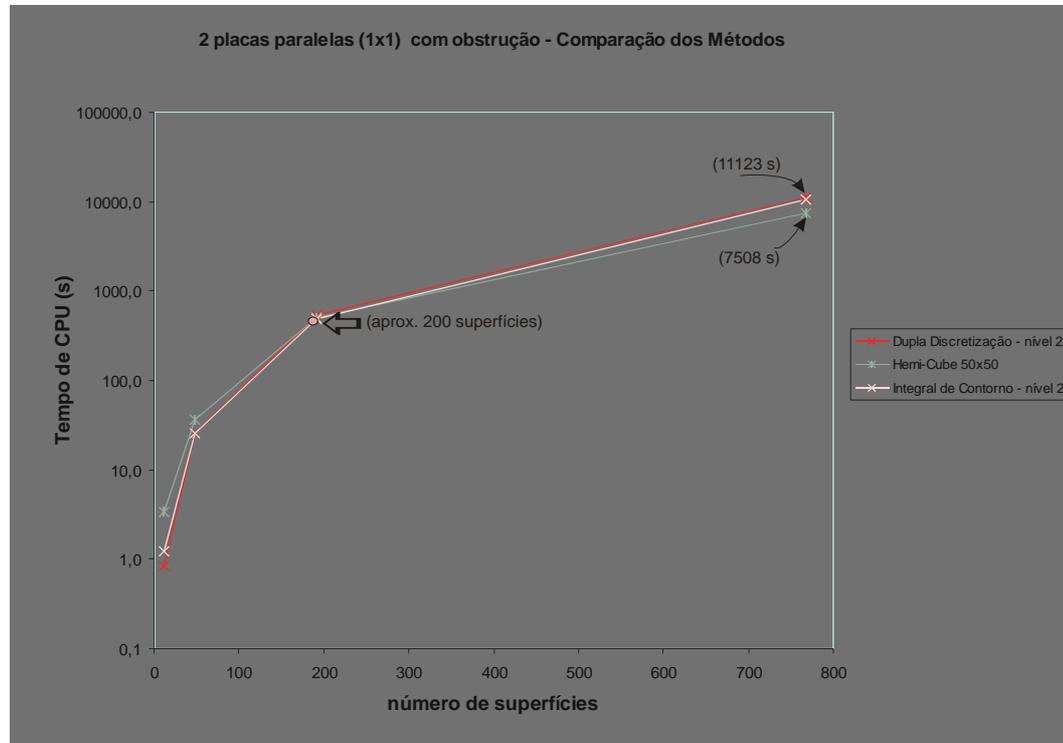
Os resultados dos testes realizados para a configuração de duas placas paralelas com obstrução são apresentados a seguir. Neste teste variou-se o número de superfícies de 12 até 768. Estes casos foram simulados em um micro-computador Pentium III 700 MHz com 512 Mb de memória RAM e os códigos foram compilados sem opções de otimização. Acredita-se que melhorias nos tempos de processamento podem ser obtidas com algumas alterações nos algoritmos, mas a característica do perfil das curvas apresentadas irá permanecer constante pois é predominantemente função do número de superfícies envolvidas.

O gráfico apresentado na Fig.6.22 mostra o desempenho do método Hemi-Cube. Neste caso, como o refinamento da malha radiativa equivale a um aumento do nível de discretização da superfície onde estamos posicionando o Hemi-Cube, foi utilizado um nível 0 de discretização, variando-se somente o número de superfícies da malha radiativa e analisando a performance do método. Este gráfico ilustra os tempos de processamento obtidos para diversas resoluções do Hemi-Cubo à medida que vamos aumentando o número de superfícies da geometria. Observando este gráfico podemos concluir que as curvas para cada resolução são praticamente paralelas, ilustrando uma variação linear do tempo de processamento com a resolução do Hemi-Cubo.



As Fig.6.23 e Fig.6.24, a seguir, ilustram os resultados obtidos com os métodos da Dupla Discretização e Integral de Contorno. Tanto no método da Dupla Discretização quanto no método da Integral de Contorno foram variados

Com o objetivo de realizar uma análise comparativa da performance dos métodos, a seguir é apresentado um gráfico aonde algumas curvas dos gráficos anteriores foram sobrepostas.



**Figura 6.25– Placas paralelas com obstrução:  
Comparação da performance dos métodos**

Analisando a Fig.6.25 podemos verificar que para um número pequeno de superfícies o método da Integral de Contorno e da Dupla Discretização são mais rápidos do que o Hemi-Cube. À medida que o número de superfícies vai aumentando podemos concluir que existe um determinado valor onde o tempo de processamento do Hemi-Cubo será sempre menor do que os outros métodos. Realizando uma verificação visual da intersecção das curvas acima podemos concluir que para esta configuração geométrica, utilizando um Hemi-Cubo de resolução 50x50, a partir 200 superfícies aproximadamente este método será menos custoso computacionalmente quando comparado com o método da Dupla Discretização e Integral de Contorno utilizando um nível 2 de discretização. Esta comparação poderia ser feita utilizando Hemi-Cubos com outras resoluções e outros níveis de refinamento para os métodos da Dupla Discretização e Integral de Contorno, pois analisando as curvas da Fig. 6.23 e 6.24 verificamos que as mesmas possuem uma inclinação maior do que as curvas apresentadas no método do Hemi-Cube (Fig. 6.22). Assim, sempre existirá uma situação onde uma

determinada resolução de Hemi-Cubo possuirá um tempo de processamento menor do que qualquer nível de discretização utilizado pelo método da Integral de Contorno e Dupla Discretização. Este fato é melhor compreendido quando prestamos atenção na ordem de grandeza do tempo de processamento dos métodos, comentada a seguir.

O método Hemi-Cube apresenta a característica de possuir um aumento gradativo da sua performance computacional quando comparado com os outros métodos. Considerando uma geometria com  $N$  superfícies, como já dito anteriormente, este método realizará os mesmos procedimentos na ausência ou presença de superfícies obstrutoras. Para cada superfície onde posiciona-se o Hemi-Cubo, calcula-se uma linha da matriz de fator de forma ( $N$  cálculos) de uma vez só, utilizando os mesmos procedimentos de projeção e verificação da distância da superfície projetada até ao *pixel*. Este algoritmo faz com que o método Hemi-Cube calcule  $N^2$  fatores de forma sem nenhum esforço adicional para a verificação de obstruções. Como utilizamos a Lei da Reciprocidade para diminuir o número de cálculos a serem realizados, o método do Hemi-Cube calcula somente  $N(N-1)/2$  fatores de forma. O único fator que influencia o tempo de processamento é a resolução do Hemi-Cubo.

Por outro lado os métodos da Dupla Discretização e Integral de Contorno além de processarem  $N(N-1)/2$  fatores de forma, necessitam realizar verificações para saber quais elementos estão obst2(st)-12.2(31v2(st)-ndo)-331.4(o)-321.4(cam)-3.4(po)-321.4(de)-317.4(vv2(st)-são)-3 para cada par de superfícies precisamos realizar  $N(N-1)(N-2)/2$  checagens por superfícies obstrutoras, fornecendo um processo da ordem de  $N^3$

De posse destas informações e analisando o gráfico da Fig.6.25 podemos verificar que para um número pequeno de superfícies os procedimentos genéricos realizados pelo método do Hemi-Cube são mais morosos que os procedimentos para verificação de obstruções e discretizações apresentados pela Dupla Discretização e Integral de Contorno, mas a medida que o número de superfícies vai aumentando, esta situação se inverte.

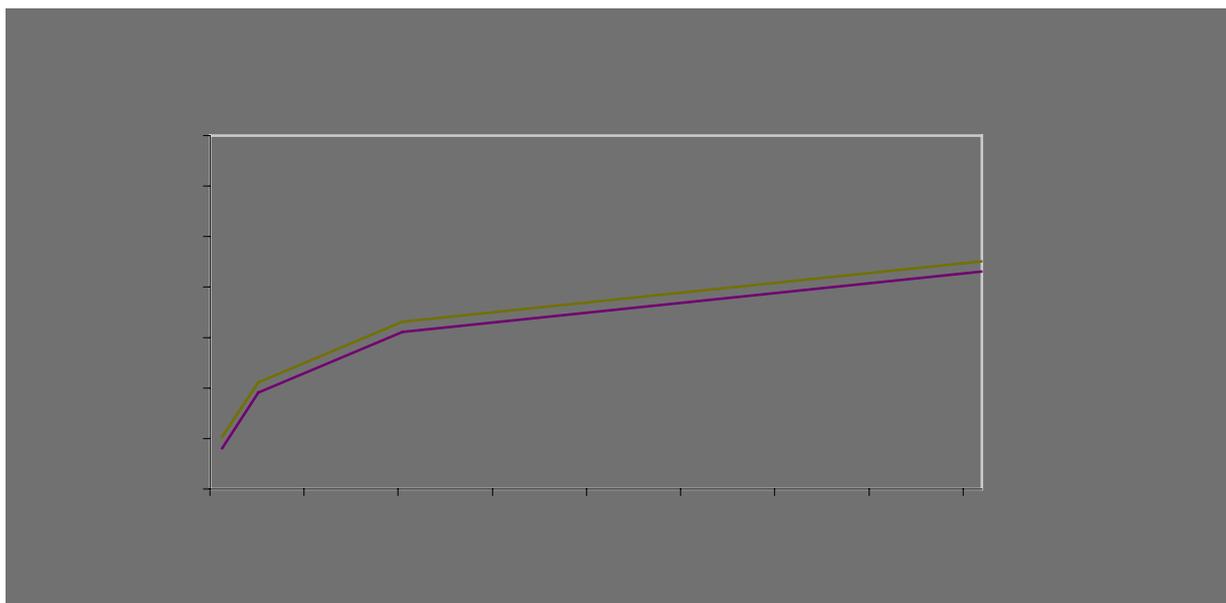
Os fatos aqui apresentados serão também evidenciados no exemplo a seguir, onde foi testado uma geometria um pouco mais complexa envolvendo, um número maior de superfícies.

### 6.3.3 Paralelepípedo com Obstrução

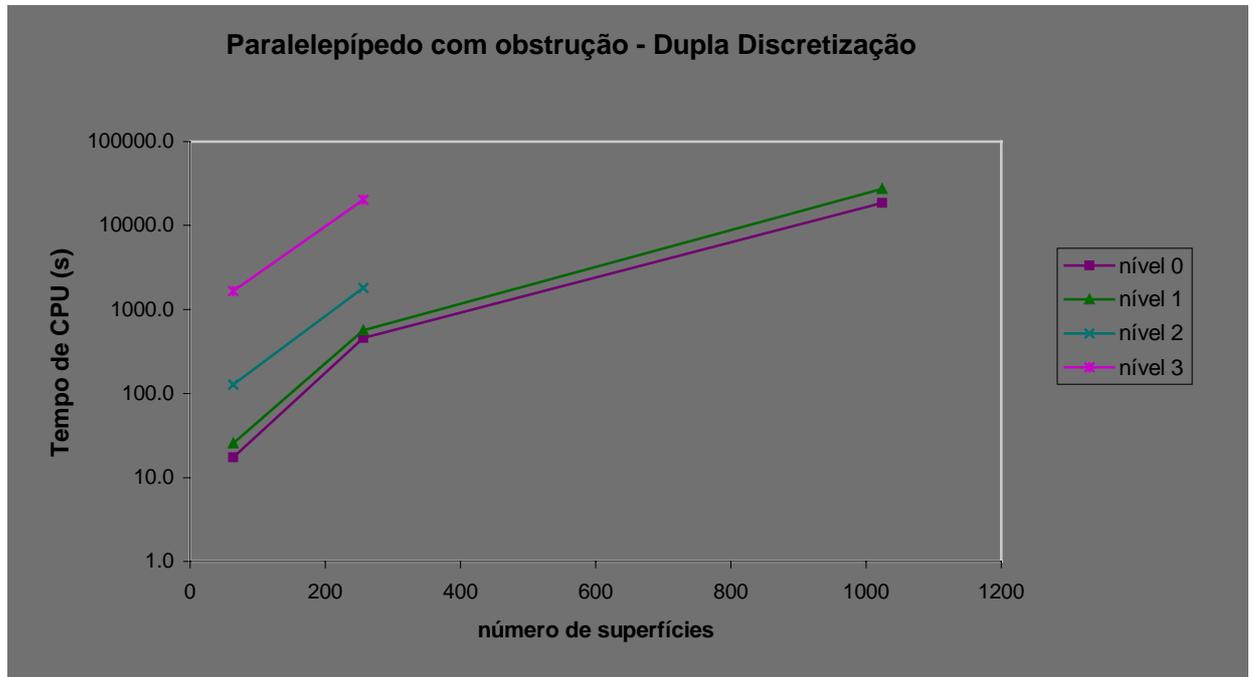
O último teste realizado com os algoritmos de cálculo do fator de forma consiste na geometria da Fig.6.21. Neste teste foi também utilizado um microcomputador modelo Pentium III 700 MHz com 512 Mb de memória RAM. O objetivo aqui é o mesmo que o anterior, a análise do tempo de processamento dos métodos frente a uma configuração mais complexa. Como a geometria em questão possuía um número maior de superfícies originais, o teste iniciou-se com 64 elementos da malha radiativa e o objetivo era ir aumentando o nível de refinamento para 256, 1024 e 4096 superfícies. Em virtude do tempo de processamento ser extremamente longo, não foi possível realizar as análises para o número maior de superfícies, sendo os resultados obtidos apresentados na Fig.6.26, 6.28 e 6.29.

Apesar da Fig. 6.26 ilustrar os resultados para todas as faixas de superfícies variando-se a resolução do Hemi-Cubo de 4x4 até 200x200, foram simulados somente as resoluções de até 100x100. A curva de 200x200 foi construída por analogia, a partir da observação de que a relação do aumento do tempo de processamento da resolução de 100x100 para 200x200 neste caso devia ser a similar a que foi obtida no caso anterior, entre as duas placas paralelas com obstrução. Isto foi constatado em virtude desta relação ser verdade para as resoluções de 10x10 para 20x20, de 20x20 para 50x50 e de 50x50 para 100x100. Assim sabendo a relação do caso anterior de quantas vezes o tempo de CPU aumentava quando variava de 100x100 para 200x200, obtemos a curva para o presente caso.

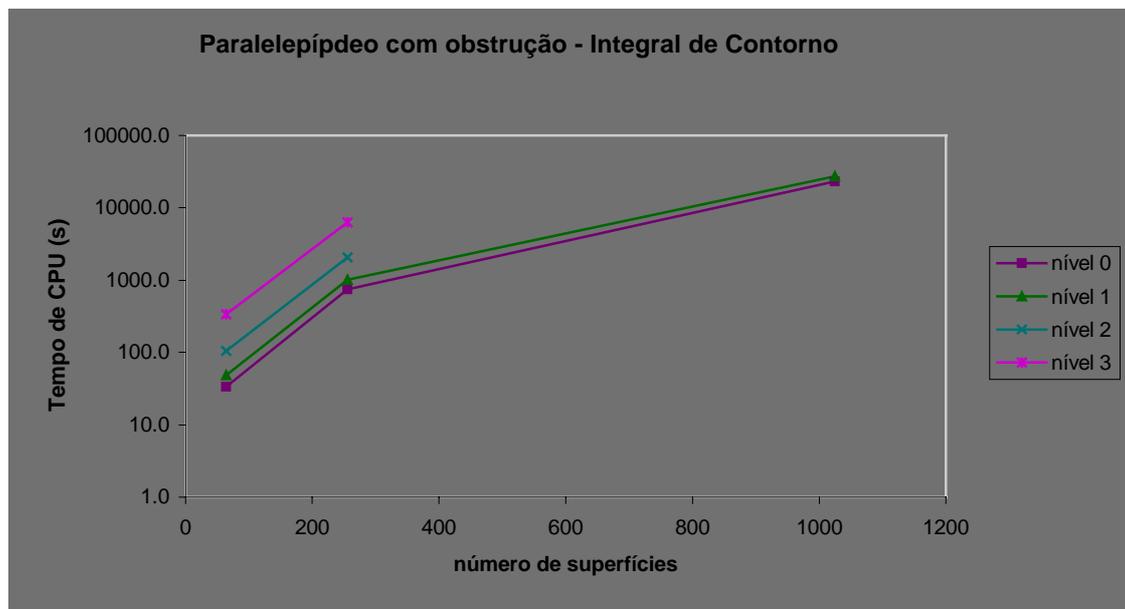
É importante salientar que as conclusões acima apresentadas tiram proveito da observação do comportamento aproximadamente linear do método do Hemi-Cube em função do número de superfícies envolvidas, pois os esforços computacionais na presença de uma ou mais superfícies obstrutoras tende a ser o mesmo.



O resultado obtido nos testes para esta configuração para o método da Dupla Discretização e Integral de Contorno são apresentados a seguir.



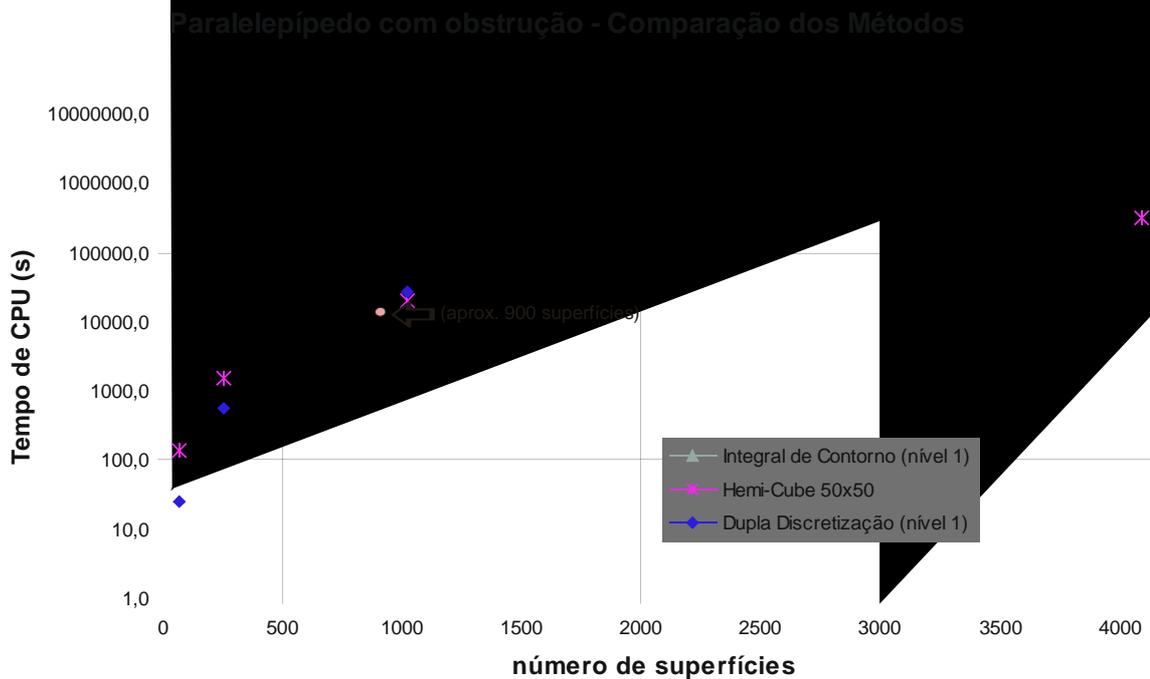
**Figura 6.28– Paralelepípedo com obstrução: Performance do método da Dupla Discretização**



**Figura 6.29– Paralelepípedo com obstrução: Performance do Método da Integral de Contorno**

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,841 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 9:59 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 156 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

Finalmente  
anterior e ratific  
ssráficos) 2017 ApF -



**Figura 6.30– Paralelepípedo com obstrução: Comparação da performance dos métodos**

De maneira análoga podemos verificar que a partir de um determinado número de superfícies (neste caso aprox. 900) o método Hemi-Cube com uma resolução de 50x50 começa a apresentar-se mais rápido computacionalmente quando comparado com o método da Integral de Contorno e Dupla discretização utilizando um nível 1 de sub-divisões na superfície.

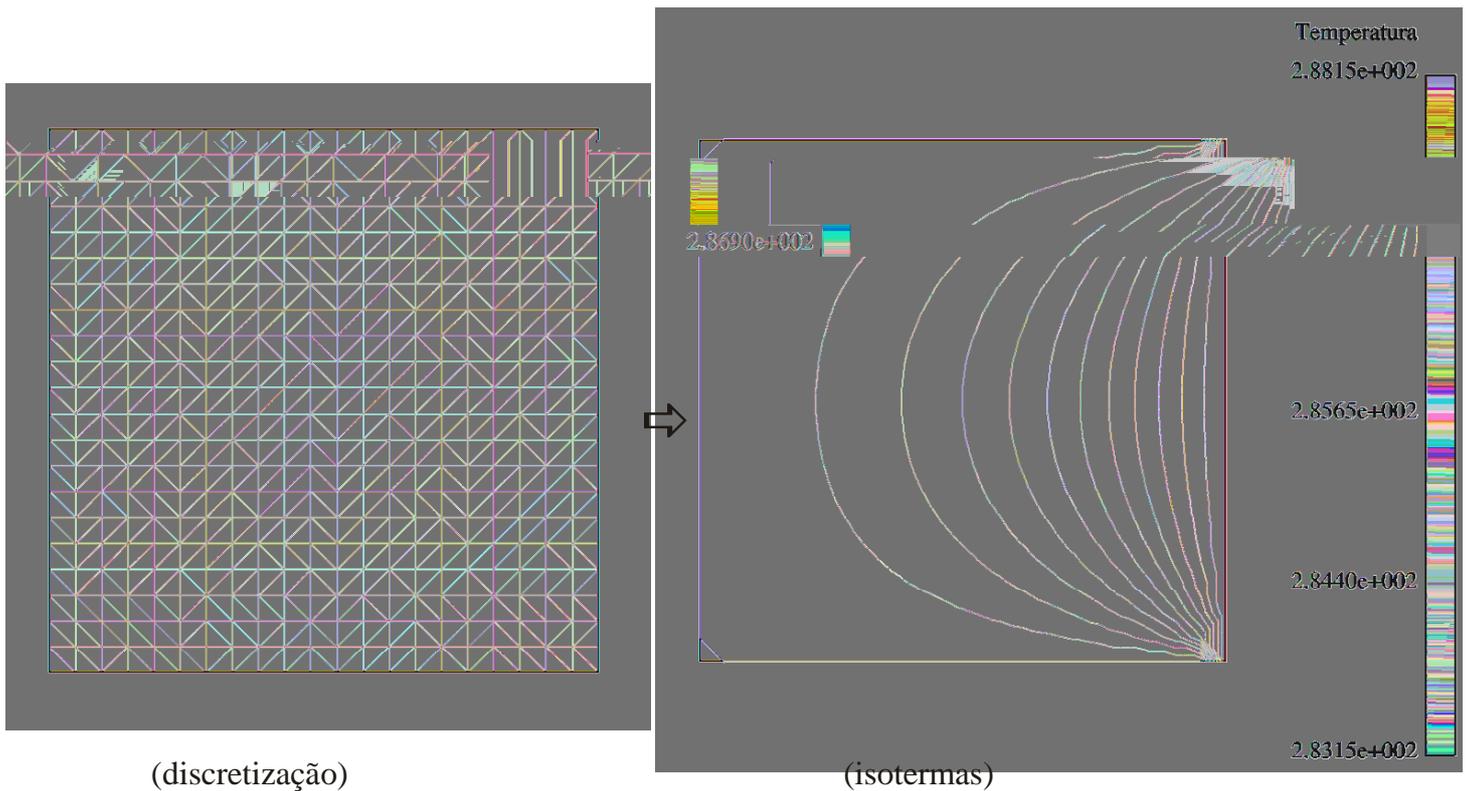
## 6.4 Validação Numérica dos Métodos para a Solução do Problema Radiativo-Conduutivo

Esta seção tem o objetivo de apresentar os testes realizados para a validação numérica dos algoritmos implementados. Para este fim, dois casos testes foram modelados os resultados encontram-se a seguir. Em virtude da escassez de soluções padrão envolvendo aplicações

práticas disponíveis na literatura, foram utilizados problemas simples e de fácil comparação.

### **6.4.1 Condução Bi-Dimensional**

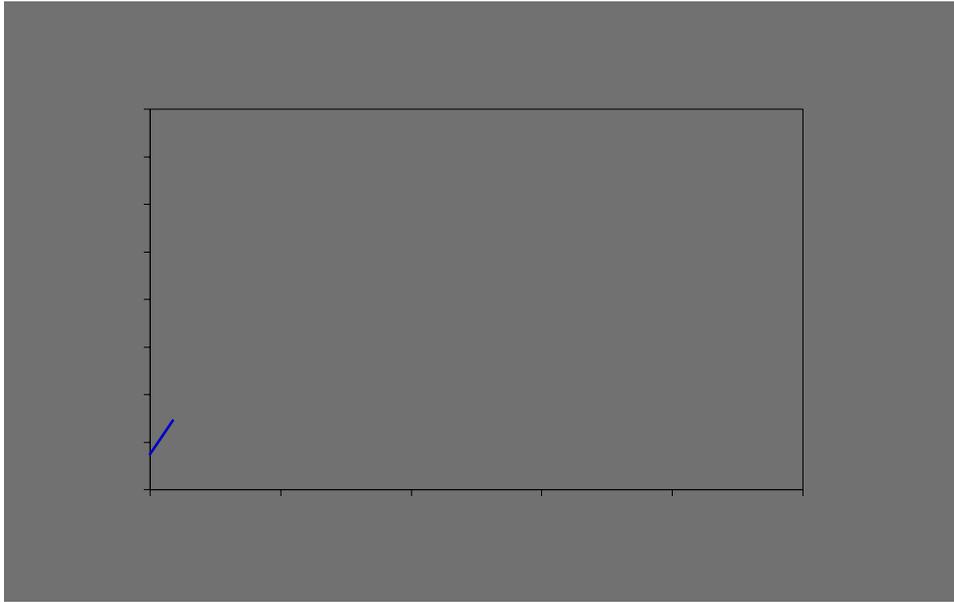
O primeiro caso simulado, ilustrado na Fig.6.31, visou a comparação somente do



**Figura 6.32– Malha simulada e campo de isotermas obtidos o problema da condução bi-dimensional em uma placa plana com temperatura prescrita nas faces**

A Fig.6.32 ilustra a malha triangular utilizada e o campo de isotermas obtidos da simulação. A comparação com a solução analítica é apresentada na Fig.6.33 e na Fig.6.34. Nestas figuras os perfis de temperatura ao longo das retas  $x = 0,5$  e  $y = 0,5$  obtidos com a solução analítica é apresentado juntamente com a solução numérica.

Analisando estes gráficos podemos concluir que o algoritmo construído baseado nas técnicas de CVFEM, utilizado aqui para resolver o problema da condução está corretamente implementado.



através do fenômeno da radiação. Este problema está ilustrado na Fig.6.35.

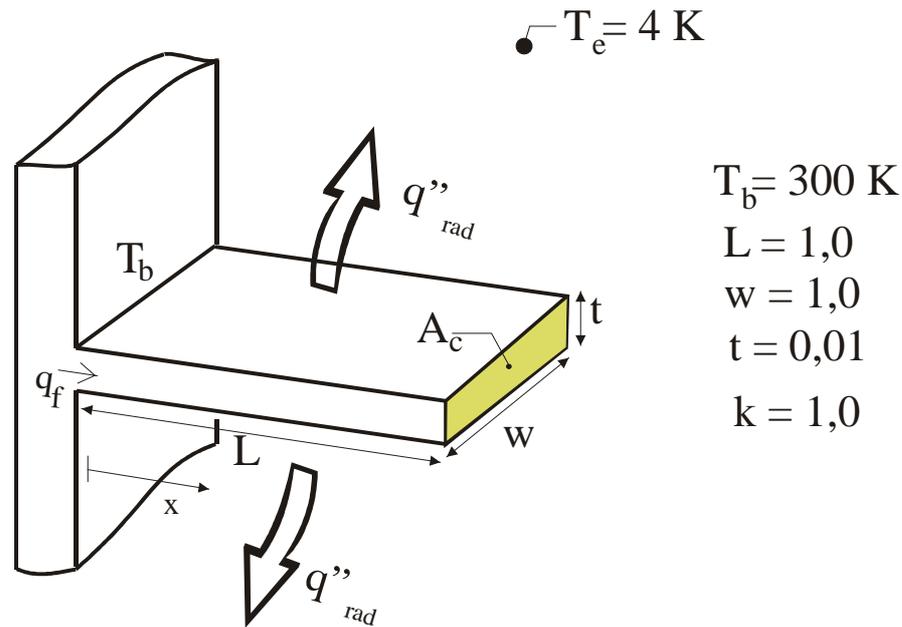


Figura 6.35– Problema da aleta radiativa

Analisando Fig.6.35 podemos perceber que a transferência de calor ao longo da aleta será unidimensional. Em virtude da dificuldade de obtermos uma solução analítica para este problema, foi construído um algoritmo especial para resolver a equação que governa a troca de calor nesta superfície expandida.

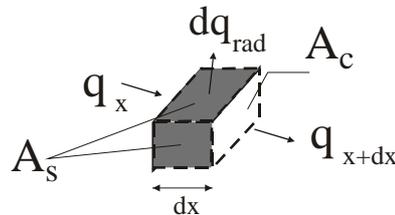


Figura 6.36– Balanço de energia em um volume de controle de uma aleta radiativa

Realizando um balanço de energia em um volume de controle infinitesimal, de acordo com a Fig.6.36, obtemos a seguintes expressões

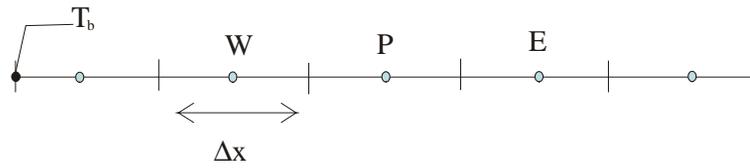
$$q_x = q_{x+dx} + dq_{rad} \tag{6.6}$$

onde,

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}, \quad (6.7)$$

$$q_x dx = q_x \frac{dq_x}{dx} dx$$

volumes finitos (Maliska, 1995), integrando a Eq.6.15 ao longo do elemento  $P$ , na malha unidimensional ilustrada na figura a seguir.



**Figura 6.37– Malha unidimensional para o problema da aleta radiativa**

Como o termo fonte  $S(T)$  da Eq.6.15 é altamente não linear, propomos uma linearização da seguinte forma

$$S(T) = S_p T + S_c \tag{6.17}$$

onde,

$$S_p = -C_1 T^3, \text{ e} \tag{6.18}$$

$$S_c = C_2 \tag{6.19}$$

Após a integração da Eq.6.15 ao longo do volume  $P$ , e aplicando as condições de contorno de temperatura prescrita na base da aleta e de fluxo nulo na extremidade, obtemos o seguinte conjunto de expressões algébricas que necessitam de ser resolvidas para a obtenção do campo de temperaturas

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + B \tag{6.20}$$

onde os coeficientes desta equação para os volumes dos centros são dados por

$$A_e = A_w = \frac{1}{\Delta x} \tag{6.21}$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \Delta x \tag{6.22}$$

$$B = S_c \Delta x \tag{6.23}$$

Para o canto esquerdo, onde a temperatura é prescrita temos

$$A_e = \frac{1}{\Delta x}, A_w = 0 \quad (6.24)$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \Delta x + \frac{2}{\Delta x} \quad (6.25)$$

$$B = S_c \Delta x + \frac{2T_b}{\Delta x} \quad (6.26)$$

Finalmente, na extremidade da aleta onde o gradiente de temperatura é nulo temos

$$A_w = \frac{1}{\Delta x}, A_e = 0 \quad (6.27)$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \Delta x \quad (6.28)$$

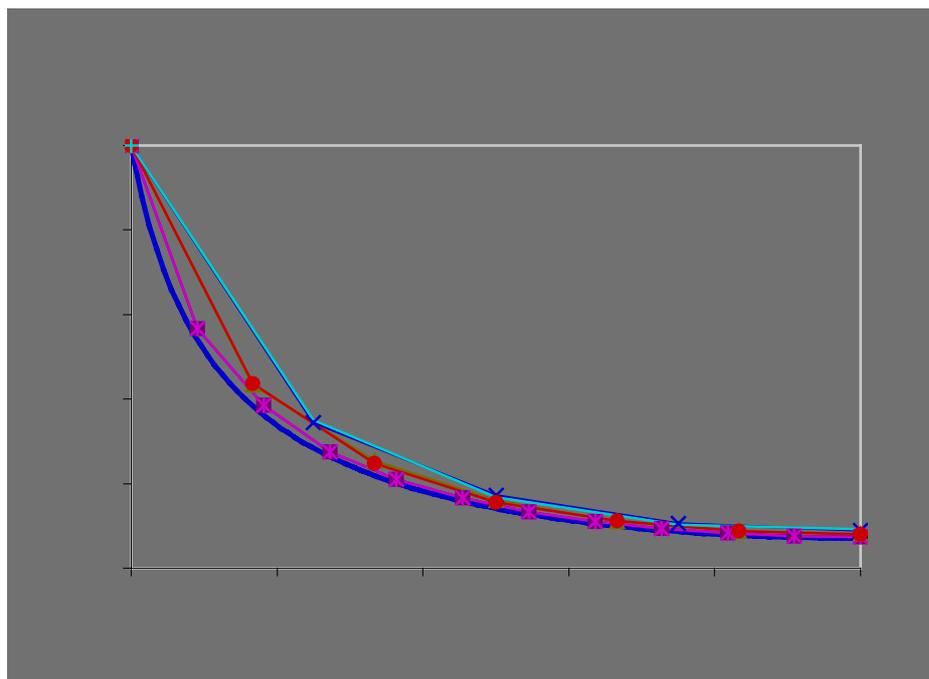
$$B = S_c \Delta x \quad (6.29)$$

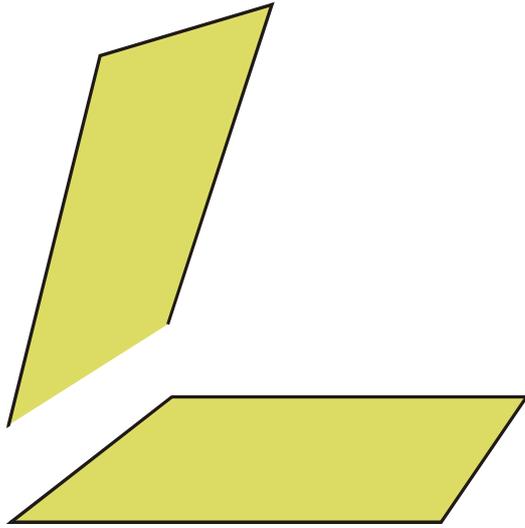
No presente trabalho o sistema apresentado na Eq.(6.20) foi resolvido utilizando um solver iterativo ponto a ponto e a malha utilizada possuía 100 elementos ao longo da aleta.

Os resultados obtidos com a solução acima descrita estão apresentados na Fig.6.38 na curva chamada *Benchmark*.

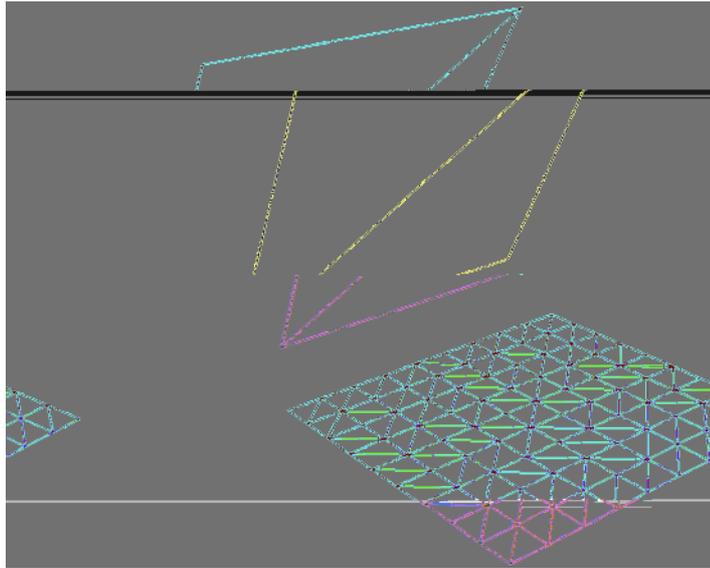
Como o objetivo na obtenção desta solução era a validação dos algoritmos bidimensionais construídos para resolver o problema radiativo-condutivo utilizando os métodos de Gebhart e da Radiosidade, é ilustrado neste gráfico também as soluções obtidas com estes códigos utilizando malhas condutivas idênticas as malhas radiativas, possuindo 25, 49 e 144 nós. A única alteração na solução deste problema é que para compararmos estes dois algoritmos com a solução unidimensional, tivemos que, nesta última, desprezar as trocas de calor nas superfícies laterais da aleta, pois os algoritmos aqui desenvolvidos desconsideram as faces laterais. Isto é facilmente introduzindo alterando-se o perímetro da aleta da Fig.6.35.

Analisando este gráfico podemos perceber que a medida que vamos refinando a malha os dois algoritmos caminham para a mesma solução *Benchmark*. Praticamente, neste estudo, não é verificado nenhuma diferença com relação as aproximações realizadas nos métodos da Radiosidade e Gebhart acoplados com a solução do algoritmos que resolve a condução de calor. Para a mesma malha as diferenças entre os resultados são mínimas.





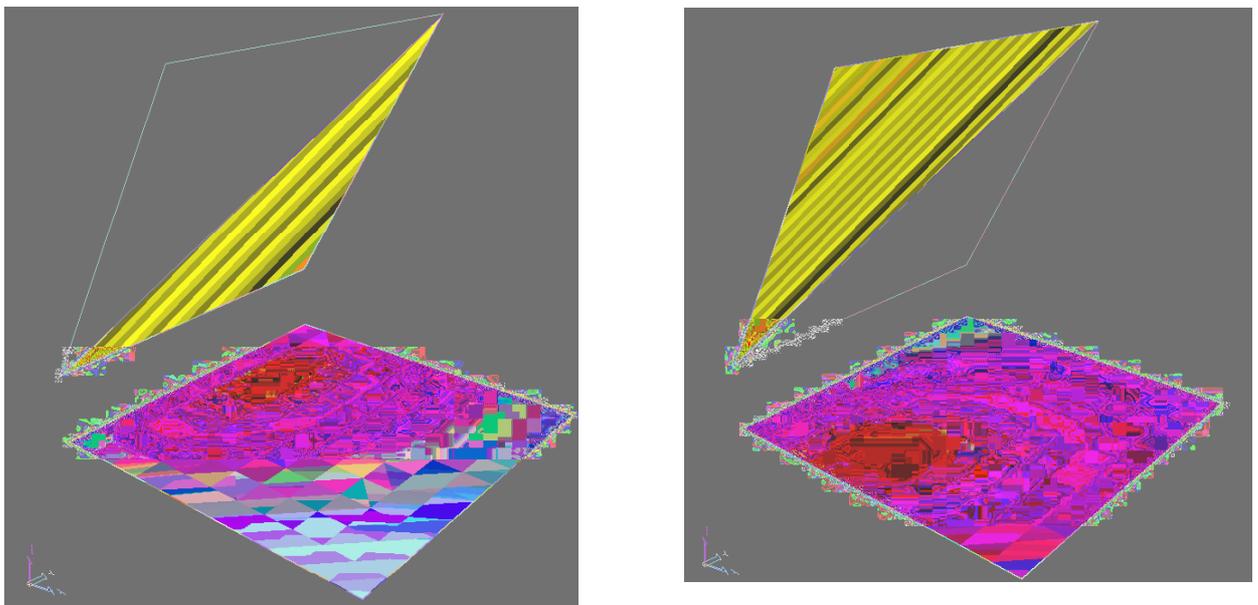
Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,842 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 10:00 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 156 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)



**Figura 6.40– Malha utilizada para o problema radiativo-condutivo**

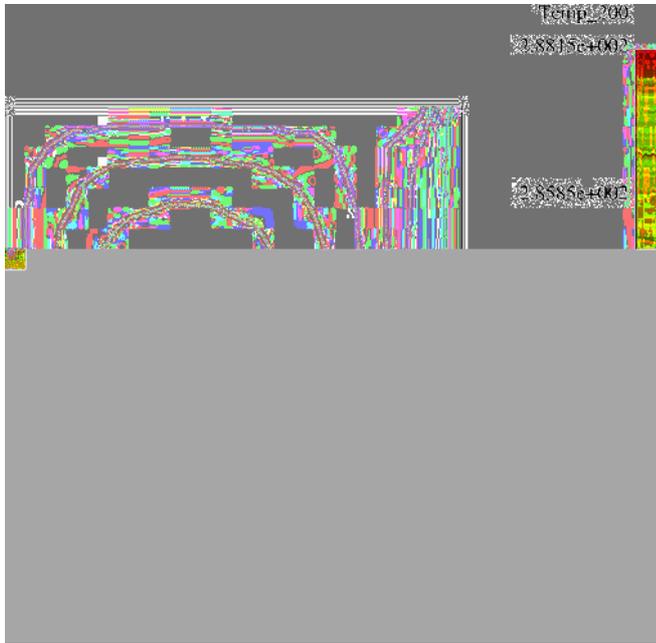
Analisando a figura anterior, podemos perceber que malha da superfície  $A_1$  é grosseira, pois nela já conhecemos a temperatura. Como não temos obstruções, este fator também não influenciara no cálculo das trocas radiativas.

De posse desta discretização, foi calculado o fator de forma entre os elementos triangulares das superfícies e deles para o espaço. O campo de fator de forma de cada um dos elementos triangulares de  $A_2$  para os elementos de  $A_1$  é mostrado na Fig.6.41.

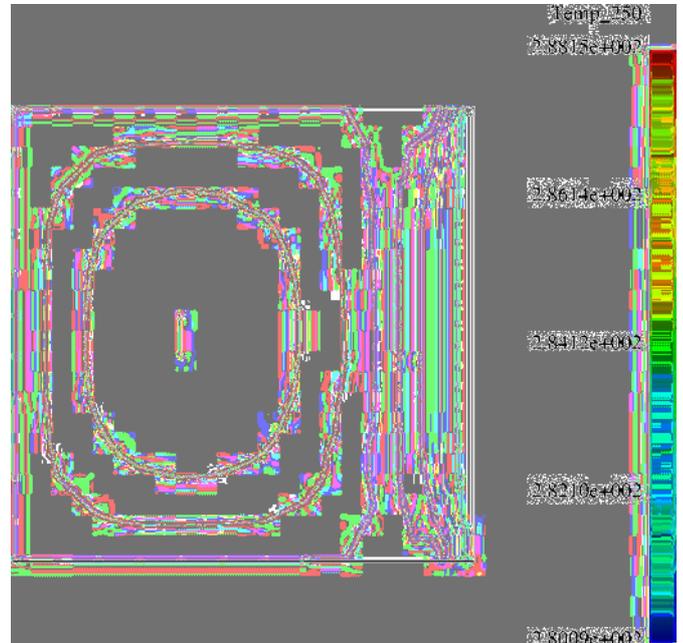


**Figura 6.41– Campo de fator de forma para o problema radiativo-condutivo**

Foram simulados 10 situações, para  $T_2 = 200, 250, 273,15, 300, 350, 400, 450, 500, 550$  e  $600\text{K}$ . A título ilustrativo, a isothermas em  $A_1$  para estas diversas situações são apresentadas da Fig.6.42 até Fig.6.46.

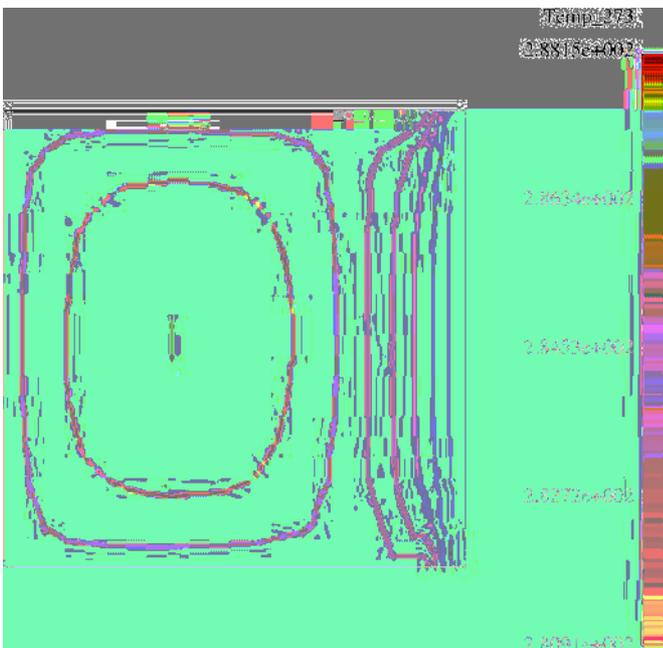


$T_2 = 200\text{ K}$

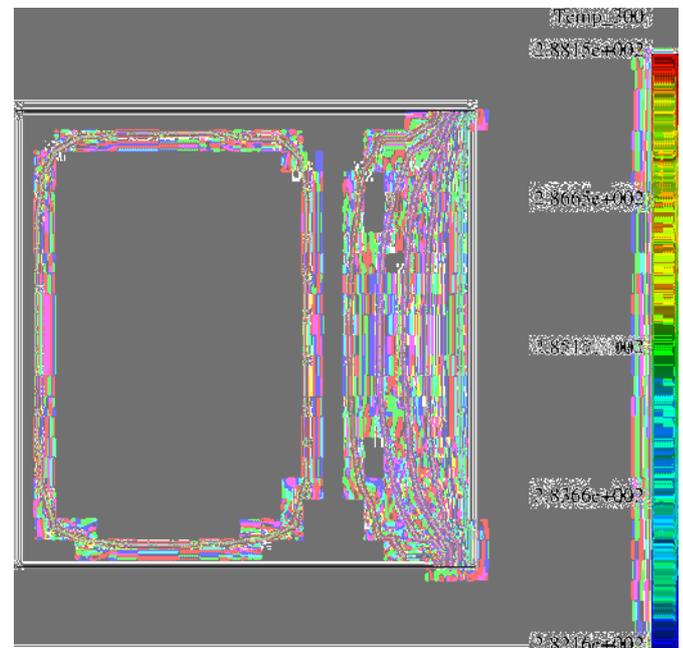


$T_2 = 250\text{ K}$

**Figura 6.42–Isothermas obtidas do problema radiativo-condutivo ( $T_2 = 200$  e  $250\text{ K}$ )**



$T_2 = 273,15\text{ K}$



$T_2 = 300\text{ K}$

**Figura 6.43– Isothermas obtidas do problema radiativo-condutivo ( $T_2 = 273$  e  $300\text{ K}$ )**

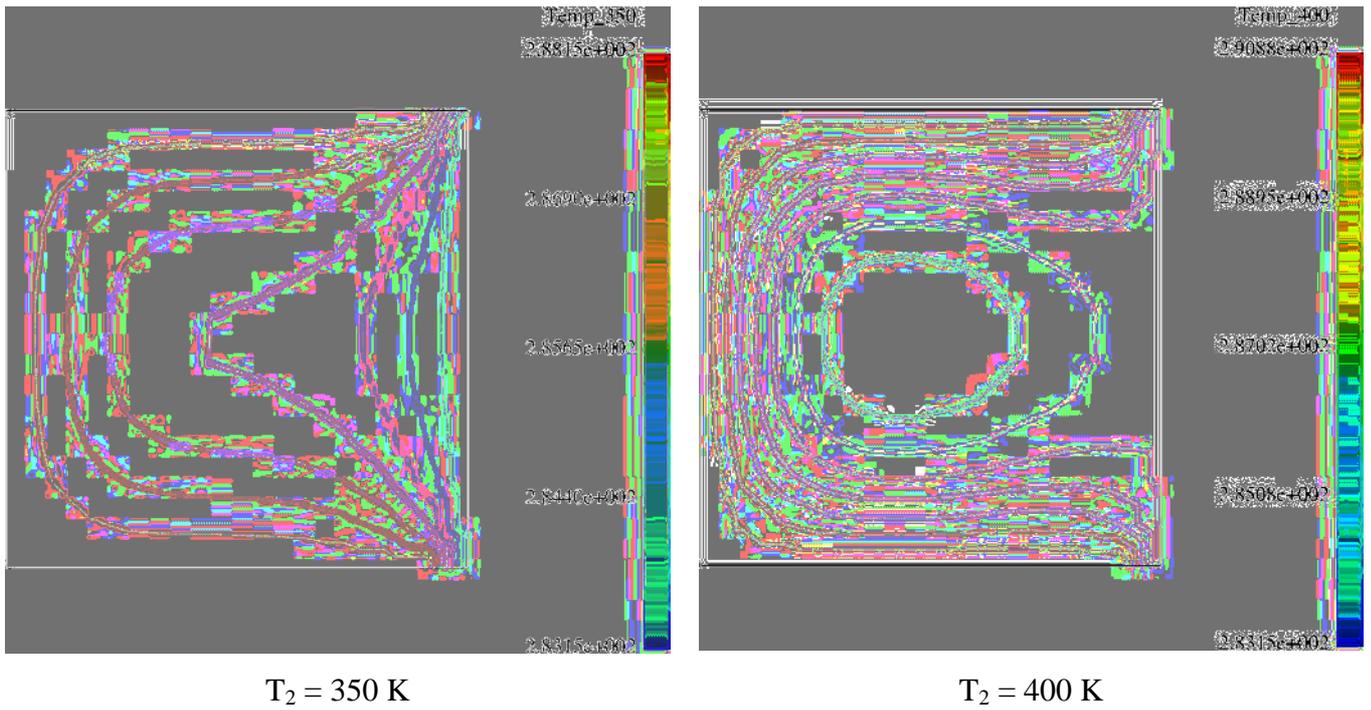
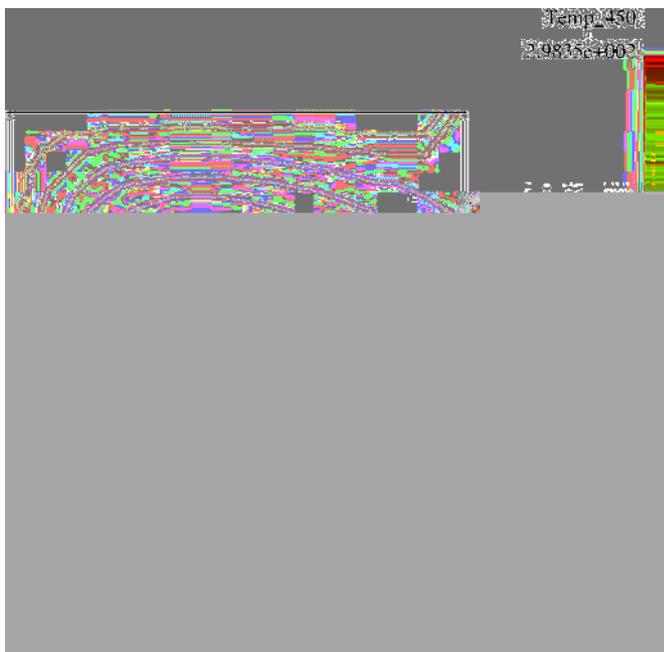
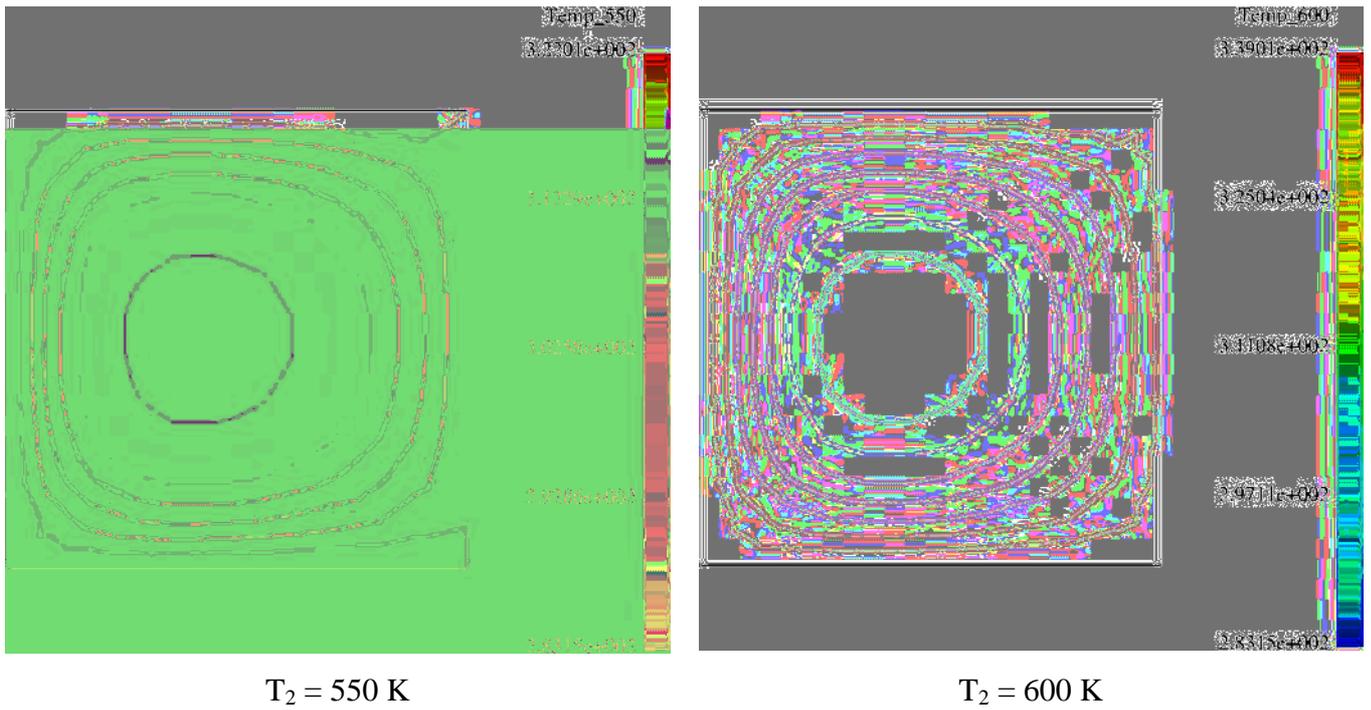


Figura 6.44– Isothermas obtidas do problema radiativo-condutivo ( $T_2 = 350$  e  $400 \text{ K}$ )





**Figura 6.46– Isothermas obtidas do problema radiativo-condutivo ( $T_2$ )**



observar que o fato de aumentarmos o caráter radiativo do problema dificulta um pouco a convergência. Observa-se também que necessitamos de um número bastante reduzido de iterações entre as equações para obtermos a c

iterativo, esta convergência poderia ser melhorada se em um momento adequado fosse aumentado gradativamente este coeficiente de relaxação. Este procedimento não foi feito neste estudo.

difícil a obtenção de valor ótimo recomendado para todos os casos.

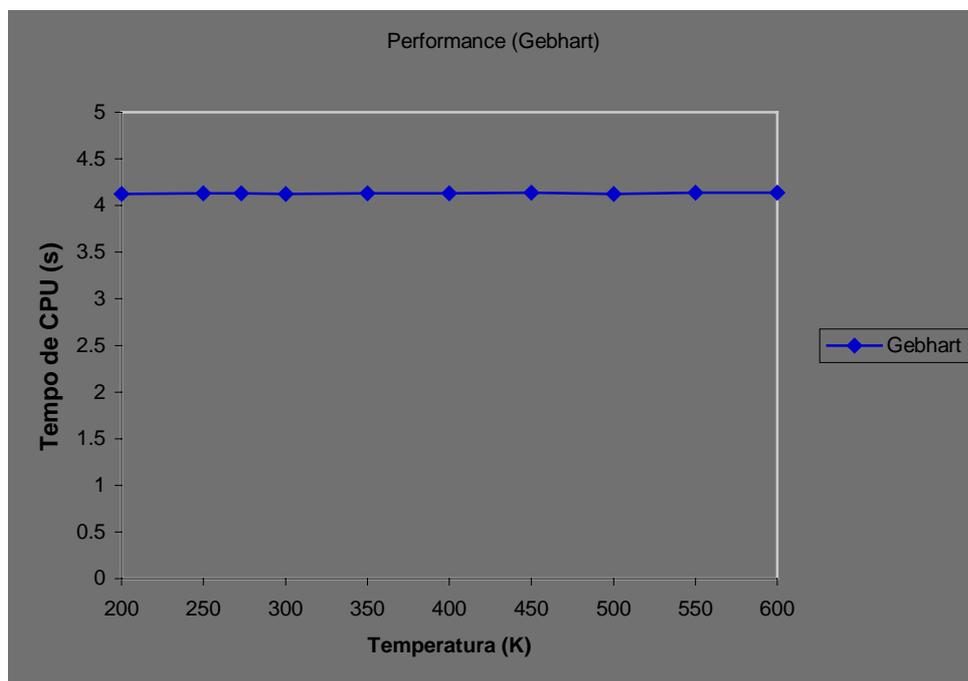
Neste problema, com já dito, foi utilizado um coeficiente de relaxação de 0,03. Tentou-se, obviamente, valores um pouco maiores, como 0,1, mas o problema divergia mesmo para

É fácil de perceber que todos os fatores anteriormente citados são extremamente sensíveis ao valor deste coeficiente de relaxação. Como existe um valor ótimo para cada problema, em caráter de convergência, este método apresenta-se muito inferior ao método de Gebhart.

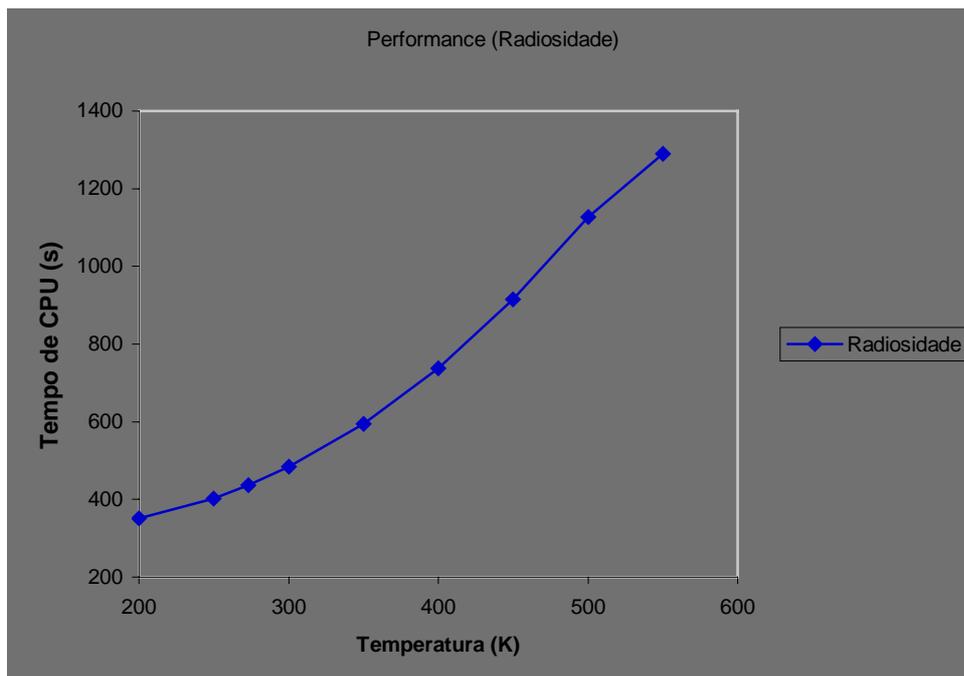
Além da convergência, o tempo de computação deve ser avaliado para podermos possuir uma comparação ideal sobre as eficiências computacionais dos métodos, pois de nada adianta termos métodos com excelente taxa da convergência mas que demoram demasiadamente para realizar cada iteração. Este assunto é o objeto de análise da próxima seção.

### 6.5.1.2 Análise do Tempo de Processamento

Os gráficos a seguir, apresentados na Fig.6.51 e 6.52 ilustram o tempo de processamento necessário para a obtenção do tempo da convergência nos dois métodos em estudo. Estes tempos de processamento foram obtidos em um microcomputador Pentium III 700 Mhz com 256 Mb de memória RAM.



**Figura 6.51– Tempo de processamento do método de Gebhart para diversos valores de  $T_2$**



**Figura 6.52– Tempo de processamento do método da Radiosidade para diversos valores de  $T_2$**

Analisando as figuras acima, podemos verificar que o tempo de processamento necessário para a atingirmos a convergência utilizando o método de Gebhart praticamente não se altera a medida que vamos aumentando a temperatura  $T_2$ . Deve-se lembrar que o tempo de processamento mostrado no gráfico da Fig.6.51 inclui o cálculo dos acoplamentos radiativos conforme descrito no Capítulo 4. Ressalta-se que o tempo necessário para o cálculo dos acoplamentos radiativos é o mesmo para todas as situações simuladas, pois os acoplamentos não são função da temperatura e somente das propriedades dos materiais e do fator de forma entre os elementos.

Em média, o tempo necessário para o cálculo dos acoplamentos radiativos, para esta situação e com esta malha, é em torno de 4 segundos, sendo que o restante, aproximadamente 0,20 segundos, é o tempo necessário para a realização de todas as iterações do método de Newton. Acredita-se que o tempo de CPU para obtemos a convergência com o método de Newton deva crescer um pouco em virtude do aumento do caráter radiativo do problema, mas por estarmos tratando com valores muito pequenos, esta pequena diferença não tenha sido captada pelos sistemas de verificação de tempo de processamento utilizados neste estudo.

Por outro lado, analisando o gráfico da Fig.6.52 podemos verificar que o tempo de processamento utilizando o método das Radiosidades aumenta exponencialmente com o

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336

aumento do caráter radiativo do problema. Isto é uma consequência direta do grande número de iterações necessário para a obtenção da convergência.

De posse destas duas análises envolvendo tempo de processamento e a convergência do

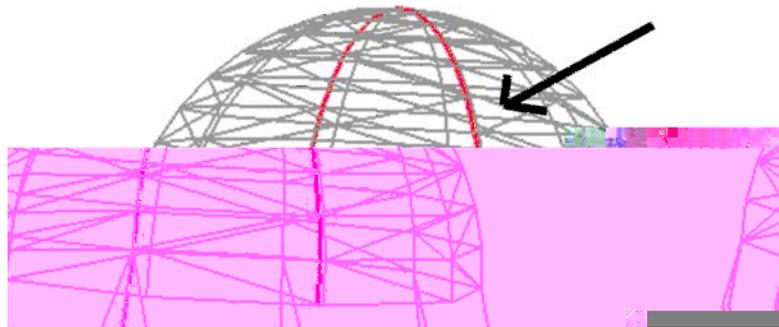
hemisfério, ao longo de uma linha que contorna a abertura da face lateral, a temperatura é mantida a 200K.

Todas as superfícies deste problema trocam calor por radiação pelos dois lados, sendo que a emissividade da superfície lateral e da base vale 0,8 e a emissividade do topo vale 0,5.

O objetivo deste problema é avaliar a influência da radiação sobre a temperatura no topo desta geometria, ou seja, ao longo do hemisfério. Assim, foram simulados duas situações: a primeira envolvendo somente a troca  $t_i = 607$  K e  $t_r = 5$  K e a segunda envolvendo



Fig.6.58 apresenta o perfil de temperatura ao longo da linha que corta o hemisfério na direção  $z$  (Fig.6.57).



**Figura 6.57–Posição da linha ao longo do hemisfério**

## **7 Conclusões e Recomendações**

---

### **7.1 Conclusões**

O presente trabalho apresentou três metodologias diferentes para o cálculo do fator de forma entre superfícies difusas cinzentas na presença de obstruções. Foi implementado um algoritmo para a diminuição do número de checagens por superfícies obstrutoras sendo aqui utilizado nos métodos da Dupla Discretização com aproximação de disco e Integral de Contorno utilizando a expressão de Mitalas-Stephenson. Estes dois métodos foram comparados com o método Hemi-Cube em aspectos como precisão e performance computacional. Uma seqüência de testes foi realizada para avaliar o desempenho dos métodos frente a diferentes configurações geométricas. Analisando os resultados obtidos podemos concluir que:

- Na ausência de obstruções o método da Integral de Contorno com a aproximação de Mitalas-Stephenson fornece os melhores resultados aliado a um reduzido tempo de processamento. Estes excelentes resultados são obtidos avaliando a integral analiticamente na presença de contor

sobre os outros métodos com relação ao tempo de processamento e precisão. Esta situação se inverte quando a geometria fica mais complexa e obstruções são consideradas, sendo este método o que apresenta melhor relação precisão x tempo de processamento. Isto faz com que o Hemi-Cube seja, dos três métodos estudados, o método mais recomendado para situações reais de engenharia.

Com relação à solução da condução de calor bi-dimensional em placas delgadas, o presente trabalho estudou o método CVFEM utilizando malhas triangulares. Esta solução foi acoplada com a solução do problema radiativo, considerando as superfícies difusas cinzentas, utilizando duas metodologias diferentes. A primeira estratégia utiliza o método de Gebhart e lineariza a equação resultante utilizando o método de Newton. A segunda abordagem resolve a matriz de radiosidades e a matriz de condução sucessivamente. Após a validação destes algoritmos um teste é apresentado para avaliarmos o desempenho destas metodologias. Sobre os resultados destas duas metodologias de solução do problema radiativo-condutivo podemos concluir:

- A solução envolvendo o método das Radiosidades apresenta-se muito instável e demorada. Sua convergência é fortemente dependente do coeficiente de relaxação utilizado. Estas características fazem com que a metodologia aqui empregada não seja recomendada para problemas com forte característica radiativa.
- Para obtermos uma melhor eficiência com a solução envolvendo o método das Radiosidades recomenda-se empregar um coeficiente de relaxação variável ao longo do processo iterativo.
- A solução do problema utilizando o método de Gebhart com a linearização de Newton demonstrou ser robusta e rápida. Esta metodologia também apresenta-se pouco sensível ao aumento das características radiativas do problema. Em virtude do reduzido número de iterações necessárias o tempo maior de processamento é mais influenciado pelo cálculo dos acoplamentos radiativos do que pela solução do campo de temperaturas.

## 7.2 Recomendações para Futuros Trabalhos

Após a conclusão deste estudo novas possibilidades de pesquisa podem surgir com o

intuito de agregar maior realidade física aos modelos construídos ou a melhoria dos modelos já existentes. Visando estes objetivos, recomenda-se que os futuros trabalhos enfoquem:

- Consideração de materiais com superfícies especulares e direcionais. Isto significa que novas técnicas para o cálculo do fator de forma que considerem estes comportamentos precisam ser pesquisadas e implementadas. Nesta direção, sugere-se que as pesquisas envolvendo o método de Monte Carlo devam oferecer bons resultados.
- Utilização de algoritmos implementados em nível de *hardwares* gráficos para a otimização do método Hemi-Cube, buscando um aumento da performance computacional.
- Pesquisa em métodos de computação gráfica utilizando algoritmos que visam acelerar as operações de projeções, *clipping* e interseção de raios.
- Utilização de técnicas de processamento paralelo, tanto para o cálculo de fator de forma, quanto para a solução dos sistemas lineares.
- Consideração das trocas radiativas no espectro visível e acoplamento com as solução do espectro infra-vermelho.
- No caso de aplicações espaciais, sugere-se também a implementação de rotinas para o cálculo de órbitas e do posicionamento dos objetos com relação ao sol e a terra para que possamos determinar as cargas térmicas incidentes do albedo e infra-vermelho terrestre e da radiação direta incidente do sol.

## **Referências Bibliográficas**

---

ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. A. "*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.*" National Bureau of Standards Applied Mathematics Series #55, Washington DC, p. 916, 1964

AUPPERLE, L. "*Hierarchical algorithms for illumination.*"

- EMERY, A. F. “*View – A radiation view factor program with interactive graphics for geometry definition (version 5.5.3.)*.” NASA’s Computer Software Management and Information Center, Athens GA, 1986.
- “*ESATAN Engineering Manual.*” EM - ESATAN - 056. Version 6.1, ALSTOM Energy Technology Centre, 1998.
- FOLEY, J. D., VAN DAM, A., FEINER, S. and HUGHES, J. “*Computer Graphics: Principles and Practice.*” Second Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.
- GASKI, J. D. “*SINDA 1987/ANST.*” Network Analysis Associates, Inc. POB 8007, Fountain Valley, CA, 1992.
- GEBHART, B. “*Surface temperature calculations in radiant surroundings of arbitrary complexity – for gray, diffuse radiation.*” Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 3, nº 4, p. 341-346, 1961.
- \_\_\_\_\_. “*Heat Transfer.*” McGraw-Hill, New York, 1961.
- GORAL, C. M., TORRANCE, K. E., GREEMBERG, D. P., BATTAILLE, B. “*Modeling the Interaction of Light Between Diffuse Surfaces.*” ACM – Computer Graphics, p. 213-222, Proceedings 1984.
- GROSS, U. and SPINDLER, K. and HAHNE, E. “*Shapefactor Equations for Radiation Heat Transfer Between Plane Rectangular Surfaces of Arbitrary Position and Size With Parallel boundaries*”, Letters and Heat and Mass Transfer, Vol. 8, pp. 219-227, 1981.
- HAMILTON, D.C. and MORGAN, W.R. “*Radiant Interchange Configuration Factors*”, NACA TN-2836, 1952.
- HANRAHAN, P. and SCHRÖDER, P. “*On the form factor between two polygons.*” Computer Graphics (SIGGRAPH '93 Proceedings), Annual Conference Series, August 1993.
- HANRAHAN, P., SALZMAN, D. and AUPPERLE, L. “*A rapid hierarquical radiosity algorithm.*” Computer Graphics (SIGGRAPH '91 Proceedings), vol. 25, nº 4, p. 197-206, 1991.
- \_\_\_\_\_. and TELLER, S. “*Global visibility algorithms for illumination computations.*” Computer Graphics (SIGGRAPH '94 Proceedings), p. 443-450, June 1994.
- HOTTEL, H. C. “*Radiant Heat transmission.*” In: Heat Transmission, 3<sup>rd</sup> ed., chapter 3, McGraw-Hill, New York, 1954.
- HOWELL, J.R. “*A Catalog of Radiation Configuration Factors*”, McGraw-Hill, New York, 1982.

- IMMEL, D. S., COHEN, M. F. and GREENBERG, D. P. “A radiosity method for non-diffuse environments.” Computer Graphics (SIGGRAPH `86 Proceedings), vol. 20, nº 4, p. 133-142, August 1986.
- INCROPERA, F. P. e DE WITT, D. P. “Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.” 3ª ed., Edit. Guanabara-Koogan, Rio de Janeiro, 1992.
- KADABA, P. V. “Thermal Radiation View Factor Methods, Accuracy and Aided Computer”, NASA/MSFC Report, Contract NGT-01-002-009, 1982.
- KAJIYA, J. T. “The Rendering Equation.” Computer Graphics (SIGGRAPH `86 Proceedings), vol. 20, nº 4, p. 143-150, August 1986.
- KELLER, A. “A Quasi – Monte Carlo algorithm for the global illumination problem in the radiosity setting.” In Monte Carlo and Quasi – Monte Carlo Methods in Scientific Computing (H. Niederreiter and P. Shiue, eds), Springer, p. 239-251, 1995.
- KHODULEV, A. “Comparision of two Methods of Global Illumination Analysis.” Technical Report, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, 1996. <http://rmp.kiaml.rssi.ru/articles/cmgia/index.htm>.
- MALISKA, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.” Rio de Janeiro, RJ, Brasil: ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1995.
- MALISKA JR., C.R., “Geração de Malhas para Domínios 2,5 Dimensionais usando Triângulação de Delaunay”. Florianópolis, 2001. – Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC.
- MODEST, M. F. “Radiative Heat Transfer”, McGraw Hill, 1993.
- MITALAS, G. P. And STEPHENSON, D. G. “FORTRAN IV Programs to calculate radiant interchange factors.” National Research Council of Canada, Division of Building Research, Ottawa, Canada, BDR-25, 1966.
- MÜLLER, S. and SCHÖFFEL, F. “Fast radiosity repropagation for interactive virtual environments using a shadow-form-factor-list.” Technical Report, Fraunhofer Institute for Computer Graphics, Darmstadt, Germany, 1994.
- NUSSELT, W. “Graphische bestmmung des winkelverhältnisses bei der wärmestrahlung.” VDI Z., vol. 72, p. 673, 1928.
- OPPENHEIM, A. K. “Radiation Analysis by the the network Method.” Transf. A.S.M.E. 78, p. 725-735 , 1956.
- PATTANAIK, S. N. and MUDUR, S. P. “Computation of global illumination by Monte Carlo simulation of the particle model of light.” Third Eurographics Workshop on Rendering, p. 71-83, Bristol, UK, May 1992.

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,843 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 10:01 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 156 (approx.)  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)

PLANCK, M. “*The Theory of Heat Radiation.*” Dover Publications, New York, 1959.

RADEMACHER, P. “*Calculating form factors.*” Technical Report COMP238, 1997.  
<http://www.cs.unc.edu/~rademach/238/ffactors.html>

- TAYLOR, R. P. and LUCK, R. and HODGE, B. K. and STEELE, W.G. “*Uncertainty Analysis of Diffuse-Gray Radiation Enclosure Problems*”. Paper AIAA-94-0132, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994.
- WALLACE, J. R. and COHEN, M. F. “*A two-pass solution to the rendering equation: A synthesis of ray tracing and radiosity methods.*” *Computer Graphics*, v. 21, nº 4, p. 311-320, 1987.
- WALLACE, J. R., ELMQUIST, K. A. and HAINES, E. A. “*A ray tracing algorithm for progressive radiosity.*” *Computer Graphics (SIGGRAPH `89)*, Boston, vol. 23, nº 3, p. 315-324, 1989.
- WALTON, G. N. “*Algorithms for calculating radiation view factors between plane convex polygons with obstructions.*” Presented at “The 24<sup>th</sup> National Heat Transfer Conference and Exhibition,” Pittsburgh, Pennsylvania, August 9-12, 1987.
- WATT, A. “*Fundamentals of Three-Dimensional Computer Graphics.*” Wokingham, UK: Addison-Wesley, 1990.
- WIESENHOFER, S. “*Numerical Simulation of Thermal Radiation Heat Transfer.*” Diploma Thesis submitted to the Institute for Applied Information Processing and Communications Technology, Graz University of Technology, Austria, March 1996.

Filename: dissert.doc  
Directory: D:\marcus\mestrado\text\doc2ps  
Template: D:\czesnat\Pos\dissertação\diss.dot  
Title: 1  
Subject:  
Author: czesnat  
Keywords:  
Comments:  
Creation Date: 8/28/98 2:30 PM  
Change Number: 336  
Last Saved On: 7/3/01 9:55 PM  
Last Saved By: Marcus Reis  
Total Editing Time: 2,843 Minutes  
Last Printed On: 7/3/01 10:01 PM  
As of Last Complete Printing  
Number of Pages: 156  
Number of Words: 37,991 (approx.)  
Number of Characters: 216,553 (approx.)