

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Gustavo Gondran Ribeiro

**VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS
PARA PROBLEMAS DE POROELASTICIDADE**

Florianópolis
2016

Gustavo Gondran Ribeiro

**VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS
PARA PROBLEMAS DE POROELASTICIDADE**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica da Universidade
Federal de Santa Catarina para a obtenção do
grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Clovis Raimundo Maliska

Coorientador: Fernando S. Velasco Hurtado

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ribeiro, Gustavo Gondran

Volumes finitos baseado em elementos para problemas de poroelasticidade / Gustavo Gondran Ribeiro ; orientador, Clovis Raimundo Maliska ; coorientador, Fernando Sandro Velasco Hurtado. - Florianópolis, SC, 2016.
196 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Geomecânica. 3. Escoamento em meios porosos. 4. Solução acoplada. 5. Método dos volumes finitos baseado em elementos. I. Maliska, Clovis Raimundo. II. Hurtado, Fernando Sandro Velasco. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Gustavo Gondran Ribeiro

**VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS
PARA PROBLEMAS DE POROELASTICIDADE**

Esta tese foi julgada aprovada para a obtenção do título de "Doutor em Engenharia Mecânica", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 29 de Setembro de 2016

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr, Dr. Eng.
Coordenador

Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph. D.
Orientador

Fernando S. Velasco Hurtado, Dr. Eng.
Coorientador

Banca examinadora:

Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph. D.
Presidente - UFSC

Prof. Alvaro Luiz G. de Azeredo Coutinho, D. Sc.
Relator - UFRJ

Prof. Márcio Arab Murad, D. Sc.
LNCC

Prof. António Fábio C. da Silva, Dr. Eng.
UFSC

Prof. Eduardo A. Fancello, D. Sc.
UFSC

Prof. Emilio E. Paladino, Dr. Eng.
UFSC

Agradecimentos

Agradeço ao professor Clovis R. Maliska, orientador, pela oportunidade concedida e pela confiança depositada no desenvolvimento da tese em uma área de conhecimento nova para a equipe do laboratório SINMEC. Agradeço também, pelos momentos de discussão que sempre me motivaram e me entusiasmaram na elaboração da tese.

Ao Fernando S. V. Hurtado, coorientador, pelas incansáveis explicações sobre métodos numéricos e seus aspectos matemáticos. Sem dúvida alguma, ele é um exemplo de pesquisador a ser seguido.

Ao colega Giovani Cerbato pela amizade e camaradagem sempre presentes durante as atividades cotidianas no laboratório. Aos colegas Hermínio T. Honório e Riciêri Tonelli pelas diversas discussões, pessoalmente ou via internet, que enriqueceram bastante este trabalho. Ao bolsista de iniciação científica Jurandir C. Júnior pela ajuda prestada na obtenção de diversos resultados apresentados na tese.

Aos demais professores e colegas do laboratório SINMEC por fazerem desse um ótimo ambiente de trabalho. Em especial à secretária Tatiane C. M. Schweitzer pelo constante apoio na solução dos problemas burocráticos.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, POSMEC, da Universidade Federal de Santa Catarina pela oportunidade disponibilizada para realização desse trabalho.

Aos meus pais pelo carinho e apoio incondicionais. Aos meus familiares por estarem sempre torcendo por mim. À Renata P. Gonzales, companheira, amiga e esposa, pelo carinho e amor doados todos os dias. Com certeza, ela, junto do Dove, Frajola e Fred, fez com que essa etapa da minha vida fosse mais leve, segura e tranquila.

Sumário

Lista de figuras	v
Lista de tabelas	xi
Listagens	xiii
Lista de símbolos	xv
Resumo	xxi
Abstract	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Revisão bibliográfica	4
1.3 Motivação	7
1.4 Objetivos	10
1.5 Organização da tese	11
2 Modelo de escoamento monofásico em meio poroso deformável 13	
2.1 Teoria da poroelasticidade	14
2.2 Modelo geomecânico	16
2.2.1 Tensões efetivas	16
2.2.2 Equilíbrio de forças	18
2.2.3 Equação constitutiva	18
2.2.4 Condições de contorno	21
2.3 Modelo de escoamento	21
2.3.1 Conservação da massa	22

2.3.2	Variação da porosidade	26
2.3.3	Condições de contorno	27
2.4	Resumo das equações	27
2.5	Métodos de acoplamento	28
2.5.1	Parâmetros de acoplamento	28
2.5.2	Acoplamento numérico	30
3	Método dos volumes finitos baseado em elementos	35
3.1	Malhas não estruturadas híbridas	35
3.1.1	Entidades geométricas fundamentais	36
3.1.2	Conjuntos de entidades	39
3.1.3	Associação de propriedades heterogêneas	40
3.2	Conceitos fundamentais	41
3.2.1	Procedimento de discretização	41
3.3	Aproximação do gradiente de uma variável	44
3.4	Integração numérica	45
3.4.1	Integral de volume	45
3.4.2	Integral de superfície	47
4	Discretização das equações do modelo	49
4.1	Modelo de escoamento	49
4.1.1	Termo de acumulação	50
4.1.2	Termo de fluxo	51
4.1.3	Termo fonte	53
4.1.4	Termo de deformação volumétrica	53
4.1.5	Montagem do sistema linear	54
4.1.6	Condições de contorno	56
4.2	Modelo geomecânico	57
4.2.1	Termo de tensões efetivas	58
4.2.2	Termo de pressão de poro	60
4.2.3	Termo gravitacional	60
4.2.4	Montagem do sistema linear	61
4.2.5	Condições de contorno	63
4.3	Discretização da equação da porosidade	64
4.4	Cálculo da deformação volumétrica	65
4.5	Recuperação das tensões	66
4.6	Algoritmo de solução	67

5 Exemplos de aplicação	71
5.1 Estimação de erros	73
5.2 Problema de Terzaghi	74
5.2.1 Malhas utilizadas	77
5.2.2 Resultados obtidos	79
5.2.3 Análise de convergência	86
5.3 Problema de Terzaghi com duas camadas	97
5.3.1 Permeabilidades heterogêneas	98
5.3.2 Propriedades mecânicas e poroelásticas heterogêneas	102
5.4 Problema de Mandel	105
5.4.1 Malhas utilizadas	111
5.4.2 Resultados obtidos	112
5.4.3 Análise de convergência	120
5.5 Aplicação na simulação de reservatórios de petróleo	129
5.5.1 Caso A: Reservatório com domínio retangular	131
5.5.2 Caso B: Reservatório com domínio irregular	141
6 Conclusão	147
6.1 Sugestões de trabalhos futuros	150
Referências bibliográficas	153
A Aspectos geométricos do EbFVM	165
A.1 Especificação de uma malha não estruturada	165
A.2 Especificação de uma malha de contorno	167
A.3 Transformação de coordenadas	169
A.4 Matriz jacobiana	171
B Método dos elementos finitos	173
B.1 Forma matricial	174
B.2 Quadratura de Gauss	175
B.3 Conceitos básicos	178
B.3.1 Método dos resíduos ponderados	178
B.3.2 Método de Galerkin e elementos finitos	179
B.4 Discretização do modelo geomecânico	180

C Soluções analíticas	187
C.1 Problema de Terzaghi	187
C.2 Problema de Terzaghi com duas camadas	189
C.3 Problema de Mandel	190
D Número de iterações	193
D.1 Problema de Terzaghi	193
D.2 Problema de Mandel	195

Lista de figuras

1.1	Efeito geomecânico em meios porosos.	2
1.2	Arranjo desencontrado de variáveis em uma malha estruturada cartesiana.	8
1.3	Arranjo co-localizado de variáveis em uma malha não estruturada híbrida.	9
2.1	Esquema de iteração entre escoamento e geomecânica. .	29
2.2	Fluxograma do método de acoplamento segregado em uma direção.	31
2.3	Fluxograma do método de acoplamento segregado em duas direções.	32
2.4	Fluxograma do método de acoplamento simultâneo. . . .	33
3.1	Entidades geométricas básicas que formam os elementos triangular e quadrilateral.	37
3.2	Entidades geométricas auxiliares que formam os elementos triangular e quadrilateral.	38
3.3	Volume de controle associado ao nó p.	38
3.4	Conjuntos de entidades fundamentais associadas ao elemento e.	39
3.5	Conjuntos de entidades fundamentais associadas ao nó p. .	40
3.6	Conjuntos de entidades auxiliares associadas ao nó p. . .	40
3.7	Balanço no volume de controle associado ao nó p.	42
4.1	Notação para os nós segundo a orientação do vetor área da face.	56

5.1	Diagrama esquemático do problema de Terzaghi.	74
5.2	Tipos de malha utilizados: (a) quadrangular, (b) triangular e (c) híbrida.	77
5.3	Divisão dos elementos utilizada no refino de malhas híbridas. Elementos (a) quadrangular e (b) triangular.	79
5.4	Campos de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	80
5.5	Campos de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	81
5.6	Perfis de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	82
5.7	Perfis de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	83
5.8	Varição no tempo da pressão na base da coluna, $y = 0m$. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 1s$	84
5.9	Varição no tempo do deslocamento vertical no topo da coluna, $y = 6m$. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 1s$	84
5.10	Varição no tempo de pressão, tensão efetiva e tensão total na base da coluna, $y = 0$. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 1s$	85
5.11	Convergência espacial da pressão. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	87
5.12	Convergência temporal da pressão. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	87
5.13	Convergência espacial do deslocamento vertical. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	89
5.14	Convergência temporal do deslocamento vertical. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	89
5.15	Varição do deslocamento no topo da coluna em função do refino de malha para o $\Delta t = 1s$. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	90
5.16	Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	91
5.17	Convergência temporal do deslocamento vertical para o MEF Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$	91

5.18	Convergência espacial da pressão. Malhas quadrangulares. Tempo $t = 20s$	93
5.19	Convergência espacial do deslocamento vertical. Malhas quadrangulares. Tempo $t = 20s$	93
5.20	Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Malhas quadrangulares. Tempo $t = 20s$	94
5.21	Convergência espacial da pressão. Malhas triangulares. Tempo $t = 20s$	95
5.22	Convergência espacial do deslocamento vertical. Malhas triangulares. Tempo $t = 20s$	95
5.23	Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Malhas triangulares. Tempo $t = 20s$	96
5.24	Diagrama esquemático do problema de Terzaghi com duas camadas.	97
5.25	Perfis de pressão para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 0, 1$. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	99
5.26	Solução numérica de perfis de deslocamento vertical para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 0, 1$. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	100
5.27	Perfis de pressão para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 10$. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	101
5.28	Perfis de pressão para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 100$. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	101
5.29	Solução numérica de perfis de pressão para diferentes tempos com meios de propriedades mecânicas diferentes. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	104
5.30	Solução numérica de deslocamento vertical para diferentes tempos com meios de propriedades mecânicas diferentes. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$	104
5.31	Diagrama esquemático do problema de Mandel.	105
5.32	Esquema de imposição da condição de contorno de força no último volume de controle da fronteira superior.	109
5.33	Malha M1 da tabela 5.9.	112
5.34	Campos de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	113
5.35	Perfis de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	113

5.36	Campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	114
5.37	Perfis de tensão vertical total para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	114
5.38	Campos de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	115
5.39	Perfis de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	115
5.40	Campos de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	116
5.41	Perfis de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	116
5.42	Variação no tempo da pressão na fronteira esquerda. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	118
5.43	Variação no tempo da tensão vertical total na fronteira esquerda. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	118
5.44	Variação no tempo do deslocamento vertical no topo do domínio. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	119
5.45	Variação no tempo do deslocamento horizontal na fronteira direita. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$	119
5.46	Convergência espacial da pressão. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	122
5.47	Convergência temporal da pressão. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	122
5.48	Convergência espacial da tensão vertical total. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	123
5.49	Convergência temporal da tensão vertical total. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	123
5.50	Convergência espacial da tensão vertical total para o MEF. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	124
5.51	Convergência espacial do deslocamento vertical. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	126
5.52	Convergência temporal do deslocamento vertical. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	126
5.53	Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	127

5.54	Convergência espacial do deslocamento horizontal. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	127
5.55	Convergência temporal do deslocamento horizontal. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	128
5.56	Convergência espacial do deslocamento horizontal para o MEF. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$	128
5.57	Diagrama esquemático do domínio de solução do problema com reservatório retangular.	132
5.58	Malha empregada na solução do problema com reservatório retangular.	133
5.59	Campos de pressão para diferentes tempos. Caso A.	134
5.60	Perfil de pressão na linha posicionada em $y = 320m$ para diferentes tempos. Caso A.	135
5.61	Perfil de tensão vertical total na linha posicionada em $y = 320m$ para diferentes tempos. Caso A.	136
5.62	Perfil de tensão vertical efetiva na linha posicionada em $y = 320m$ para diferentes tempos. Caso A.	137
5.63	Campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Caso A.	138
5.64	Perfil de deslocamento vertical no topo do domínio para diferentes tempos. Caso A.	138
5.65	Campos de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Caso A.	139
5.66	Perfil de deslocamento horizontal na linha posicionada em $y = 320m$ para diferentes tempos. Caso A.	140
5.67	Campos de porosidade para diferentes tempos. Caso A.	140
5.68	Diagrama esquemático do domínio de solução do problema com reservatório irregular.	141
5.69	Malha empregada na solução do problema com reservatório irregular.	142
5.70	Campos de pressão para diferentes tempos. Caso B.	143
5.71	Campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Caso B.	143
5.72	Perfil de deslocamento vertical no topo do domínio para diferentes tempos. Caso B.	144
5.73	Campos de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Caso B.	145

5.74	Campos de porosidade para diferentes tempos. Caso B. .	146
A.1	Definição da topologia de uma malha. (a) Numeração global dos nós e elementos. (b) Numeração local dos nós em cada elemento.	167
A.2	Exemplo de uma malha de contorno.	168
A.3	Volume de controle adjacente ao contorno.	169
A.4	Transformação de coordenadas dos elementos.	170

Lista de tabelas

2.1	Equações do modelo acoplado escoamento/geomecânica.	28
5.1	Dados de entrada para o problema de Terzaghi.	76
5.2	Módulos de compressão volumétrica da rocha, arenito Be- rea, e do fluido.	76
5.3	Conjunto de malhas quadrangulares.	78
5.4	Conjunto de malhas triangulares.	78
5.5	Conjunto de malhas híbridas.	79
5.6	Dados de entrada para o problema com permeabilidades diferentes.	99
5.7	Dados de entrada para o problema com dois materiais de propriedades mecânicas diferentes.	102
5.8	Dados de entrada para o problema de Mandel.	111
5.9	Conjunto de malhas híbridas utilizado no problema de Man- del.	112
5.10	Dados de entrada e propriedades para o problema com re- servatório retangular.	131
5.11	Dados da malha híbrida empregada na solução do problema com reservatório retangular.	133
5.12	Dados da malha híbrida empregada na solução do problema com reservatório irregular.	142
A.1	Exemplo de tabela de coordenadas.	166
A.2	Tabela de conectividades.	167
A.3	Exemplo de uma tabela de conectividades para malhas de contorno.	168

B.1	Pontos de Gauss para o elemento triangular.	177
B.2	Pontos de gauss para o elemento quadrangular.	177
B.3	Pontos de gauss para o elemento linear de fronteira.	177
D.1	Número de iterações nas malhas de quadriláteros. Problema de Terzaghi.	194
D.2	Número de iterações nas malhas de triângulos. Problema de Terzaghi.	194
D.3	Número de iterações nas malhas híbridas. Problema de Terzaghi.	195
D.4	Número de iterações nas malhas de quadriláteros. Problema de Mandel.	195
D.5	Número de iterações nas malhas de triangulares. Problema de Mandel.	196
D.6	Número de iterações nas malhas híbridas. Problema de Mandel.	196

Listagens

4.1	Algoritmo de montagem das contribuições de fluxo nos elementos.	55
4.2	Algoritmo de cômputo das contribuições de acumulação e termo independente.	56
4.3	Algoritmo de montagem das contribuições do termo de tensões efetivas.	62
4.4	Algoritmo de cômputo das contribuições de acumulação e termo independente.	63

Lista de Símbolos

Símbolos latinos

A	Matriz de coeficientes	
<i>A</i>	Coeficiente de uma equação linear	
b	Vetor de termos independentes de um sistema linear	
<i>b</i>	Termo independente de uma equação linear	
<i>C</i>	Compressibilidade	1/Pa
<i>d</i>	Indica um diferencial infinitesimal	
\check{D}	Tensor constitutivo de quarta ordem	Pa
D^e	Matriz de derivadas das funções de forma do elemento <i>e</i>	
<i>e</i>	Elemento	
<i>E</i>	Conjunto de elementos	
<i>f</i>	Termo fonte	
<i>f</i>	Face	
<i>fb</i>	Face de contorno	
<i>f</i>	Conjunto de faces	
g	Vetor aceleração da gravidade	m/s ²
<i>G</i>	Módulo de elasticidade transversal	Pa
Ī	Tensor identidade	
J	Matriz Jacobiana da transformação de coordenadas	

$\check{\mathbf{K}}$	Tensor permeabilidade absoluta	m^2, mD
$\check{\mathbf{K}}_{uu}, \check{\mathbf{K}}_{vu}$	Tensores de propriedades mecânicas associadas ao deslocamento horizontal	Pa
$\check{\mathbf{K}}_{vv}, \check{\mathbf{K}}_{uv}$	Tensores de propriedades mecânicas associadas ao deslocamento vertical	Pa
n	Nível temporal	
n_B	Nó localizado atrás de uma face f	
n_F	Nó localizado a frente de uma face f	
N	Função de forma	
$N_n(e)$	Número de nós em um elemento	
\mathcal{N}	Conjunto de nós	
p	Nó associado a um volume de controle	
P	Pressão	Pa
\mathbf{P}	Vetor de valores discretos de pressão	Pa
$\check{\mathbf{P}}$	Tensor de permutação simétrico	Pa
s	Subelemento	
\mathbf{S}	Vetor área	m^2
S	Componente do vetor área	m^2
t	Tempo	s
T	Termo de uma equação diferencial	
\mathbf{u}	Vetor deslocamento	mm
u	Deslocamento horizontal	mm
\mathbf{u}_h	Vetor de valores discretos de deslocamento horizontal	mm
v	Deslocamento vertical	mm
\mathbf{v}_h	Vetor de valores discretos de deslocamento vertical	mm
V	Volume	m^3
\mathcal{V}	Volume de controle	m^3
\mathbf{v}	Vetor velocidade de Darcy	m/s
\mathbf{v}_f	Vetor velocidade média do fluido	m/s
\mathbf{v}_s	Vetor velocidade média do sólido	m/s
$\mathbf{v}_{f/s}$	Vetor velocidade média do fluido com relação ao sólido	m/s

Símbolos gregos

α	Coefficiente de Biot	
β	Operador associado à aproximação do fluxo na equação da conservação da massa	
γ	deformação cisalhante de engenharia	
Γ_i, Λ_i	Operadores associados à aproximação de forças de superfície na equação do equilíbrio de forças	
δ, ζ	Contornos parciais para aplicação de condições associadas ao modelo geomecânico e de escoamento, respectivamente	
Δ	Diferencial discreto	
$\tilde{\epsilon}$	Tensor deformação	
ϵ_v	Deformação volumétrica	
Θ	Variável escalar genérica	
Θ	Vetor de valores discreto de uma variável escalar genérica	
κ	Nível iterativo	
λ	Mobilidade	1/Pa.s
λ_l	Segunda constante de Lamè	Pa
μ_l	Primeira constante de Lamè	Pa
μ	Viscosidade dinâmica	Pa.s
ν	Coefficiente de Poisson	
ξ, η	Coordenadas locais	
ρ	Densidade	kg/m ³
$\check{\sigma}$	Tensor tensão total	Pa
σ	Componente do tensor tensão total	Pa
$\check{\sigma}'$	Tensor tensão efetiva	Pa
σ'	Componente do tensor tensão efetiva	Pa
τ	Tolerância do procedimento iterativo de acoplamento	

τ_b	Tolerância do procedimento iterativo da condição de contorno no problema de Mandel	
ν	Densidade de fluxo genérica	
Υ	Função de potencial gravitacional	m.m/s ²

Subíndices

b	Relativo ao conjunto fluido-sólido (<i>bulk</i>)
f	Relativo ao fluido
s	Relativo ao sólido
max	Máximo
min	Mínimo

Superíndices

acc	Associado ao termo de acumulação
flx	Associado ao termo de fluxo
grav	Associado ao termo de gravidade
psr	Associado ao termo de pressão de poro
src	Associado ao termo fonte
o	Indica nível de tempo anterior
R	Indica valor de referência
T	Indica transposição de uma matriz

Operadores especiais

$\nabla\Theta$	Gradiente de uma variável escalar Θ
$\nabla\mathbf{V}$	Gradiente de um vetor \mathbf{V}
$\nabla\cdot\mathbf{V}$	Divergente de um vetor \mathbf{V}
$\nabla\cdot\check{\mathbf{T}}$	Divergente de um tensor $\check{\mathbf{T}}$
$\check{\mathbf{T}}_a:\check{\mathbf{T}}_b$	Contração tensorial
$\text{tr}(\check{\mathbf{T}})$	Traço de um tensor $\check{\mathbf{T}}$

Siglas

EbFVM	<i>Element based Finite Volume Method</i>
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFM	Método dos Elementos Finitos Mistos
MPFA	<i>Multipoint Flux Approximation</i>
MVF	Método dos Volumes Finitos
SINMEC	Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor

Resumo

Nesta tese é apresentada uma metodologia numérica unificada para solução acoplada do escoamento e da geomecânica em um meio poroso. Para isso, utilizou-se a teoria da consolidação de Biot para modelar os fenômenos físicos envolvidos, escoamento e compactação da rocha. Essa teoria fornece uma equação para o equilíbrio de forças na estrutura da rocha porosa e uma equação de conservação da massa do fluido para o escoamento. Usualmente, essas equações são resolvidas numericamente com técnicas distintas, sendo a situação mais comum o emprego do método dos elementos finitos para o problema geomecânico e o método dos volumes finitos para o problema do escoamento. Na abordagem unificada proposta, emprega-se o método dos volumes finitos baseado em elementos (EbFVM - *Element based Finite Volume Method*), para discretização espacial das equações de ambos os modelos considerando para tanto a mesma malha bidimensional não estruturada. A principal vantagem em utilizar uma metodologia unificada está na dispensa da necessidade de interpolação entre malhas computacionais, necessária na abordagem convencional. Além disso, o método dos volumes finitos fornece uma solução conservativa no nível discreto, característica indispensável na solução de problemas de escoamento. A técnica de acoplamento iterativo conhecida na literatura como *two-way coupling* é empregada na solução das equações discretizadas do modelo completo, em que as equações de cada fenômeno são resolvidas separadamente, iterando até a convergência. Com o objetivo de validar e avaliar a metodologia numérica proposta, quatro problemas de aplicação foram resolvidos, sendo que dois deles possuem solução analítica. Os resultados obtidos com a metodologia proposta tiveram uma ótima concordância com essas soluções.

Palavras chaves: Geomecânica, Meios Porosos, Solução Acoplada, Método dos Volumes Finitos, Malhas Não Estruturadas

Abstract

In this thesis is presented a unified numerical methodology for coupled fluid flow and geomechanics solution. For this, it is considered the Biot's theory of consolidation to model the physical phenomena involved, fluid flow and rock compaction. This theory provides a mechanical force balance equation that represents the geomechanical problem, and a fluid mass balance equation for a deformable porous medium. Usually these equations are solved using different numerical methods, being the most common approach the use of the finite element method for the geomechanical problem and the finite volume method for the fluid flow problem. In the unified approach proposed herein, the Element-based Finite Volume Method (EbFVM) is used to discretize the equations of both phenomena using the same two-dimensional unstructured grid. The main advantage of using a unified approach is that it does not require interpolation between computational grids as in the conventional approach. Besides, the finite volume method provides a conservative solution in the discrete level. This feature is imperative for solving fluid-flow problems. The two-way coupling technique is used to solve the discretized equations of the complete model, in which the equations of each phenomenon are solved separately, iterating until convergence. In order to validate and evaluate the proposed numerical approach, four application problems are solved, two of them with an analytical solution available. The numerical results obtained with the proposed unified methodology are in good agreement with them.

Keywords: Geomechanics, Porous Media, Coupled Solution, Finite Volume Method, Unstructured Grids

Introdução

Diversos problemas de engenharia envolvem mais de um fenômeno físico. Nesse tipo de problemas, uma das maiores dificuldades na solução do modelo é o acoplamento existente entre os fenômenos e, consequentemente, entre as equações que o descrevem. Na solução do escoamento em um meio poroso deformável os dois fenômenos envolvidos são o escoamento propriamente dito, descrito pela lei de Darcy, e a compactação do material, que é interpretado como um problema de mecânica dos sólidos. Esse fenômeno de compactação do material poroso chama-se *efeito geomecânico*. A solução numérica acoplada desse efeito com o escoamento é o assunto central dessa tese.

1.1 Preliminares

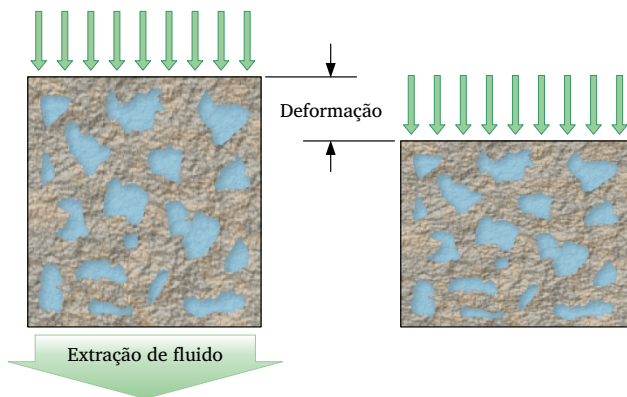
Na engenharia, muitos dos problemas encontrados são simplificados para que o modelo considerado possa ser resolvido. No entanto, dependendo das simplificações consideradas, a solução encontrada poderá apresentar erros não desprezíveis que podem inviabilizar o seu aproveitamento. Podem ser consideradas simplificações mínimas, como manter

uma propriedade constante, até simplificações mais drásticas, como desconsiderar o fenômeno físico de menor interesse. Outro tipo de simplificações, de alcance intermediário, são também frequentemente consideradas, como desacoplar os fenômenos físicos para facilitar a solução.

Na solução de modelos de escoamento em meios porosos o efeito geomecânico é usualmente desconsiderado ou mesmo considerado de forma simplificada. Entretanto, dependendo das propriedades do meio poroso esses efeitos podem não ser desprezíveis e levarão a conclusões equivocadas. Por outro lado, a consideração desse fenômeno torna o problema mais complexo em termos de modelagem e, conseqüentemente, de solução.

O efeito geomecânico foi modelado inicialmente por Terzaghi (1923) através de sua teoria da consolidação de solos. Essa teoria descreve o comportamento da compactação do solo, modelado como meio poroso, causado pela diminuição da pressão do fluido contido em seus poros. Nesse problema, o próprio peso do meio poroso age como a força que provoca a compactação do meio. No entanto, essa força pode ser considerada como uma carga externa que atua sobre o meio poroso, que por sua vez é compactado à medida que se diminui a pressão do fluido através da extração do mesmo, como pode ser observado no esquema da figura 1.1.

Figura 1.1 – Efeito geomecânico em meios porosos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Visando uma modelagem mais refinada e completa do efeito geomecânico, autores como Biot (1941), Geertsma (1966) e Rice & Cleary (1976) reformularam e aprimoraram essa teoria até chegarem na teoria da poroelasticidade. Atualmente essa teoria serve como arcabouço matemático nos estudos do problema acoplado de escoamento e geomecânica em meios porosos.

Dentre as diversas áreas de aplicação da teoria da poroelasticidade, a engenharia de reservatórios de petróleo é uma das mais importantes, dada a importância do petróleo na matriz energética mundial. Essa aplicação é possível porque na extração de petróleo ocorre um fenômeno geomecânico similar ao da compactação de solos. Isso porque o reservatório de petróleo nada mais é que uma rocha porosa que contém hidrocarbonetos em seus poros. Como normalmente esses reservatórios são profundos, o peso de todo o material sedimentado logo acima do mesmo é considerado como a carga externa que está em equilíbrio com a pressão do fluido e o estado de tensões da rocha.

É fácil observar a interdependência entre os fenômenos de escoamento e efeito geomecânico. Ora, o escoamento depende das propriedades físicas da rocha porosa, como porosidade e permeabilidade, enquanto que o equilíbrio de forças na estrutura mecânica do meio poroso depende da pressão do fluido. Na extração do petróleo é estabelecido o escoamento devido a um gradiente de pressão de poro, instaurando-se um desequilíbrio de forças entre a carga externa (peso do material sedimentado) o estado de tensões da rocha reservatório e a pressão do fluido. Esse desequilíbrio de forças produz deslocamento e deformação nos grãos que formam a rocha reservatório, e dessa forma suas propriedades físicas resultam alteradas.

Esse fenômeno físico foi praticamente negligenciado e considerado de maneira muito simplificada durante anos na engenharia de reservatórios devido ao interesse estar principalmente direcionado ao aumento da produção de petróleo. Entretanto, com o avanço dos processos de produção, inúmeros problemas de grande relevância surgiram, chamando a atenção da indústria petrolífera. Entre outros problemas estão a perda de poços por colapso, a subsidência do leito marinho que causa danos às plataformas e equipamentos de elevação, a ativação de falhas geológicas que gera um impacto ao ambiente e a inundação de zonas costeiras.

Devido ao aparecimento desses problemas na produção de hidrocarbonetos, a introdução do efeito geomecânico nas simulações tornou-se uma prática comum (Thomas *et al.*, 2003; Tran *et al.*, 2005; Pan *et al.*, 2007), uma vez que a simulação de reservatórios é a principal ferramenta de previsão da produção. Assim, previsões mais acuradas podem ser utilizadas para que ações sejam tomadas com o objetivo de maximizar a produção de petróleo, sem que haja qualquer tipo de dano à matriz porosa e aos poços, portanto, minimizando os custos de produção.

1.2 Revisão bibliográfica

A solução numérica do escoamento em meios porosos tem importantes aplicações na simulação de reservatórios de petróleo. No entanto, tradicionalmente, o efeito geomecânico é considerado de forma extremamente simplificada, através de uma compressibilidade dos poros (Peaceman, 1977; Aziz & Settari, 1979; Mattax & Dalton, 1990). Nesse caso, a porosidade do meio varia em função da pressão de poro e uma porosidade de referência. Entretanto, esta prática não é a mais adequada, pois em realidade as propriedades variam de acordo com o estado de tensões e do movimento dos grãos que formam a matriz porosa. Aliás, Chin *et al.* (2000a) concluíram que, a longo prazo, a consideração da variação das propriedades da rocha pode ocasionar erros de previsão da produção maiores que 6%, devido à mudança no seu estado de tensões.

Desde então, inúmeros trabalhos vêm sendo desenvolvidos com a intenção de considerar a variação das propriedades em função do estado de tensões da rocha, como Raghavan *et al.* (1972), Chin *et al.* (1998a;b), Gutierrez & Lewis (1998), Chen *et al.* (2006), Ferronato *et al.* (2010), Mikelić *et al.* (2014), Dal Pizzol (2014), Tonelli (2016), entre outros. Contudo, esta prática exige que metodologias de acoplamento da geomecânica com o escoamento no reservatório sejam empregadas, devido à relação existente entre os dois fenômenos físicos envolvidos neste problema. Essa exigência se dá principalmente pelas diferentes metodologias numéricas usualmente empregadas para a solução de cada um dos fenômenos.

Os principais métodos numéricos utilizados na solução das equações diferenciais são os Métodos de Diferenças Finitas(MDF), dos Volumes Finitos(MVF) e Elementos Finitos(MEF). Tradicionalmente, o MVF e

o MDF¹ são empregados para a solução de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos. Por outro lado, na área de mecânica estrutural, o MEF é o método mais amplamente empregado. Com isso, para a solução numérica do efeito geomecânico normalmente emprega-se o MEF, por ser um problema de mecânica estrutural. No entanto, a simulação do escoamento em reservatórios é tradicionalmente obtida utilizando-se o MVF. Essa diferença, em termos de aplicação das metodologias numéricas, dificulta ainda mais a solução acoplada desses fenômenos, que não é trivial, devido às não linearidades existentes.

Inicialmente, os trabalhos direcionaram os esforços no acoplamento de algoritmos de elementos finitos com simuladores de reservatórios comerciais (Settari & Mourits, 1998; Settari & Walters, 2001; Mainguy & Longuemare, 2002; Li *et al.*, 2006; Kim *et al.*, 2011). O que de fato parecia ser a alternativa mais natural, já que diversos simuladores comerciais, como o STARS e GEM da *Computer Modelling Group* e o ECLIPSE da *Schlumberger*, são bastante difundidos e disponíveis no mercado. Posteriormente, essas empresas passaram a incorporar módulos geomecânicos nos simuladores comerciais, visando o melhoramento das soluções numéricas.

Em contrapartida, outros trabalhos (Chin *et al.*, 2002; Thomas *et al.*, 2002; 2003) desenvolveram algoritmos acoplados onde o escoamento era resolvido por MDF e a geomecânica por MEF. Nesses trabalhos, onde os problemas de escoamento e geomecânica eram resolvidos com metodologias diferentes, os autores se depararam com alguns inconvenientes. O primeiro, e mais óbvio, é a questão das malhas computacionais empregadas em cada método. O método MDF utiliza-se de malhas cartesianas, enquanto o MEF utiliza-se de malhas não estruturadas. Logo, para incluir o efeito geomecânico na simulação torna-se necessária a geração de uma malha extra não estruturada requerida pelo MEF. Outro inconveniente, consequência do primeiro, está na necessidade de interpolação dos valores das variáveis entre as malhas, pois as posições espaciais dos valores discretos são diferentes. Assim, tem-se a necessidade de realizar interpolações na troca de informações durante o procedimento do acoplamento.

Todavia, outros desenvolvimentos avançaram no sentido de resolver ambos os fenômenos com uma única metodologia numérica, visando

¹O Método de Diferenças Finitas(MDF), foi o precursor do Método dos Volumes Finitos(MVF), que surgiu da necessidade de aprimoramento do MDF utilizando-se de interpretações físicas no nível discreto.

eliminar os erros associados às interpolações e possibilitando também a utilização da mesma malha computacional em ambos os problemas. Seguindo essa linha, alguns utilizaram o MEF (Chin *et al.*, 1998a;b; 2000a;b; Gutierrez & Lewis, 1998; Gutierrez *et al.*, 2001; Gutierrez & Lewis, 2002) e outros utilizaram MVF (Shaw & Stone, 2005; Dal Pizzol & Maliska, 2012; Dal Pizzol, 2014; Nordbotten, 2016; Tonelli, 2016).

No contexto de elementos finitos, alguns trabalhos como o de Phillips & Wheeler (2007a), Phillips & Wheeler (2007b), Ferronato *et al.* (2010) e Mikelić *et al.* (2014) utilizaram o método de elementos finitos mistos (MEFM²) para solução do escoamento. Isso porque, o MEFM garante a conservação das variáveis no nível discreto, característica importante na solução de problemas que envolvem transporte de propriedades, como o escoamento em meios porosos. Entretanto, esta metodologia tem um custo computacional adicional, pois o processo de discretização produz um sistema linear com um número maior de incógnitas (Klausen & Russe, 2004).

Vale salientar aqui que desenvolvimentos atuais em elementos finitos mistos, como o de Wheeler *et al.* (2011), conseguem eliminar o número de incógnitas adicionais que normalmente esta metodologia apresenta. Para isso, o autor utiliza a técnica de aproximação do fluxo por multipontos (Aavatsmark, 2002), conhecida como MPFA³, para poder eliminar as incógnitas adicionais e obter uma discretização com o mesmo estêncil que aquele encontrado em MDF e MVE.

Como observado, os trabalhos que envolvem MEF citados até aqui não abrangem a totalidade de desenvolvimentos dessa metodologia aplicada à solução acoplada do escoamento e geomecânica em meios porosos. Entretanto, o escopo desse trabalho se restringe à utilização do MVF nesse tipo de problema, cuja bibliografia associada é muito escassa.

Já no contexto do MVE, além de poder ser utilizado para resolver os dois problemas envolvidos, possui a característica de conservação das propriedades físicas em nível discreto. Essa característica é intrínseca ao método, pois seu fundamento básico é a realização de balanços em volumes de controle discretos. Além disso, o MVF não possui o problema da

²O MEFM é uma variação do MEF que surgiu, dentre outros motivos, para ser conservativo no nível discreto, característica essa não presente do MEF.

³Sigla em inglês para *Multipoint Flux Approximation*.

incompatibilidade das malhas, mostrando-se uma metodologia promissora para solução do acoplamento entre o escoamento e a geomecânica no meio poroso.

1.3 Motivação

A motivação do presente trabalho está diretamente ligada aos avanços na solução numérica do problema de compactação de meios porosos. Nesse contexto, destaca-se alguns pontos importantes, como a utilização de um único método numérico para a solução de ambos os fenômenos físicos envolvidos e a escolha de um método numérico conservativo como uma alternativa propícia para obtenção dessa solução. Outro quesito que vem ganhando notoriedade há bastante tempo na simulação numérica é a utilização de malhas não estruturadas, devido a sua generalidade na representação do domínio de solução. Uma metodologia numérica bastante difundida, aplicada a malhas não estruturadas e que possui característica de conservação no nível discreto é o Método de Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM⁴). Essa metodologia vem mostrando o seu potencial quando aplicado a diferentes classes de problemas e por essa razão foi o método escolhido para ser utilizado no presente trabalho.

O EbFVM teve seus primeiros desenvolvimentos direcionados para a solução das equações de Navier-Stokes, com Baliga & Patankar (1980; 1983) e Raw (1985). Mais recentemente, Souza (2000), Mendes (2007) e Honório (2014) entre outros dedicaram-se ao estudo de diferentes formas de acoplar pressão e velocidade nas equações de Navier-Stokes. Esses trabalhos mostraram o grande potencial deste método na solução de problemas acoplados, característica presente nas equações da compactação de um meio poroso.

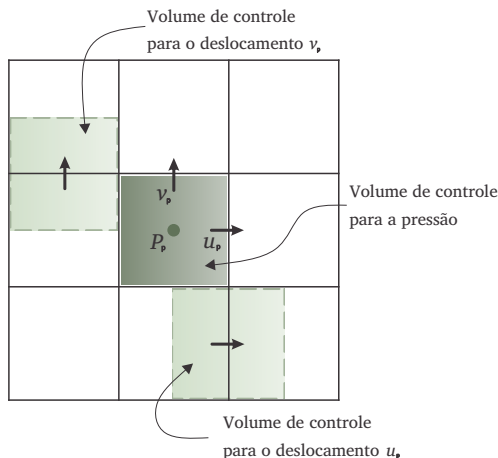
Além disso, a utilização do EbFVM na simulação de reservatórios de petróleo vem crescendo bastante. Foi utilizado para resolver modelo de escoamento monofásico (Rozon, 1989) assim como modelos de escoamento bifásico (Forsyth, 1990; Gottardi & Dall'olio, 1992). Entre outros desenvolvimentos aplicados à simulação de reservatórios estão a sistematização matemática para utilização com malhas cada vez mais gerais

⁴Sigla em inglês para *Element based Finite Volume Method*.

(Fung *et al.*, 1992; 1994; Hurtado, 2005; Hurtado *et al.*, 2005; 2007), a utilização em conjunto com método de Newton para o tratamento de não linearidades (Cordazzo, 2006) e ampliação para reservatórios tridimensionais (Hurtado, 2011). Outrossim, este método mostrou-se apto para ser aplicado a resolver problemas da mecânica estrutural. Por exemplo, nos trabalhos de Filippini (2011; 2014), o autor resolveu problemas clássicos de mecânica estrutural e comparou as soluções numéricas obtidas pelo EbFVM com soluções obtidas pelo MEF.

Um aspecto importante relacionado à solução numérica de problemas acoplados, como o exposto aqui, é o arranjo das variáveis na malha computacional, ou seja, a localização dos valores discretos nela. Usualmente, quando o MVF é utilizado para a solução acoplada da geometria e do escoamento em um meio poroso, é mais conveniente o uso de um arranjo desencontrado (Shaw & Stone, 2005; Dal Pizzol & Maliska, 2012; Dal Pizzol, 2014; Tonelli, 2016). Esse arranjo, mostrado na figura 1.2, é bastante vantajoso, pois evita interpolações das variáveis de acoplamento nas faces dos volumes de controle. Assim, pode-se dizer que o arranjo é fisicamente consistente com esse problema acoplado, trazendo maior estabilidade para a simulação (Maliska, 2004).

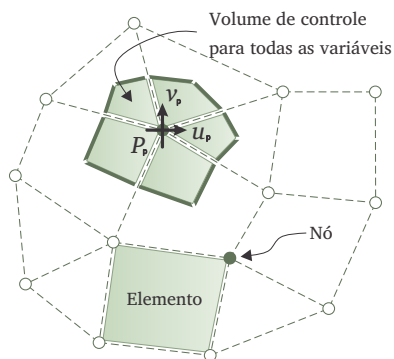
Figura 1.2 – Arranjo desencontrado de variáveis em uma malha estruturada cartesiana.



Fonte: Adaptado de Tonelli (2016).

Entretanto, a utilização do arranjo desencontrado em uma malha não estruturada pode trazer vários inconvenientes geométricos, especialmente na definição dos volumes de controle auxiliares para algumas das variáveis do problema. Dependendo do tipo de malha não estruturada empregada, o uso desse arranjo pode acarretar em interpolações adicionais pouco consistentes. Visando evitar esse tipo de problema, no presente trabalho optou-se por utilizar um arranjo co-localizado de variáveis em uma malha não estruturada bidimensional híbrida⁵, com elementos dos tipos quadrangular e triangular, conforme mostrado na figura 1.3.

Figura 1.3 – Arranjo co-localizado de variáveis em uma malha não estruturada híbrida.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O uso do arranjo co-localizado em malhas não estruturadas de elementos é a escolha mais natural, devido à maneira como o volume de controle é construído. Assim, a aproximação do fluxo nas faces dos volumes de controle é realizada de forma simples e direta através do uso das funções de forma. Isso porque, as faces dos volumes de controle estão localizadas inteiramente no interior dos elementos.

É importante salientar que o presente trabalho visa dar continuidade a aqueles realizados no SINMEC⁶, como o de Dal Pizzol (2014) e o de

⁵Os aspectos geométricos bem como as entidades básicas de uma malha não estruturada híbrida estão expostos na seção 3.1.

⁶Laboratório de simulação numérica em mecânica dos fluidos e transferência de calor.

Tonelli (2016) que utilizaram malhas estruturadas, ampliando esses desenvolvimentos a malhas não estruturadas. Outro ponto a ser destacado é a originalidade deste trabalho, devido ao EbFVM nunca ter sido utilizado para a solução acoplada do problema de compactação em um meio poroso.

1.4 Objetivos

O principal objetivo do presente trabalho é a solução numérica da geomecânica e do escoamento em um meio poroso através de uma única metodologia numérica, com o emprego de malhas não estruturadas. Para que esse objetivo seja alcançado, propõe-se a utilização do método de volumes finitos baseado em elementos, por ser um método conservativo apto para ser aplicado à solução de ambos os fenômenos envolvidos. Além disso, utilizou-se um arranjo co-localizado de variáveis na malha.

Com isso, os objetivos específicos são:

- *Validar o código computacional comparando a solução numérica com soluções analíticas de diferentes problemas.* Esse objetivo é alcançado através da verificação da convergência do erro da solução numérica.
- *Verificar convergência do erro associado à solução numérica quando diferentes tipos de malha são utilizados.*
- *Comparar a solução do modelo geomecânico obtida com o MEF por ser a metodologia mais amplamente empregada nesse tipo de problema.*
- *Avaliar a solução numérica com relação ao comportamento físico.* Essa avaliação é realizada resolvendo problemas em que o comportamento transiente das variáveis são distintos, como a utilização de materiais com propriedades heterogêneas.
- *Avaliar a aplicabilidade do método na simulação de reservatórios.* Para isso, utilizou-se dois problemas em que o domínio de solução é mais amplo que o domínio do reservatório.

1.5 Organização da tese

A tese está organizada da seguinte forma:

- No capítulo 2 são apresentadas as equações do modelo de escoamento em um meio poroso deformável. Nesse capítulo, são enunciadas as hipóteses consideradas na descrição de ambos os fenômenos envolvidos no problema.
- No capítulo 3 é apresentado o método de volumes finitos baseado em elementos ou EbFVM. Inicialmente, são apresentadas as características de uma malha não estruturada híbrida, onde são definidos os entes geométricos elementares e auxiliares. Ainda neste capítulo são apresentados todos os conceitos básicos e fundamentais das aproximações consideradas no EbFVM.
- No capítulo 4 está descrito todo o processo de discretização das equações diferenciais do problema. Além disso, são também apresentados os algoritmos de montagem dos sistemas lineares para cada fenômeno físico. Ao final, é apresentado o algoritmo de solução acoplada do problema.
- No capítulo 5 estão descritos os problemas testes utilizados para avaliar a metodologia, bem como os resultados encontrados para esses problemas.
- No capítulo 6 estão descritas as conclusões obtidas e sugestões de trabalhos futuros.

Modelo de escoamento monofásico em meio poroso deformável

Modelos de escoamento monofásico em um reservatório convencional (Aziz & Settari, 1979; Chen *et al.*, 2006) usualmente consideram a deformação do meio poroso via uma compressibilidade dos poros, a qual conduz a uma variação temporal da porosidade do meio. No entanto, esses modelos podem ser considerados simplistas, uma vez que o meio poroso deformável deveria incluir tanto a deformação dos poros, resultante da movimentação dos grãos, quanto a deformação dos grãos.

Quando se considera a deformação dos grãos, surge a necessidade de utilizar algum modelo de mecânica estrutural, já que os grãos formam a estrutura da rocha porosa. Esta parte da física busca compreender o comportamento mecânico de estruturas sólidas quando submetidas a forças externas. Diferentemente dos fluidos, materiais ditos sólidos são resistentes a tensões, em especial as cisalhantes, que são tensões aplicadas tangencialmente na superfície do corpo. A teoria que estuda o compor-

tamento mecânico, de meios porosos saturados de fluido, é denominada *poromecânica* e tem sua origem na *teoria da poroelasticidade*. A poromecânica abrange vários aspectos da modelagem do comportamento mecânico de rochas porosas e todos esses aspectos podem ser encontrados em Coussy (2004).

Obviamente, a utilização da poromecânica na modelagem de reservatórios de petróleo não é a única aplicação. Outras aplicações podem ser consideradas exemplos de problemas descritos pela teoria da poroelasticidade. Entre eles estão a subsidência de solos devido ao esgotamento de lençóis freáticos¹, a elevação do nível do solo pelo armazenamento de CO₂ em reservatórios que alcançaram sua capacidade máxima de produção (Teatini *et al.*, 2011) e a reativação de falhas geológicas (Pereira *et al.*, 2014).

A teoria da poroelasticidade considera de forma sistemática a influência mútua do escoamento interno e do comportamento geomecânico em um meio poroso deformável. O modelo geomecânico descreve o estado de tensões da rocha porosa, enquanto que o modelo de escoamento descreve o comportamento do fluido no interior do meio poroso deformável. O modelo geomecânico considerado nesse trabalho, e descrito neste capítulo, é baseado na teoria da consolidação de Biot (1941) e nas tensões efetivas de Terzaghi (1923).

2.1 Teoria da poroelasticidade

Inicialmente conhecida como teoria da consolidação de Biot (1941; 1955; 1956), que depois passou a ser chamada de teoria da poroelasticidade (Geertsma, 1966) teve seus primeiros estudos realizados por Terzaghi (1923; 1943), na área experimental. Terzaghi estudou o comportamento poroelástico de solos (Terzaghi, 1923) por meio de uma coluna exposta a uma carga constante, sem movimento lateral. Nessa coluna unidimensional Terzaghi (1943) introduziu o princípio das tensões efetivas. Na sequência desses estudos, Biot descreveu a sedimentação de solos considerando um modelo de meio poroso preenchido por fluido, generalizando o problema para o caso tridimensional (Biot, 1941). Em

¹Esse problema é enfrentado por Veneza (Comerlati *et al.*, 2004).

trabalhos adicionais, Biot estendeu o modelo para materiais anisotrópicos e com propriedades não-lineares (Biot, 1955; 1956). Rice & Cleary (1976) reescreveram a teoria de Biot em termos de novas propriedades poroelásticas, que fossem fáceis de serem medidas em laboratório.

Todos os estudos e derivações matemáticas desenvolvidas até então consideravam uma composição única fluido-estrutura, onde as propriedades poroelásticas representavam, de forma conjunta, as duas partes constituintes do problema geomecânico. Contudo, Detournay & Cheng (1993) melhoraram a teoria da consolidação de Biot, ou teoria poroelástica, com o intuito de alcançar uma formulação que considerasse as contribuições individuais do fluido e da estrutura sólida, e a definiram como *formulação micromecânica*. Nesse trabalho, os autores decompueram a carga suportada pelo sistema fluido-estrutura em duas parcelas, sendo a primeira relacionada com as tensões que efetivamente atuam sobre a matriz porosa² e a segunda relacionada com a pressão de fluido no poro. Assim, foi possível introduzir no modelo de consolidação as compressibilidades dos constituintes, fluido e matriz porosa. Esses avanços na determinação das propriedades foram possíveis depois que os autores apresentaram as condições da matriz porosa drenada (*drained*) e não-drenada (*undrained*).

Nas seções seguintes serão apresentadas as equações que descrevem os dois fenômenos físicos envolvidos na consolidação de um meio poroso preenchido por um fluido em movimento. Em adição a isto, será abordado no final deste capítulo como estes dois fenômenos são acoplados em função das propriedades do meio poroso. Estes modelos consideram a teoria da consolidação de Biot (1941) e as compressibilidades apresentadas por Detournay & Cheng (1993). Entretanto, nesta tese não será apresentada uma descrição detalhada e minuciosa da teoria da poroelasticidade. Uma descrição completa desta teoria, onde estão envolvidas as constantes da consolidação de Biot, bem como a formulação micromecânica em termos das propriedades dos constituintes, pode ser encontrada de maneira detalhada no trabalho de Wang (2000). Uma abordagem alternativa foi elaborada por Dal Pizzol (2014), em que o autor deduz a equação da conservação da massa para um fluido escoando em um meio

²Essas tensões são conhecidas como tensões efetivas de Terzaghi e serão apresentadas na sequência do presente capítulo.

poroso deformável. Nessa dedução, a equação final do modelo é encontrada após a realização de um balanço de massa em um volume elementar composto por fluido e grãos em movimento.

2.2 Modelo geomecânico

O modelo geomecânico, como comentado anteriormente, descreve o comportamento da estrutura do meio poroso quando está sob a ação de forças externas e de um fluido em movimento. Assim sendo, será considerado um meio bidimensional sob um estado plano de deformações. Ou seja, as deformações da rocha reservatório na direção z são nulas, de modo que as deformações consideradas são reduzidas ao plano (x, y) (Malvern, 1969).

Assim, as hipóteses consideradas para descrever o comportamento da estrutura porosa são:

1. Material isotrópico,
2. Matriz porosa formada por grãos sólidos compressíveis,
3. Condição de pequenos deslocamentos e pequenas deformações,
4. Relação tensão-deformação com comportamento elástico linear,
5. Estado plano de deformações.

2.2.1 Tensões efetivas

A tensão efetiva, descrita por Terzaghi (1923; 1943), é aquela que é efetivamente suportada pela matriz porosa, que está em equilíbrio com as forças externas. Esta tensão é expressa como a soma de duas parcelas, onde a primeira, chamada de contribuição poro-elástica, é um tensor cheio. A segunda parcela é um tensor esférico relacionado com a pressão de poro exercida pelo fluido contido em seu interior (Wang, 2000). Assim, o tensor de tensões efetivas é definido como

$$\check{\sigma}' = \check{\sigma} + \alpha P \check{\mathbf{I}}, \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\sigma}'$ é o tensor de tensões efetivas, $\tilde{\sigma}$ é o tensor tensão total que age sobre o conjunto formado pela matriz porosa e pelo fluido, \mathbf{I} é o tensor identidade, P é a pressão do fluido e α é o coeficiente de Biot. Além disso, segundo Wang (2000), as deformações do meio poroso são independentes da pressão, uma vez que estas estão relacionadas com as tensões efetivas. O tensor de tensões efetivas é simétrico e suas componentes são

$$\tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{yx} & \sigma'_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

onde σ'_{xx} e σ'_{yy} são tensões normais, nos eixos coordenados x e y , respectivamente, e σ'_{xy} é a tensão cisalhante.

Apesar de não haver deformações na direção z , pela hipótese de estado plano de deformações, existe uma tensão normal não nula nesta direção. Esta tensão normal é a que garante que não haja qualquer tipo de deformação na direção z . Assim para o estado plano de deformações, tem-se que (Wang, 2000)

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (1 - 2\nu)\alpha P, \quad (2.3)$$

onde σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} são as componentes normais do tensor tensão, ν e α o coeficiente de Poisson.

O coeficiente de Biot, α , relaciona o quanto o volume do conjunto, também conhecido como *bulk*³, é alterado quando se injeta o fluido, mantendo a pressão constante (Wang, 2000). Além disso, esse coeficiente é definido como uma relação entre as compressibilidades do sólido e do conjunto sólido-fluido na forma

$$\alpha = 1 - \frac{C_s}{C_b}, \quad (2.4)$$

onde C_s é a compressibilidade do sólido, neste caso dos grãos que formam a rocha porosa, e C_b é a compressibilidade *bulk*, associada ao conjunto sólido-fluido. O coeficiente de Biot assume valores no intervalo entre ϕ e 1 (Berryman, 1992). Quando esse coeficiente alcança um valor próximo

³O volume *bulk* é aquele composto pelo volume de grãos sólidos mais o volume de poros, que é preenchido pelo fluido.

a 1 indica que os grãos possuem uma compressibilidade muito baixa, ou que são incompressíveis (Detournay & Cheng, 1993; Wang, 2000).

2.2.2 Equilíbrio de forças

Considerando um equilíbrio de forças em um volume de controle diferencial no meio poroso, chega-se em

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \alpha P \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade e ρ é a densidade média, definida como

$$\rho = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s, \quad (2.6)$$

onde ϕ é a porosidade do meio poroso, ρ_f é a densidade do fluido e ρ_s é a densidade dos grãos.

A equação (2.5) é a forma vetorial da equação de equilíbrio de forças. Essa equação pode ser decomposta em duas equações escalares, correspondentes às direções coordenadas x e y do sistema cartesiano. Assim, expandindo a equação (2.5) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} - \alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} - \alpha \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde g_x e g_y são as componentes do vetor aceleração da gravidade.

2.2.3 Equação constitutiva

Quando um determinado material é submetido a uma carga externa, normalmente sofre algum tipo de deformação. Obviamente, a forma como esse material se deforma depende de suas características constitutivas. Por exemplo, fluidos newtonianos se deformam indefinidamente, enquanto fluidos não newtonianos vão se deformar de acordo com o nível de carga a que são submetidos. Por outro lado, materiais sólidos se deformam pouco e, normalmente, em dois regimes diferentes. Inicialmente, o

comportamento da deformação é linear e elástico⁴ com relação à tensão externa aplicada e após um certo nível de tensão, que difere de um material para outro, ocorre o que se chama de escoamento, onde o material passa a se deformar plasticamente⁵.

No presente trabalho, que considera um problema de poroelasticidade, deve-se especificar uma relação constitutiva apenas para a matriz porosa, onde as tensões efetivas são atuantes. A equação constitutiva, que relaciona as tensões com as deformações, é dada por

$$\check{\sigma}' = f(\check{\epsilon}) = \check{\mathcal{D}}:\check{\epsilon}, \quad (2.8)$$

onde $f(\check{\epsilon})$ indica que as tensões são função de $\check{\epsilon}$, que é o tensor deformação. Essa função pode tomar diferentes formas, dependendo do modelo constitutivo considerado, como elástico linear e não linear, plástico ou viscoelástico (Desai & Siriwardane, 1984). Entretanto, o modelo considerado neste trabalho é elástico linear, pois representa bem o comportamento para pequenas deformações. Logo, essa função é dada pela segunda parte da igualdade, onde $\check{\mathcal{D}}$ é um tensor constitutivo de quarta ordem que representa as características mecânicas do meio. Neste modelo, o tensor $\check{\mathcal{D}}$ que originalmente possui 81 componentes, passa a ter 36 componentes devido a simetria do tensor tensão. Além disso, quando se considera um material isotrópico esse tensor passa a ter 12 componentes, que dependem de apenas duas constantes independentes denominadas de 1ª e 2ª constantes de Lamé (Malvern, 1969). Nessas condições, em duas dimensões, o tensor $\check{\mathcal{D}}$ tem 5 componentes não nulas dependentes exclusivamente das constantes de Lamé.

Assim, para um modelo elástico linear em um estado plano de deformações, a equação constitutiva para o tensor de tensões efetivas pode ser reescrita de forma mais simples, como

$$\check{\sigma}' = 2\mu_l \check{\epsilon} + \lambda_l \text{tr}(\check{\epsilon}) \check{\mathbf{I}}, \quad (2.9)$$

onde μ_l é a primeira constante de Lamé, λ_l é a segunda constante de Lamé e o operador $\text{tr}(\cdot)$ denota o traço de um tensor, equivalente à soma

⁴Deformação dita elástica é aquela onde o material retorna a configuração original quando não há mais uma carga sendo aplicada.

⁵Deformação dita plástica é aquela onde o material não retorna a sua configuração original após deixar de se aplicar uma carga externa.

das componentes da diagonal.

Já o tensor deformação $\check{\epsilon}$, também simétrico, pode ser relacionado com deslocamento por meio da relação cinemática

$$\check{\epsilon} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad (2.10)$$

onde \mathbf{u} é o vetor deslocamento de componentes u e v . Além disso, $\nabla \mathbf{u}$ é o tensor gradiente do vetor deslocamento, cujas componentes são as derivadas parciais de todas as componentes do vetor deslocamento em relação a todas as direções coordenadas.

O tensor deformação tem a forma

$$\check{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde ϵ_{xx} e ϵ_{yy} são as componentes normais do tensor deformação, enquanto ϵ_{xy} é a deformação cisalhante ou tangencial. De acordo com a equação (2.10) as componentes do tensor deformação podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde γ_{xy} é conhecida como deformação cisalhante de engenharia.

A primeira constante de Lamé, μ_l é também conhecida como módulo de elasticidade transversal⁶, denotado muitas vezes pela letra G . Esse módulo está relacionado com a segunda constante de Lamé por meio de (Wang, 2000)

$$\mu_l = G = \frac{\lambda_l(1-2\nu)}{2\nu}. \quad (2.13)$$

⁶O módulo de elasticidade transversal é a propriedade mecânica que representa a rigidez de um material, quando sofre ação de forças transversais. Esta propriedade usualmente é expressa em função de uma propriedade mais conhecida, o módulo de elasticidade linear ou módulo de Young, denotado pela letra E , que não será utilizado neste texto.

Substituindo a equação constitutiva e a equação cinemática da deformação, equações (2.9) e (2.10), nas equações do equilíbrio de forças, (2.7), completa-se o modelo geomecânico. Esse modelo é constituído por duas equações escalares, equilíbrio de forças em cada direção coordenada, e três incógnitas, sendo duas delas as componentes do vetor deslocamento. A outra variável encontrada nas equações do modelo é a pressão, e por essa razão uma equação adicional é requerida. Essa equação provem do modelo de escoamento, apresentada na próxima seção.

2.2.4 Condições de contorno

Por último, as condições de contorno para o modelo geomecânico são dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}^D & \text{em } \delta^D, \\ \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\psi}^N & \text{em } \delta^N, \end{cases} \quad (2.14)$$

onde δ^D é o contorno com condição de Dirichlet e δ^N é o contorno com condição de Neumann. Note que os valores prescritos $\boldsymbol{\psi}^D$ e $\boldsymbol{\psi}^N$ são grandezas vetoriais, sendo assim suas componentes podem ser definidas de forma independente.

No caso do valor da condição de Neumann, $\boldsymbol{\psi}^N$, quando o produto $\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ é aplicado, apenas as componentes do tensor tensão total que importam no contorno δ^N precisarão ser definidas. De forma geral, todas as componentes são importantes necessárias, entretanto, quando o contorno está perpendicular a uma das direções principais, apenas duas componentes são necessárias, sendo elas a normal e a tangente à essa direção coordenada. No capítulo 5, todos os de contornos nos exemplos de aplicação estão perpendiculares às direções coordenadas. Logo somente duas componentes do tensor tensão total precisarão ser definidas em cada contorno.

2.3 Modelo de escoamento

Na simulação de reservatórios de petróleo, assim como qualquer escoamento em meio poroso, utiliza-se a abordagem macroscópica do escoamento, dada pela lei de Darcy (Peaceman, 1977; Aziz & Settari, 1979; Pedrosa & Aziz, 1986; Mattax & Dalton, 1990). Nesta abordagem não é

necessário o conhecimento morfológico da estrutura porosa, assim, as grandezas e propriedades físicas são avaliadas em termos de médias volumétricas. Assim, o fenômeno de escoamento no meio poroso passa a depender apenas de grandezas macroscópicas, como a permeabilidade absoluta.

Neste trabalho serão consideradas as seguintes hipóteses simplificatórias:

1. Escoamento monofásico,
2. Fluido levemente compressível,
3. Viscosidade do fluido constante,
4. Fluido e rocha isotérmicos,
5. Meio poroso homogêneo,
6. Meio poroso com grãos compressíveis,

2.3.1 Conservação da massa

A equação diferencial da conservação da massa, para um fluido escoando em um meio poroso deformável, tem a forma (Aziz & Settari, 1979)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \phi) + \nabla \cdot (\rho_f \phi \mathbf{v}_f) = 0, \quad (2.15)$$

onde \mathbf{v}_f é a velocidade média real, ou intersticial, do fluido. Essa velocidade intersticial pode ser escrita em função da velocidade média do sólido e da velocidade média relativa do fluido em relação ao sólido, na forma

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f/s} + \mathbf{v}_s, \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{v}_{f/s}$ é a velocidade média relativa do fluido em relação ao sólido e \mathbf{v}_s é a velocidade média do sólido, ou ainda, dos grãos sólidos. O movimento do fluido com relação ao sólido é resultante do desequilíbrio entre a força de atrito, existente entre fluido e a parede dos poros, com o gradiente de pressão. O resultado desse desequilíbrio de forças produz o escoamento efetivo do fluido no meio poroso, o qual tipicamente é descrito pela lei de Darcy. Sendo \mathbf{v} a velocidade de Darcy, a equação (2.16) pode ser reescrita como (Wang, 2000),

$$\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{v}}{\phi} + \mathbf{v}_s, \quad (2.17)$$

onde a porosidade ϕ está relacionada com a razão de áreas que envolve a área que o fluido atravessa no interior do meio poroso e a área ocupada pelos grãos sólidos. A área disponível para escoamento é a porcentagem da área total que o fluido atravessa associada aos poros. A velocidade de Darcy está associada com o gradiente de pressão por meio de (Peaceman, 1977; Aziz & Settari, 1979)

$$\mathbf{v} = -\lambda \check{\mathbf{K}} (\nabla P - \rho_f \mathbf{g}), \quad (2.18)$$

onde $\check{\mathbf{K}}$ é o tensor permeabilidade absoluta, P a pressão do fluido e λ a mobilidade, dada por

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad (2.19)$$

sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido.

Substituindo a equação (2.17) em (2.15), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \phi) + \nabla \cdot [\rho_f (\mathbf{v} + \phi \mathbf{v}_s)] = 0. \quad (2.20)$$

Introduzindo a equação da definição da velocidade de Darcy na equação (2.20) e aplicando a regra da diferenciação do produto de funções na derivada temporal, bem como utilizando-se das hipóteses de fluido levemente compressível e meio homogêneo, obtém-se

$$\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0. \quad (2.21)$$

Neste momento, faz-se necessário analisar criteriosamente cada um dos termos desta equação, de forma a explicitar as compressibilidades do fluido e dos grãos sólidos, bem como o termo relacionado à deformação da matriz porosa.

Considerando o primeiro termo da equação (2.21), pode-se facilmente manipulá-lo de forma a expressá-lo em função da compressibilidade do fluido, dada por

$$c_f = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial P}, \quad (2.22)$$

encontrando-se

$$\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \phi c_f \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.23)$$

O segundo termo da equação (2.21) foi encontrado inicialmente por Rice & Cleary (1976), em função das novas propriedades poro-elásticas, diferenciando-se a equação de definição da porosidade, dada por

$$\phi = \frac{V_p}{V_b}, \quad (2.24)$$

onde V_p é o volume de poro e V_b é o volume do conjunto. Mais tarde, Detournay & Cheng (1993) rearranjaram estas equações e introduziram a compressibilidade dos grãos, de forma a obter a variação temporal da porosidade em função da pressão de poro e da deformação volumétrica, obtendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\alpha - \phi) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + (\alpha - \phi) c_s \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.25)$$

onde ε_v é a deformação volumétrica, dada por

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad (2.26)$$

ou seja, o traço do tensor deformação do meio poroso.

A definição da porosidade utilizada na equação (2.24) é também conhecida como *porosidade euleriana* (Coussy, 2004), pois o volume de poro é dividido pelo volume *bulk* da estrutura em sua configuração atual de deformação. Um outra alternativa seria utilizar a chamada *porosidade lagrangeana*, definida por Coussy (2004) como sendo aquela em que o volume *bulk* é mantido constante e avaliado na configuração original, ou inicial, da matriz porosa. Com essa definição, a equação de conservação da massa, equação (2.20), fica mais compacta com o termo de acumulação dependente de uma compressibilidade dos poros.

Essa abordagem é comumente empregada em simuladores de reservatórios convencionais, onde o fenômeno da geomecânica não é solucionado. Logo, a influência da deformação do meio poroso é considerada de forma simplificada através da compressibilidade dos poros. Diversos trabalhos onde são acoplados simuladores de reservatórios convencionais com simuladores geomecânicos, como Settari & Mourits (1998), Gutierrez *et al.* (2001) e Mainguy & Longuemare (2002) entre outros, discutem esses aspectos físicos que envolvem a utilização da porosidade lagrangeana na simulação de reservatórios. Além disso, por exemplo, Mainguy & Longuemare (2002) discute alternativas de correção da equação de conserva-

ção da massa usada em simuladores de reservatórios para que o mesmo possa ser acoplado com um simulador geomecânico da forma correta, onde se utiliza a porosidade euleriana. A porosidade euleriana pode ser encontrada também com o nome de porosidade verdadeira, nome esse utilizado por Settari & Mourits (1998) e Settari & Walters (2001).

Para manipular o último termo da equação (2.21), deve-se interpretar a velocidade média dos grãos sólidos \mathbf{v}_s como a derivada temporal do vetor deslocamento \mathbf{u} , encontrando

$$\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s = \phi \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Manipulando ainda mais, chega-se em

$$\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s = \phi \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (2.28)$$

A validade da troca de posição entre o operador divergente e a derivada temporal pode ser facilmente provada via notação indicial. Reconhecendo que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_v, \quad (2.29)$$

ou seja, o divergente do vetor deslocamento é a deformação volumétrica, chega-se em

$$\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_s = \phi \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}. \quad (2.30)$$

Assim, introduzindo as equações (2.23), (2.25) e (2.30) na equação de conservação da massa, equação (2.21), obtém-se

$$\left[\phi c_f + (\alpha - \phi) c_s \right] \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = f - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}, \quad (2.31)$$

onde f é um termo fonte que serve, por exemplo, para representar um poço no reservatório.

Finalmente, substituindo a equação (2.18) em (2.31) obtém-se a equação que fecha o modelo completo de escoamento em um meio poroso deformável. Note-se que, além da pressão, tem-se como incógnitas na equação de conservação da massa as componentes do vetor deslocamento. Essa dependência é indireta, uma vez que a variável que aparece na equa-

ção é a deformação volumétrica, que por sua vez depende do vetor deslocamento, como pode ser constatado pela equação (2.29).

A equação (2.31) está no contexto da formulação conhecida como *fixed-strain split* (Kim *et al.*, 2011), pois durante sua solução a deformação volumétrica permanece fixa. De acordo com Kim *et al.* (2011), esse forma de acoplamento, *fixed-strain split*, é condicionalmente estável⁷. Isso porque dependendo das propriedades físicas e dos parâmetros numéricos escolhidos a solução do problema acoplado não convergirá ou até mesmo convergirá para uma solução errada.

Uma outra alternativa seria abrir o termo de deformação volumétrica e substituí-lo por sua relação com a tensão total média e a pressão de poro, obtendo o acoplamento conhecido como *fixed-stress split* (Kim *et al.*, 2011). Essa é uma abordagem que pode ser incondicionalmente estável de acordo com o tipo de discretização temporal escolhida. No entanto, escolheu-se manter a formulação *fixed-strain split* pela simplicidade de implementação e por ser suficiente para os casos simulados nesse trabalho. Contudo, caso seja importante a utilização de um conjunto mais amplo de tipos de rochas, a abordagem por *fixed-stress split* deve ser considerada.

2.3.2 Variação da porosidade

Observando-se as equações do modelo geomecânico e do modelo de escoamento em um meio poroso deformável percebe-se que as equações estão naturalmente acopladas. Isso porque a pressão de poro e o tensor deformação aparecem em ambas as equações. Por outro lado, sabe-se que a porosidade do meio sofre alterações devido ao desequilíbrio de forças. A porosidade, conforme comentado anteriormente, é dependente do tempo e sua derivada com o tempo é definida através da equação (2.25), determinada por Detournay & Cheng (1993) utilizando a definição de porosidade. Nessa equação, a variação da porosidade ao longo do tempo introduz uma não linearidade ao modelo, pois a mesma está presente no termo de acumulação da equação de conservação da massa, equação (2.31), multiplicando a pressão. Conforme será explicado em detalhes na discretização das equações do modelo, a equação (2.25) será

⁷O material escolhido para a simulação dos problemas respeita a condição de estabilidade apresentada por Kim *et al.* (2011).

utilizada para atualização da porosidade ao final de cada passo de tempo, mantendo-se constante durante a solução das equações de equilíbrio de forças e conservação da massa em cada intervalo de tempo.

2.3.3 Condições de contorno

Finalmente, as condições de contorno para o modelo de escoamento são:

$$\begin{cases} P = \psi^D & \text{em } \zeta^D, \\ \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} = \psi^N & \text{em } \zeta^N, \end{cases} \quad (2.32)$$

onde ζ^D é o contorno com condição de Dirichlet e ζ^N é o contorno com condição de Neumann.

É importante salientar que, a união os contornos ζ^D e ζ^N é equivalente à união dos contornos δ^D e δ^N , definidos para o modelo geomecânico. Isto é, o contorno total $\partial\Omega$ está associado ao domínio de cálculo do problema, mas é dividido de acordo com cada modelo.

2.4 Resumo das equações

Antes de apresentar as possíveis formas de solução acoplada dos modelos, procura-se nessa seção expor um resumo das equações que são resolvidas no presente trabalho. Essas equações estão listada na tabela 2.1, onde dividiu-se em grupos. As equações do modelo geomecânico estão no primeiro grupo, as equações do modelo de escoamento no segundo grupo e no último grupo a equação de variação da porosidade, cuja versão discretizada será utilizada para atualização da porosidade, como será mostrado no próximo capítulo.

Deve-se observar que as equações do modelo geomecânico, primeiro grupo da tabela 2.1, tornam-se uma única equação a partir da substituição da equação constitutiva, (2.9), na equação de equilíbrio de forças, (2.5). Nessa equação resultante, as incógnitas são as componentes do vetor deslocamento e a pressão. Pode-se realizar a mesma substituição nas equações do modelo de escoamento, segundo grupo da tabela 2.1. Assim, obtém-se uma equação cujas incógnitas são as mesmas do modelo geomecânico, ou seja, pressão e componentes do vetor deslocamento.

Tabela 2.1 – Equações do modelo acoplado escoamento/geomecânica.

Descrição	Equação	Número
Equilíbrio de Forças	$\nabla \cdot (\check{\sigma}' - \alpha P \check{\mathbf{I}}) + \rho \mathbf{g} = 0$	(2.5)
Equação Constitutiva	$\check{\sigma}' = 2\mu_l \check{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda_l \text{tr}(\check{\boldsymbol{\varepsilon}}) \check{\mathbf{I}}$	(2.9)
Conservação da Massa	$[\phi c_f + (\alpha - \phi)c_s] \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = f - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$	(2.31)
Velocidade de Darcy	$\mathbf{v} = -\lambda \check{\mathbf{K}} (\nabla P - \rho_f \mathbf{g})$	(2.18)
Variação da Porosidade	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\alpha - \phi) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + (\alpha - \phi)c_s \frac{\partial P}{\partial t}$	(2.25)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se por essas equações que ambos os fenômenos estão acoplados de forma natural, como será visto na próxima seção.

2.5 Métodos de acoplamento

A solução acoplada do modelo de escoamento em um meio poroso deformável, deve ser tal que os campos de pressão e de deformações satisfaçam ao mesmo tempo todas as equações de balanço desse modelo (equações de equilíbrio de forças e de conservação da massa do fluido). Assim, nessa seção serão mostrados os parâmetros de acoplamento das equações, bem como os métodos de acoplamento disponíveis para a solução acoplada do escoamento e da geomecânica no meio poroso.

2.5.1 Parâmetros de acoplamento

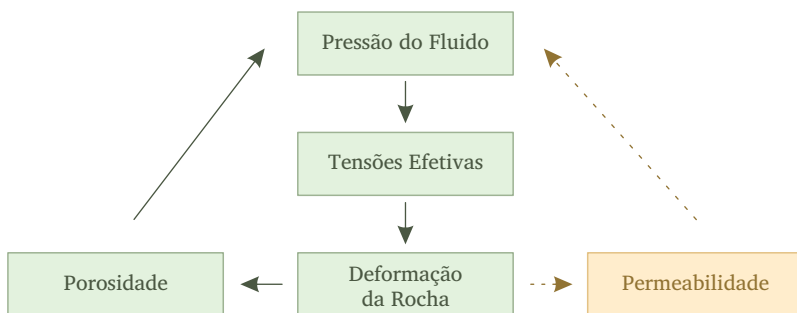
Observando-se as equações de equilíbrio de forças, conservação da massa do fluido e variação temporal da porosidade, equações (2.5), (2.31) e (2.25), têm-se como parâmetros de acoplamento a porosidade (ϕ), a pressão (P) e a deformação (ε_v). Contudo, a pressão é o principal parâmetro, pois essa variável possui duas funções em problemas de geomecânica: força motriz do escoamento do fluido e auxílio na matriz porosa para suportar as cargas geradas pelas rochas adjacentes ao reservatório (Gutierrez & Lewis, 1998).

Entretanto, como pode ser visualizado na figura 2.1, outro parâmetro do acoplamento que pode ser considerado é a permeabilidade (\check{K}). Nesse caso diversos fatores físicos podem influenciar na variação da permeabilidade como pressão, porosidade, tensões normais, tensão cisalhante e deformação axial (Chin *et al.*, 2000b). No entanto, como não se tem uma equação que acople diretamente a permeabilidade com as outras variáveis do modelo, costuma-se utilizar uma lei de potência, onde o expoente é determinado experimentalmente (Chin *et al.*, 2000a;b). Como exemplo, para permeabilidade dependente da porosidade, tem-se uma lei de potência na forma

$$\frac{K_{ij}}{K_{ij}^R} = \left(\frac{\phi}{\phi^R} \right)^n, \quad (2.33)$$

onde K_{ij} são as componentes do tensor permeabilidade e o superíndice R indica um valor de referência da propriedade, ou mesmo inicial.

Figura 2.1 – Esquema de iteração entre escoamento e geomecânica.



Fonte: Adaptado de Gutierrez & Lewis (1998).

No presente trabalho o acoplamento foi considerado com as variáveis presentes nas equações do modelo, adicionando-se apenas a variação da porosidade como a não linearidade existente nas equações do modelo. Ou seja, a permeabilidade foi considerada como um parâmetro constante.

2.5.2 Acoplamento numérico

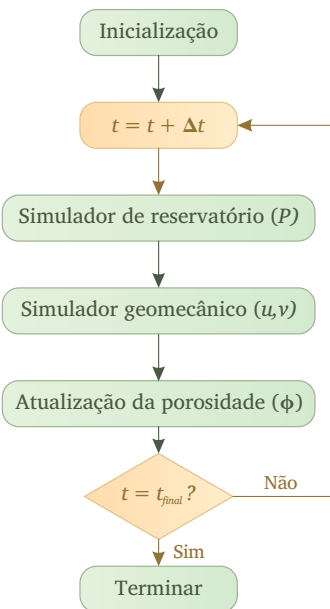
Foi visto até agora que, as equações diferenciais que descrevem o escoamento em meio poroso deformável se acoplam por meio de propriedades e variáveis do problema. Todavia, para realizar a simulação deste fenômeno, faz-se necessário considerar algum tipo de tratamento deste acoplamento. Diversos trabalhos com o foco no acoplamento numérico entre geomecânica e escoamento foram desenvolvidos (Settari & Mourits, 1998; Settari & Walters, 2001; Tran *et al.*, 2004; 2005). Como todos os métodos de acoplamento têm vantagens e desvantagens, a escolha da melhor opção dependerá dos valores das propriedades e condições de operação do caso que se está resolvendo (Tran *et al.*, 2005).

Os tipos de tratamento do acoplamento podem ser classificados em duas famílias, parcialmente acoplados e totalmente acoplados. Parcialmente acoplados são aqueles métodos onde as equações governantes da geomecânica e do escoamento no reservatório são resolvidas separadamente, enquanto que naqueles ditos totalmente acoplados, as equações são resolvidas em um único sistema linear (Settari & Walters, 2001). Dentro da classe de soluções parcialmente acopladas estão os métodos pseudo-acoplado (*pseudo coupling* ou *decoupled*), solução segregada em uma direção (*one-way coupling* ou *explicit coupling*), solução segregada em duas direções (*two-way coupling* ou *implicit coupling*).

No tipo pseudo-acoplado não se resolve as equações da geomecânica, considera-se apenas, através de correlações, a variação das propriedades do escoamento em função de constantes poro-elásticas (Settari & Mourits, 1998). Ou ainda, através de correlações obtidas por soluções empíricas (Settari & Walters, 2001). O acoplamento explícito ou segregado em uma direção, por sua vez, é realizado com o caminho das informações apenas em um sentido. Ou seja, a solução em um intervalo de tempo apenas as informações das variáveis do escoamento no reservatório são passadas para o modelo geomecânico. No entanto, as informações da geomecânica somente são levadas para o modelo de escoamento no passo de tempo seguinte, conforme mostrado no fluxograma da figura 2.2. Este enfoque permite também variar a taxa de atualização das informações do modelo geomecânico, permitindo resolve-lo utilizando intervalos de tempo maiores que o empregado na simulação do escoamento. Logo, o modelo geomecânico é resolvido menos vezes ao longo da simulação.

Esta variante, pode ser aplicada em tipos de reservatórios onde as variáveis do problema estrutural tem uma variação muito pequena quando comparada com a das variáveis do escoamento (Tran *et al.*, 2005).

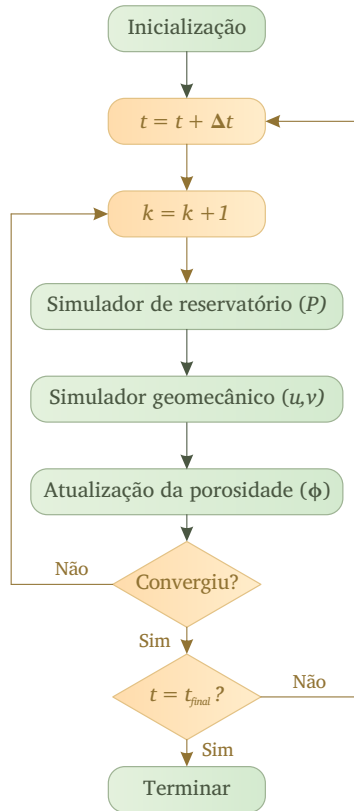
Figura 2.2 – Fluxograma do método de acoplamento segregado em uma direção.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O acoplamento iterativo ou solução segregada em duas direções, cujo fluxograma é mostrado na figura 2.3, recebe esse nome por haver um ciclo iterativo em cada intervalo de tempo, onde há uma troca constante de informação entre os modelos, ou seja, há um procedimento iterativo entre as soluções dos modelos de escoamento e geomecânico. Com este procedimento iterativo, ao chegar à convergência, obtém-se uma solução onde as variáveis de ambos os modelos adquirem os mesmos valores que se tivessem sido resolvidas juntas (Settari & Walters, 2001), desde que haja a convergência. Isso quer dizer que, a solução encontrada para pressão e deslocamentos satisfazem tanto o equilíbrio de forças quanto a conservação da massa do fluido.

Figura 2.3 – Fluxograma do método de acoplamento segregado em duas direções.

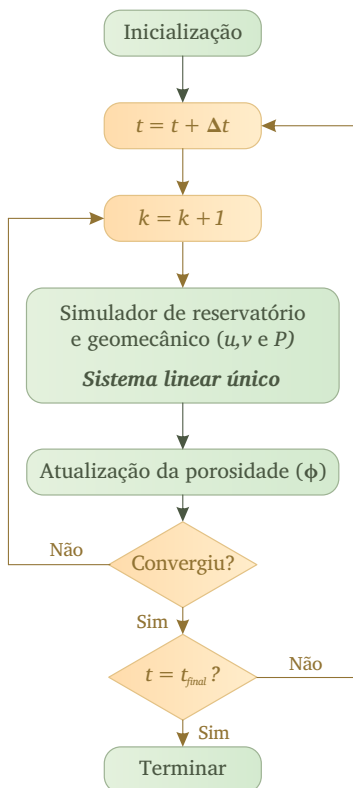


Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, o método simultâneo ou totalmente acoplado, utiliza-se da discretização de todas as variáveis em todas as equações dos modelos para obter um sistema linear de equações único, onde as incógnitas são as variáveis dos dois modelos, pressão e deslocamentos. Apesar de ser o método mais robusto, este tipo de tratamento não permite que simuladores comerciais já existentes sejam acoplados a módulos geomecânicos, funcionando como um *plugin* do simulador. Além disso, usar uma metodologia de solução simultânea implica em um sistema linear muito grande. Nesse sistema estão incluídas as variáveis dos dois modelos físicos, que

possuem ordens de escala diferentes. Isso faz com que se obtenha uma matriz cujos coeficientes sejam de magnitudes muito distintas, inserindo um custo computacional maior para obtenção da solução do sistema linear. No fluxograma da figura 2.4 observa-se que o método simultâneo ainda tem um processo iterativo em cada intervalo de tempo. Contudo este procedimento é necessário para resolver as não linearidades do problema, relacionadas às propriedades do meio, nesse caso a porosidade.

Figura 2.4 – Fluxograma do método de acoplamento simultâneo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No presente trabalho, optou-se por utilizar o acoplamento segregado em duas direções, pois este permite estudar o acoplamento físico utilizando-se de discretizações distintas em cada modelo de maneira mais

consistente, como EbFVM para o escoamento e MEF para a geomecânica. Vale lembrar que no presente trabalho a discretização pelo MEF será eventualmente utilizada como referência na solução numérica do modelo geomecânico em algumas situações de análise dos resultados. Outra questão importante nesse tipo de acoplamento é que o verdadeiro comportamento físico de interação entre as variáveis dos modelos é respeitado, quando comparado com os outros dois tipos de acoplamento parcial, pseudo-acoplado e segregado em uma direção.

Finalmente, com o tipo de acoplamento utilizado resolve-se inicialmente o escoamento com as equações (2.31) e (2.18), seguido pela solução do modelo geomecânico, cujas equações são a (2.5) e a (2.9), e atualiza-se a porosidade, por meio da equação (2.25). Esse procedimento é repetido até que a convergência seja alcançada para o intervalo de tempo considerado.

Método dos volumes finitos baseado em elementos

Neste capítulo serão abordados os conceitos fundamentais do método de volumes finitos baseado em elementos. Inicialmente, apresenta-se as características geométricas de uma malha não estruturada híbrida, utilizada por essa metodologia, como entidades geométricas elementares e suas relações, construção dos volumes de controle e notação utilizada para representação das entidades geométricas nas equações discretizadas. Além disso, é apresentado o procedimento de discretização por EbFVM, bem como as aproximações numéricas utilizadas pelo mesmo. Mais detalhes dos aspectos geométricos associados ao Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos estão apresentados no apêndice A.

3.1 Malhas não estruturadas híbridas

Uma malha computacional é um conjunto de entidades geométricas que constituem a representação discreta de um domínio físico. Este conjunto é formado por entidades de diferentes dimensões, em que a

principal delas tem a mesma dimensão do domínio de cálculo. Cada uma das entidades principais é uma porção finita do domínio subdividido. Todas as entidades mantêm uma relação de interdependência entre si. Qualquer malha que não possua uma lei de construção, de tal forma que as conectividades entre as entidades elementares sejam arbitrárias, diz-se que é uma malha não estruturada. Por outro lado, se o processo de construção em uma malha é definido, de tal forma que os volumes elementares possuam o mesmo número de vizinhos, diz-se que esta malha é estruturada (Maliska, 2004).

Quando uma malha não estruturada é formada por entidades principais de diferentes formas geométricas, diz-se que esta é híbrida ou mista. No presente trabalho são consideradas malhas não estruturadas híbridas bidimensionais, com entidades elementares principais na forma de quadriláteros e triângulos. No trabalho de Hurtado (2011) pode-se encontrar o conjunto de condições necessárias que uma malha não estruturada deve satisfazer, tais como conformidade entre as entidades elementares principais, ausência de espaços vazios no domínio discreto, entre outras.

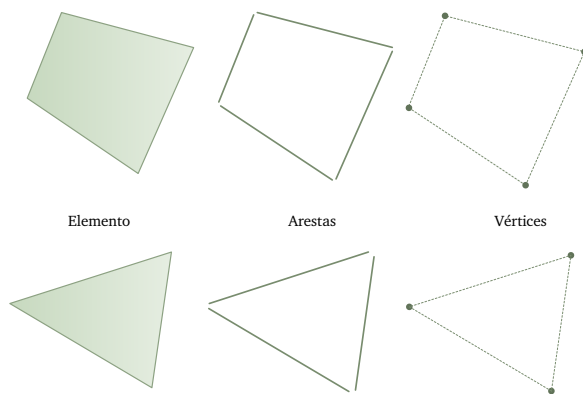
3.1.1 Entidades geométricas fundamentais

A malha não estruturada utilizada como suporte geométrico para a discretização através do EbFVM tem como entidade principal o elemento. O elemento nada mais é que uma porção discreta do domínio de solução, e nas equações será denotado por e . Um elemento é delimitado por arestas unidimensionais. Cada aresta é um segmento de reta limitado por dois vértices, entidades cuja dimensão é nula. Na figura 3.1 estão ilustradas as entidades geométricas fundamentais para os dois tipos de elementos considerados.

Durante o procedimento de discretização do EbFVM, utiliza-se o conceito de nó. O nó é um ente numérico onde valores das variáveis são aproximados. Nas malhas não estruturadas utilizadas neste trabalho, os nós coincidem com os vértices. O vértice em si nada mais é que um ponto no plano, cuja posição em um domínio bidimensional é determinada por duas coordenadas.

A construção dos volumes de controle é uma etapa que exige a definição prévia de entidades geométricas auxiliares em cada elemento, denominadas subelementos e faces. Essas entidades são determinadas no

Figura 3.1 – Entidades geométricas básicas que formam os elementos triangular e quadrilateral.



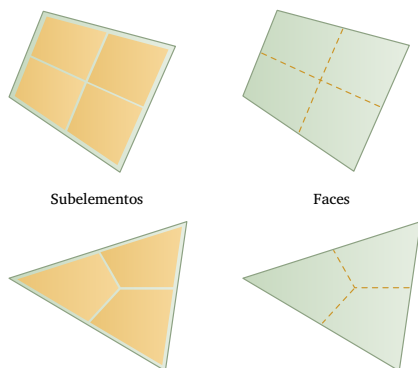
Fonte: Elaborada pelo autor.

interior do elemento e servirão para definir e delimitar o volume de controle. A face, denotada por f , é um segmento de reta limitado pelo centróide do elemento e o ponto médio de uma aresta. Assim, pode-se associar uma face a cada aresta do elemento. Já o subelemento, que é denotado por s , é a porção do elemento delimitado por duas faces e porções de duas arestas do elemento, como pode ser observado na figura 3.2. No processo de discretização, necessita-se identificar os subelementos no interior de um determinado elemento. Para isso, deve-se associar cada subelemento a um nó p de um elemento e na forma s_p^e . A associação de cada subelemento a um nó é possível, pois o subelemento é uma entidade dual do nó (Hurtado, 2011).

A construção do volume de controle dá-se pela união de subelementos e faces localizados no interior dos elementos. Assim, a união de todos os subelementos associados ao nó p , localizados nos elementos que o compartilham, formam o volume de controle. Além disso, esse volume de controle é delimitado pelas faces que circundam os subelementos associados ao nó p , conforme pode ser observado na figura 3.3.

A figura 3.3 ilustra a construção de um volume de controle no entorno de um nó p qualquer. Essa tarefa é realizada através da união de vários subelementos dos diferentes elementos que compartilham o nó p . Observa-se que, a forma do volume de controle pode ser altamente irregular e dependerá da quantidade e tipo de elementos que estão compartilhando o

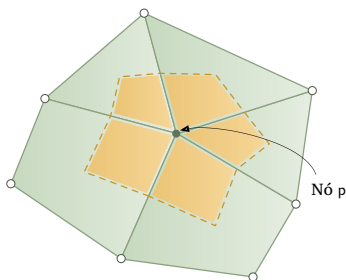
Figura 3.2 – Entidades geométricas auxiliares que formam os elementos triangular e quadrilateral.



Fonte: Elaborada pelo autor.

nó associado. Entretanto, o cálculo dos fluxos, necessários para qualquer tipo de balanço, será realizado no interior do elemento, onde a geometria é simples e de fácil manipulação computacional.

Figura 3.3 – Volume de controle associado ao nó p .



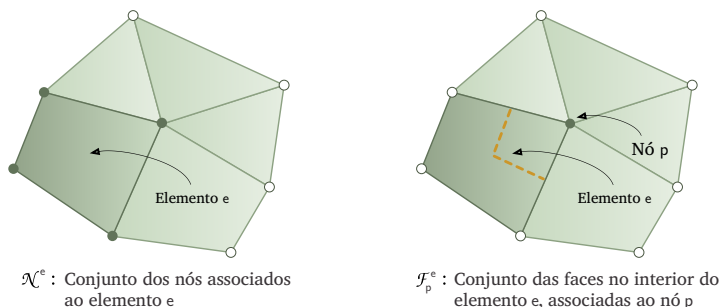
Fonte: Elaborada pelo autor.

Outras informação adicionais de uma malha híbrida podem ser encontradas no apêndice A, onde está detalhada a forma de se especificar este tipo de malha. Além disso, no referido apêndice está descrito também a especificação da malha de contorno, bem como a forma como as suas entidades se relacionam com as entidades internas a malha. Outro ponto importante exposto nesse apêndice é o processo de transformação de coordenadas locais utilizado em todos os elementos da malha.

3.1.2 Conjuntos de entidades

Em alguns momentos do processo de discretização, necessita-se realizar varreduras em conjuntos de entidades. Logo, é conveniente definir alguns conjuntos para facilitar a notação. Os conjuntos associados ao elemento são dois, \mathcal{N}^e e \mathcal{F}_p^e . \mathcal{N}^e é o conjunto de nós associados ao elemento e \mathcal{F}_p^e é o conjunto de faces no interior do elemento e associadas ao nó p . Ambos os conjuntos estão ilustrados na figura 3.4. Os conjuntos de entidades fundamentais associadas aos nós são denotados por \mathcal{E}_p e \mathcal{N}_p . O conjunto \mathcal{E}_p é aquele composto pelos elementos que compartilham o nó p e o conjunto \mathcal{N}_p é aquele composto pelos nós que formam o estêncil de uma equação discretizada associada ao volume de controle centrado em p , respectivamente. Esses conjuntos podem ser visualizados de forma esquemática na figura 3.5.

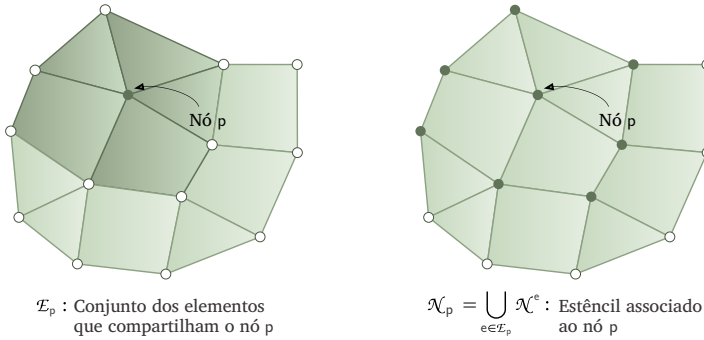
Figura 3.4 – Conjuntos de entidades fundamentais associadas ao elemento e .



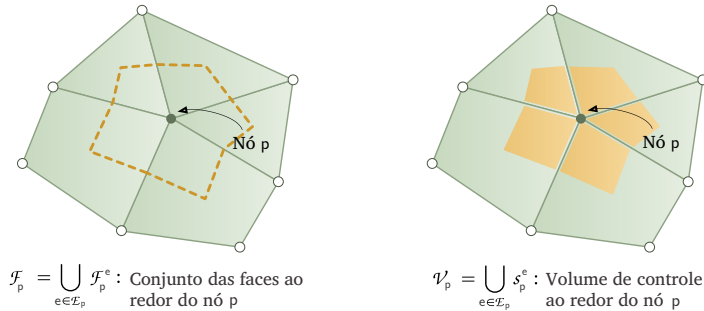
Fonte: Adaptado de Hurtado (2011).

Finalmente, os conjuntos de entidades auxiliares que são associadas ao nó p são denominados \mathcal{F}_p , conjunto de faces ao redor do nó p , e \mathcal{V}_p , conjunto de subelementos ao redor do nó p . A figura 3.6 ilustra estes dois conjuntos de entidades auxiliares. O conjunto \mathcal{V}_p forma o volume de controle, enquanto que o conjunto \mathcal{F}_p delimita este volume. De fato, no método EbFVM é realizado o balanço das grandezas físicas neste volume de controle, caracterizando-o como um método de volumes finitos.

Muitas expressões matemáticas do EbFVM precisam denotar valores de variáveis ou operadores discretos associados a uma entidade geométrica. Nestas ocasiões, quando forem associados aos nós ou as faces rece-

Figura 3.5 – Conjuntos de entidades fundamentais associadas ao nó p .

Fonte: Hurtado (2011).

Figura 3.6 – Conjuntos de entidades auxiliares associadas ao nó p .

Fonte: Adaptado de Hurtado (2011).

berão um subíndice indicando estas entidades. Já no caso do elemento, receberão um superíndice, para não haver superposição com os índices associados aos nós e as faces, pois essas entidades estão normalmente associadas a algum elemento da malha.

3.1.3 Associação de propriedades heterogêneas

Um item importante na utilização de metodologias aplicadas a malhas não estruturadas é a associação de propriedades às entidades geométricas da malha. Isso é especialmente importante quando o modelo matemático a ser resolvido possui uma ou mais propriedades heterogêneas. Usualmente, em métodos de volumes finitos essas propriedades

são associadas aos volumes de controle discretos, já que são as entidades que subdividem o domínio de cálculo. No entanto, essa associação não é conveniente pois necessitaria de interpolação das propriedades nas faces para o cômputo dos fluxos. Essa interpolação é uma fonte extra de erro para a solução numérica que pode ser evitada quando as propriedades físicas são associadas às faces (Cordazzo *et al.*, 2003). No contexto do método de volumes finitos baseado em elementos, essa associação de propriedades pode ser empregada, pois as faces que delimitam os volumes de controle estão localizadas no interior dos elementos, que são as entidades geométricas que subdividem o domínio físico. De fato, no presente trabalho, todas as propriedades físicas do meio poroso são associadas aos elementos da malha.

3.2 Conceitos fundamentais

A característica básica de todo método de volumes finitos é a realização de balanços em volumes de controle discretos. Esta tarefa é executada integrando, em volumes de controle, a equação diferencial do problema físico em sua forma divergente. A formulação de volumes finitos baseado em elementos tem como principal característica a realização de todas as operações necessárias para a discretização a nível de elemento (Baliga & Patankar, 1980; 1983). Um detalhamento do procedimento de discretização do EbFVM pode ser encontrado em Hurtado (2011).

É importante salientar que a integração no volume dá origem a uma equação discretizada espacialmente. Logo, uma segunda integração, agora no tempo, é necessária para discretizar a equação diferencial por completo. Como no presente trabalho optou-se por utilizar uma aproximação simples no tempo, através de diferenças finitas, esse capítulo se deterá à apresentação do procedimento de discretização no espaço.

3.2.1 Procedimento de discretização

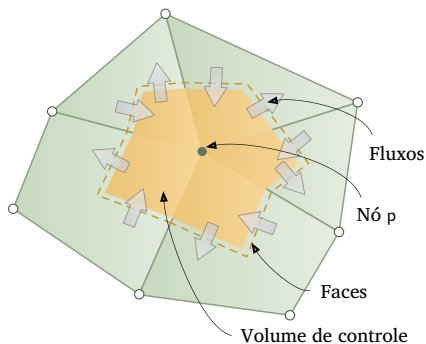
Conforme citado anteriormente, a discretização por volumes finitos realiza uma integração da equação diferencial de conservação no volume de controle para obter o balanço da variável em estudo no referido volume. As manipulações dessa integração bem como suas aproximações

são equivalentes a um balanço no volume de controle. Assim, apresenta-se o procedimento de discretização por volumes finitos com as principais etapas:

1. Integração da equação de conservação em cada volume de controle discreto p da malha computacional.
2. Aplicação do teorema da divergência de Gauss no termo divergente para obtenção de uma integral na superfície de controle.
3. Divisão da integral na superfície de controle através de um somatório de integrais nas faces do volume de controle.
4. Aproximação das integrais nas faces do volume discreto.

Dois pontos importantes relacionados aos dois últimos itens do procedimento de discretização espacial devem ser observados. O primeiro, relacionado ao item 3 do procedimento, diz respeito à separação da integral na superfície de controle em um somatório de integrais nas faces discretas que delimitam o volume. Essas integrais nas faces nada mais são do que os fluxos, necessários para o balanço no volume controle. Isso mostra a equivalência entre integração no volume e o balanço de uma dada propriedade no volume de controle discreto, principal característica de um método de volumes finitos. A figura 3.7 mostra o volume de controle p e os fluxos associados às faces discretas.

Figura 3.7 – Balanço no volume de controle associado ao nó p .



Fonte: Elaborada pelo autor.

O segundo ponto importante está relacionado ao item 4 do procedimento. Nesse, a aproximação das integrais nas faces do volume de controle vai depender das características matemáticas dos fluxos. Como o presente trabalho estuda o escoamento em meios porosos, e nesse tipo de problema o termo de fluxo existente é apenas o difusivo, optou-se por apresentar apenas o processo de aproximação desse tipo de fluxo.

É importante notar que, ao final da etapa de aproximação das integrais nas faces do volume de controle obtém-se um somatório de fluxos que entram e saem no volume discreto, ponto chave da característica de balanço. Usualmente, uma equação discretizada pelo método dos volumes finitos pode ser escrita como

$$T_p^{\text{acc}} + T_p^{\text{flx}} = T_p^{\text{src}}, \quad (3.1)$$

onde T_p^{acc} , T_p^{flx} e T_p^{src} são os termos de acumulação, fluxo e fonte discretos associados ao volume de controle p , respectivamente. Note que os termos de acumulação e fonte são resultados diretos da aproximação das integrais de volume. Diferentemente, o termo de fluxo na verdade é escrito como um somatório de fluxos, na forma

$$T_p^{\text{flx}} = \sum_{f \in \mathcal{F}_p} q_f, \quad (3.2)$$

onde q_f é o fluxo difusivo que atravessa a face f pertencente à superfície de controle do volume p , expressa por \mathcal{F}_p .

Um fato bastante importante no método de volumes finitos baseado em elementos é que todas as aproximações necessárias na discretização dos fluxos são realizadas no interior do elemento. Ou seja, todos os cálculos numéricos relacionados às faces são realizados utilizando-se dados geométricos apenas do elemento em questão, que são facilitados pela utilização da transformação de coordenadas locais (seção A.3). Para finalizar o procedimento de discretização, na sequência do presente capítulo serão apresentadas as aproximações do gradiente, da integral de volume e da integral de superfície necessárias para a obtenção dos termos de acumulação, fluxo e fonte discretos.

As aproximações numéricas apresentadas a seguir serão utilizadas para discretizar as equações do modelo. Os termos de acumulação, fluxo

e fonte expressos na equação (3.1) serão detalhados durante a discretização das equações, a ser discutida no capítulo seguinte.

3.3 Aproximação do gradiente de uma variável

Nos problemas físicos onde há transporte difusivo, os fluxos dependem do gradiente da variável em estudo. No caso de escoamento em meios porosos, quando é utilizada uma descrição macroscópica do escoamento, a equação de conservação da massa possui um termo de fluxo que representa um transporte difusivo. Já nas equações do modelo geomecânico, os gradientes dos deslocamentos aparecem quando as equações de equilíbrio de forças nas direções x e y são rearranjadas, como está mostrado no capítulo 4. Assim, faz-se necessário deduzir a aproximação deste operador diferencial no EbFVM.

A aproximação do gradiente em um método de volumes finitos baseado em elementos é realizada mediante a diferenciação da aproximação da grandeza física em estudo. Definindo a aproximação de uma variável escalar genérica Θ no interior do elemento como

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{p \in \mathcal{N}^e} N_p(\xi, \eta) \Theta_p, \quad (3.3)$$

onde Θ_p é o valor da variável Θ associado ao nó p do elemento e . Sabendo que o gradiente de uma variável Θ é definido como

$$\nabla \Theta = \begin{pmatrix} \partial_x \Theta \\ \partial_y \Theta \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

então, a sua forma aproximada é obtida diferenciando a equação (3.3) é

$$\nabla \Theta \approx \sum_{p \in \mathcal{N}^e} \begin{pmatrix} \partial_x N_p \\ \partial_y N_p \end{pmatrix} \Theta_p. \quad (3.5)$$

A diferenciação deve ser realizada em relação às coordenadas globais, no entanto, as funções de forma são definidas em coordenadas locais. Desta forma, faz-se necessário utilizar a regra da cadeia para derivação de funções compostas. Realizando esse procedimento, detalhado em Hurtado

(2011), pode-se chegar a

$$\nabla\Theta = \mathbf{J}^{-T} \sum_{p \in \mathcal{N}^e} \begin{pmatrix} \partial_{\xi} N_p \\ \partial_{\eta} N_p \end{pmatrix} \Theta_p, \quad (3.6)$$

onde \mathbf{J}^{-T} é a matriz jacobiana transposta e inversa. A definição da matriz jacobiana e a forma de obtê-la numericamente estão expostas na seção A.4 do apêndice A. Por questão de clareza e conveniência, optou-se por suprimir o sobrescrito da matriz jacobiana que a associa a um elemento, tendo em vista que isso não causará ambiguidades ao longo do texto.

O somatório da equação (3.6) pode ser expresso como um produto entre matriz e vetor, assim

$$\nabla\Theta = \mathbf{J}^{-T} (\mathbf{D}^e)^T \Theta^e = \mathbf{J}^{-T} \begin{pmatrix} \partial_{\xi} N_1 & \partial_{\eta} N_1 \\ \partial_{\xi} N_2 & \partial_{\eta} N_2 \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{\xi} N_{N_h(e)} & \partial_{\eta} N_{N_h(e)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_{N_h(e)} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde Θ^e é o vetor de valores nodais da variável Θ e \mathbf{D}^e é a matriz de derivadas das funções de forma, também utilizada na determinação da matriz jacobiana na subseção A.4.

3.4 Integração numérica

A aproximação numérica das equações de conservação é realizada, em um método de volumes finitos, na sua forma integral. Assim, a aproximação de integrais torna-se uma tarefa importante na discretização. As duas integrais que aparecem comumente nas equações de conservação são as integrais de volume e de superfície. A primeira integral é associada ao volume de controle e a segunda, encontrada no termos de fluxos, é associada à superfície de controle que delimita o volume.

3.4.1 Integral de volume

A aproximação da integral de volume será realizada pelo produto entre o valor médio do integrando no domínio de integração pelo volume deste domínio. Em um método de volumes finitos, usualmente, o valor médio do integrando está associado a um ponto interno ao volume de

controle, nesse caso é o valor nodal da variável. Assim, a aproximação da integral volumétrica de uma variável Θ , em um volume de controle discreto será dada por

$$\int_{V_p} \Theta dV \approx \Theta_p \Delta V_p \quad (3.8)$$

onde Θ_p é o valor discreto da variável associado ao nó p .

Por outro lado, em um método de volumes finitos baseado em elementos, a aproximação de uma integral de volume pode ser realizada também em nível de subelementos. Para isso, inicialmente utiliza-se a regra da soma de integrais, onde a integral no volume pode ser explicitada como um somatório de integrais em volumes menores. Nesse caso esses volumes menores são os subelementos, que se unem para formar o volume de controle, que é o domínio de integração. Logo, tem-se que

$$\int_{V_p} \Theta dV = \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \int_{s_p^e} \Theta dV, \quad (3.9)$$

Sendo as integrais de volume, associadas aos subelementos que formam o volume de controle do nó p , aproximadas de acordo com

$$\int_{V_p} \Theta dV = \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \Theta_{s_p^e} \Delta V_{s,p}^e, \quad (3.10)$$

onde $\Theta_{s_p^e}$ é o valor do integrando, avaliado no baricentro do subelemento s_p^e e $\Delta V_{s,p}^e$ é o volume de tal subelemento. Caso não seja possível de se determinar o valor do integrando através de uma expressão explícita em função das coordenadas espaciais, pode ser necessário o uso de esquemas de interpolação para relacionar o valor de $\Theta_{s_p^e}$ com os valores nodais do elemento. Na sequência do presente trabalho, quando for necessário um esquema de interpolação, o utilizado é o baseado nas funções de forma, conforme já mostrado na na seção A.3.

O volume dos subelementos pode ser facilmente calculado no plano transformado pois possui uma forma regular neste plano. Após a sua determinação no plano transformado, converte-se esse volume para o plano físico através de um fator de escala. Na transformação de coordenadas utilizada o fator de escala é o determinante da matriz jacobiana $|\mathbf{J}|$ (Zienkiewicz & Taylor, 2000). Já o volume dos volumes de controle são

determinados como a soma dos volumes dos subelementos, na forma

$$\Delta V_p = \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \Delta V_{s,p}^e. \quad (3.11)$$

3.4.2 Integral de superfície

Nas equações de conservação, as integrais de superfície aparecem normalmente na forma

$$\int_{\mathcal{J}_p} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.12)$$

onde \mathbf{v} é uma densidade de fluxo, advectivo ou difusivo (Hurtado, 2011). Devido a superfície de controle ter uma forma arbitrária no EbFVM, faz-se necessário dividir essa integral em parcelas associadas às faces que delimitam o volume de controle. Assim, pode-se escrevê-la como

$$\int_{\mathcal{J}_p} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_e} \int_f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.13)$$

onde f é uma face, no interior do elemento e , pertencente à superfície de controle que delimita o volume p . Utilizando a regra do ponto médio para aproximação desta integral (Ferziger & Perić, 2002), pode-se reescrevê-la como

$$\int_{\mathcal{J}_p} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_e} \mathbf{v}_f \cdot \Delta \mathbf{S}_f \quad (3.14)$$

onde \mathbf{v}_f é a densidade de fluxo avaliada no no ponto médio, ou centróide, da face f e $\Delta \mathbf{S}_f$ o vetor área da face f , apontando para fora do volume de controle.

Discretização das equações do modelo

Uma vez apresentados os fundamentos do processo de discretização pelo EbFVM, descrito no capítulo anterior, pode-se aplicar esse procedimento às equações do modelo completo considerado. Primeiramente será realizada a discretização da equação do escoamento e na sequência da equação da geomecânica. Ao final do processo de discretização de cada modelo será descrito um procedimento de montagem dos sistemas de equações discretas, que neste trabalho, conforme já comentado no capítulo 2, são dois sistemas lineares um para cada modelo. Ao final do presente capítulo, duas seções são dedicadas a apresentar os detalhes numéricos do acoplamento entre as variáveis e o algoritmo de solução desse acoplamento.

4.1 Modelo de escoamento

Nesta seção, será abordada a discretização das equações do modelo de escoamento no reservatório. Para isto, aplica-se a técnica tradicio-

nal de volumes finitos, realizando a integração no volume de controle discreto. Como a equação de conservação da massa possui derivadas temporais, faz-se necessário realizar, adicionalmente, uma integração no tempo.

Antes de iniciar o procedimento de discretização, faz-se a substituição da lei de Darcy, equação (2.18), na equação (2.31), que descreve a conservação da massa em um meio poroso deformável. Desta forma, obtém-se

$$(\phi c_f + (\alpha - \phi)c_s) \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot [\lambda \check{\mathbf{K}} (\nabla P - \rho_f \mathbf{g})] = f - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Definindo uma função de potencial gravitacional, dada por

$$\Upsilon = g_x x + g_y y, \quad (4.2)$$

onde g_x e g_y são as componentes do vetor aceleração da gravidade, \mathbf{g} , e x e y as coordenadas cartesianas. Em função desse potencial, pode-se escrever

$$\mathbf{g} = \nabla \Upsilon. \quad (4.3)$$

Assim, a equação de conservação da massa fica em função de dois gradientes, da pressão e da função potencial. Esta forma facilita a tarefa de discretização, pois todo o termo de fluxo fica dependente da aproximação de gradientes. Logo, a equação final fica

$$(\phi c_f + (\alpha - \phi)c_s) \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot [\lambda \check{\mathbf{K}} (\nabla P - \rho_f \nabla \Upsilon)] = f - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}, \quad (4.4)$$

onde os termos, da esquerda para a direita, serão denominados convencionalmente como acumulação, fluxo, fonte e variação temporal da deformação volumétrica, respectivamente. É importante notar aqui que os três primeiros termos são exatamente aqueles expostos na equação (3.1) do capítulo anterior.

4.1.1 Termo de acumulação

A integração no volume, para o termo de acumulação, é realizada através da equação (3.8), apresentada no capítulo anterior. Em adição a isto, realizando a integração temporal em um intervalo de tempo discreto

Δt , obtém-se

$$T_p^{\text{acc}} = (\phi_p c_f + (\alpha - \phi_p) c_s) (P_p - P_p^o) \Delta V_p, \quad (4.5)$$

onde a porosidade do volume de controle associado ao nó p é considerada constante no intervalo de tempo. O termo associado a pressão no instante de tempo anterior, P_p^o , fará parte do termo independente da equação discretizada. Enquanto que a parte deste termo associado à pressão no instante de tempo final do intervalo, P_p , fará parte da matriz de coeficientes. Isto ocorre, pois a pressão no final do intervalo de tempo é uma incógnita do problema.

4.1.2 Termo de fluxo

A discretização do termo de fluxo exige algumas transformações que culminarão na aproximação de uma integral de superfície. Assim sendo, será realizada primeiro a integração no volume e na sequência será realizada a integração no tempo. Aplicando a integração no volume, para o termo de fluxo, e utilizando o teorema da divergência de Gauss, tem-se que

$$T_p^{\text{flx}} = \int_{\mathcal{V}_p} \lambda \check{\mathbf{K}} \nabla P \cdot d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{V}_p} \lambda \rho_f \check{\mathbf{K}} \nabla \Upsilon \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.6)$$

A utilização do teorema da divergência de Gauss tornou as integrais de volume em integrais de superfície, que podem ser aproximadas segundo a equação (3.14), chegando-se em

$$T_p^{\text{flx}} = \lambda \left[\sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\check{\mathbf{K}} \nabla P)_f \cdot \Delta \mathbf{S}_f - \rho_f \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\check{\mathbf{K}} \nabla \Upsilon)_f \cdot \Delta \mathbf{S}_f \right], \quad (4.7)$$

onde λ e ρ_f são propriedades do fluido e consideradas constantes no domínio inteiro.

A partir deste momento, utiliza-se a aproximação do gradiente de

uma variável, determinada na seção 3.3. Desta forma, encontra-se

$$T_p^{\text{flx}} = \lambda \left[\sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\mathbf{K}^e \mathbf{J}_f^{-T} (\mathbf{D}_f^e)^T \mathbf{P}^e)^T \Delta \mathbf{S}_f - \rho_f \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\mathbf{K}^e \mathbf{J}_f^{-T} (\mathbf{D}_f^e)^T \boldsymbol{\Upsilon}^e)^T \Delta \mathbf{S}_f \right], \quad (4.8)$$

onde \mathbf{P}^e e $\boldsymbol{\Upsilon}^e$ são os valores discretos nodais da pressão e da função gravitacional, respectivamente. É importante salientar dois pontos importantes nesta aproximação: a permeabilidade torna-se uma matriz discreta constante associada ao elemento¹ e o produto escalar fica expresso na forma matricial equivalente. Note-se também que a matriz jacobiana e a matriz de derivadas das funções de forma devem ser avaliadas na face f . A fim de tornar mais compacta a forma discreta do termo de fluxo, Hurtado (2011) definiu um operador único utilizando a propriedade comutativa do produto escalar, na forma

$$(\boldsymbol{\beta}_f^e)^T = \Delta \mathbf{S}_f^T \mathbf{K}^e \mathbf{J}_f^{-T} (\mathbf{D}_f^e)^T, \quad (4.9)$$

com dimensão igual ao número de nós do elemento no qual a face está contida. Assim, pode-se reescrever o termo de fluxo na forma

$$T_p^{\text{flx}} = \lambda \left[\sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\boldsymbol{\beta}_f^e)^T \mathbf{P}^e - \rho_f \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\boldsymbol{\beta}_f^e)^T \boldsymbol{\Upsilon}^e \right]. \quad (4.10)$$

Finalmente, a integração temporal pode ser realizada. Utilizando-se uma abordagem totalmente implícita (Ferziger & Perić, 2002; Maliska, 2004) neste termo, obtém-se

$$T_p^{\text{flx}} = \lambda \left[\sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\boldsymbol{\beta}_f^e)^T \mathbf{P}^e - \rho_f \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\boldsymbol{\beta}_f^e)^T \boldsymbol{\Upsilon}^e \right] \Delta t, \quad (4.11)$$

¹ Conforme já explicado na seção 3.1.3, é conveniente que as propriedades físicas estejam associadas aos elementos, uma vez que o fluxo é aproximado na face do volume de controle. Dessa maneira, nenhum tipo de interpolação de propriedades na face é requerida.

onde todas as variáveis discretas estão sendo avaliadas no instante final do passo de tempo.

Na equação (4.11), os dois termos internos aos colchetes devem ser considerados de formas distintas. O primeiro, por estar associado às variáveis discretas do problema a ser resolvido, fará parte da matriz de coeficientes, já que \mathbf{P}^e é um vetor de incógnitas no elemento. Já o segundo termo pode ser computado diretamente, tendo em vista que a função potencial gravitacional pode ser obtida diretamente pela aplicação da equação (4.2). Logo, este termo fará parte do termo independente da equação.

4.1.3 Termo fonte

O termo fonte, por ser uma função normalmente conhecida no problema, pode ser avaliado de forma direta através da equação (3.8), que é a aproximação de uma integral de volume. Adicionando a isso a integração temporal, obtém-se

$$T_p^{\text{src}} = f_p \Delta V_p \Delta t, \quad (4.12)$$

que também fará parte do termo independente do sistema de equações. É importante comentar que f_p é o termo fonte avaliado no nó p .

4.1.4 Termo de deformação volumétrica

O termo de deformação volumétrica é aproximado de forma análoga ao termo de acumulação. Assim, tem-se que

$$T_p^{\text{str}} = \alpha \left(\varepsilon_{v,p} - \varepsilon_{v,p}^o \right) \Delta V_p. \quad (4.13)$$

Nota-se que, apesar deste termo ter a deformação volumétrica avaliada no instante final do intervalo de tempo, todo este termo será adicionado ao termo independente do sistema. Isso porque a deformação volumétrica é obtida pela solução do problema geomecânico, e neste momento já é conhecida. A obtenção da deformação volumétrica no volume de controle associado ao nó p será mostrado na discretização da equação de acoplamento, no final deste capítulo.

4.1.5 Montagem do sistema linear

Substituindo a aproximação discreta de todos os termos na equação de conservação da massa, para o volume associado ao nó p , obtém-se

$$\begin{aligned} & (\phi_p c_f + (\alpha - \phi_p) c_s) \Delta V_p P_p - \Delta t \lambda \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\beta_f^e)^T \mathbf{P}^e = \\ & f_p \Delta V_p \Delta t - \alpha (\varepsilon_{v,p} - \varepsilon_{v,p}^o) \Delta V_p - \Delta t \lambda \rho_f \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\beta_f^e)^T \mathbf{r}^e \quad (4.14) \\ & + (\phi_p c_f + (\alpha - \phi_p) c_s) \Delta V_p P_p^o. \end{aligned}$$

Essa é a versão final da equação de conservação para um volume de controle da malha, de forma que as incógnitas estão associadas a todos os nós vizinhos que fazem parte do *estêncil* do nó p , conjunto \mathcal{N}_p . Assim, a equação pode ser escrita na forma usual no método de volumes finitos (Maliska, 2004; Hurtado, 2011)

$$A_p P_p + \sum_{\substack{q \in \mathcal{N}_p \\ q \neq p}} A_q P_q = b_p, \quad (4.15)$$

onde A_p é o coeficiente central da equação, associado ao volume de controle do nó p , A_q é o coeficiente do nó vizinho q e b_p é o termo independente, que na equação (4.14) são todos os 4 termos do lado direito da igualdade.

Juntando as equações de conservação de todos os volumes de controle, obtém-se um sistema linear, dado por

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{b}, \quad (4.16)$$

onde \mathbf{A} é a matriz de coeficientes, \mathbf{P} o vetor de incógnitas de pressão e \mathbf{b} é o vetor independente. O vetor de incógnitas \mathbf{P} contém os valores discretos de pressão no instante final do intervalo de tempo. Esse sistema de equações discretas é típico de um método de volumes finitos, onde as variáveis discretas do problema estão associadas aos volumes de controle da malha computacional.

Contudo, a montagem do sistema pelo método de volumes finitos baseado em elementos, como o próprio nome indica, é baseada em uma varredura nos elementos da malha. Assim, as contribuições dos fluxos

nas faces internas ao elemento são computadas para cada um dos volumes associados aos nós pertencentes a este elemento. Em adição a isto, o cômputo dos coeficientes relacionados ao termo de acumulação, fonte e de deformação são adicionados na diagonal da matriz \mathbf{A} e no vetor de termo independente \mathbf{b} .

Na listagem 4.1 está o algoritmo do cômputo das contribuições do termo de fluxo nas faces internas de um elemento, retirado de Hurtado (2011). Note-se que o coeficiente c é somado em uma posição da matriz e subtraído em outra. Isto acontece quando é considerado apenas um vetor área normal a face, com orientação fixa com relação a base, como pode ser observado na figura 4.1. Desta forma, faz-se necessário adicionar o coeficiente na equação do volume do nó localizado atrás da face e subtrair da equação associada ao nó à frente. Isso implica que o fluxo de massa em uma face está saindo de um volume de controle e entrando em outro. Esses nós estão denotados por nB para aquele que está localizado atrás e nF para aquele que está à frente.

Listagem 4.1 – Algoritmo de montagem das contribuições de fluxo nos elementos.

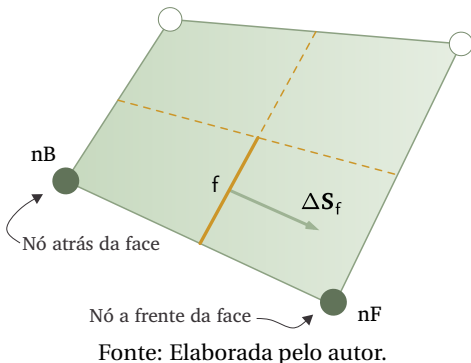
```

1  para cada elemento e da malha {
2      para cada face  $f \in \mathcal{F}^e$  {
3          para cada nó  $p \in \mathcal{N}^e$  {
4               $nB$  = índice global nó atrás da face  $f$ 
5               $nF$  = índice global nó a frente da face  $f$ 
6              computar  $c = \lambda \Delta t \beta_f^e(p)$ 
7               $A(nB, p) = A(nB, p) + c$ 
8               $A(nF, p) = A(nF, p) - c$ 
9          }
10     }
11 }
```

Já o algoritmo da listagem 4.2 mostra o cômputo do termo de acumulação e do termo independente, ambos mostrados na equação (4.14). Neste caso, observa-se que a varredura é realizada nos nós da malha, tendo em vista que os valores desses termos são associados apenas aos próprios

volumes de controle.

Figura 4.1 – Notação para os nós segundo a orientação do vetor área da face.



Listagem 4.2 – Algoritmo de cômputo das contribuições de acumulação e termo independente.

```

1  para cada nó p da malha {
2      computar  $a = (\phi_p c_f + (\alpha - \phi_p) c_s) \Delta V_p$ 
3      computar  $b_a = a P_p^o$ 
4      computar  $b_f = f_p \Delta V_p \Delta t$ 
5      computar  $b_\varepsilon = -\alpha (\varepsilon_{v,p} - \varepsilon_{v,p}^o) \Delta V_p$ 
6      computar  $b_g = -\Delta t \lambda \rho_f \sum_{e \in \mathcal{L}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_p^e} (\beta_f^e)^T \Upsilon^e$ 
7       $A(p, p) = A(p, p) + a$ 
8       $\mathbf{b}(p) = \mathbf{b}(p) + b_a + b_f + b_\varepsilon + b_g$ 
9  }
```

4.1.6 Condições de contorno

A adição das condições de contorno é realizada de forma simples e direta. Na fronteira onde a condição é de fluxo prescrito, condição de Neumann, basta que seja adicionado o valor do fluxo diretamente no termo

independente da equação de conservação da massa discreta associada ao nó que faz parte do contorno onde o fluxo está prescrito. Já na fronteira que possui condição de Dirichlet, por outro lado, faz-se necessário eliminar todos os coeficientes da sua equação com exceção da diagonal onde é adicionado o valor unitário, além disso o valor conhecido da variável é adicionado ao termo independente. A eliminação dos coeficientes equivale a descartar a equação de balanço do nó que está nessa fronteira, e estabelecer que o valor da variável é igual ao valor que é conhecido. Esse procedimento, tem a desvantagem de manter o sistema linear com o número incógnitas maior que o necessário. Entretanto, mantém a mesma estrutura da matriz, respeitando os índices globais dos nós.

4.2 Modelo geomecânico

A discretização do modelo geomecânico é realizada da mesma forma abordada no modelo de escoamento, no qual é realizada uma substituição da equação constitutiva na equação de balanço, neste caso, de forças. Entretanto, agora esta tarefa será realizada após a integração da equação diferencial no volume de controle e a aplicação do teorema da divergência de Gauss. Assim, nesta etapa, diferentemente do descrito no modelo de escoamento, faz-se uma separação das equações de equilíbrio de forças na direção x e y , reestruturando-as de uma maneira conveniente para aplicar a aproximação do gradiente descrita na seção 3.3.

Assim, realizando a integração no volume de controle discreto da equação (2.5), tem-se que

$$\int_{\mathcal{V}_p} \check{\sigma}' \cdot d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{V}_p} \alpha \nabla P dV + \int_{\mathcal{V}_p} \rho g dV = 0, \quad (4.17)$$

que é a forma integral da equação de equilíbrio de forças. Convenientemente, neste momento faz-se a separação das equações de equilíbrio de forças nas direções x e y . Isto se deve ao fato de que a aproximação do gradiente de uma variável escalar é mais simples de ser tratada computacionalmente. Assim, a aproximação da equação (3.7) pode ser aplicada de forma direta. Na sequencia desta seção serão abordadas as discretizações de cada um dos termos da equação (4.17).

4.2.1 Termo de tensões efetivas

O primeiro termo da equação (4.17), que envolve as tensões efetivas, conforme comentado anteriormente será separado em duas equações, logo

$$\begin{aligned} T_{p,x}^{\text{efv}} &= \int_{\mathcal{F}_p} \sigma'_{xx} dS_x + \int_{\mathcal{F}_p} \sigma'_{xy} dS_y, \\ T_{p,y}^{\text{efv}} &= \int_{\mathcal{F}_p} \sigma'_{xy} dS_x + \int_{\mathcal{F}_p} \sigma'_{yy} dS_y, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde dS_x e dS_y são as componentes cartesianas do vetor área $d\mathbf{S}$. Combinando as equações (2.2), (2.9), (2.12) e (2.13), chega-se em

$$\begin{aligned} T_{p,x}^{\text{efv}} &= \int_{\mathcal{F}_p} \lambda_l \left(\frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS_x + \int_{\mathcal{F}_p} G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS_y, \\ T_{p,y}^{\text{efv}} &= \int_{\mathcal{F}_p} G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS_x + \int_{\mathcal{F}_p} \lambda_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS_y. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Considerando que os vetores gradiente de u e gradiente de v são dados por

$$\begin{aligned} \nabla u &= \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}, \\ \nabla v &= \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

então, pode-se reescrever as equações (4.19) na forma vetorial

$$\begin{aligned} T_{p,x}^{\text{efv}} &= \int_{\mathcal{F}_p} \check{\mathbf{K}}_{uu} \nabla u \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{F}_p} \check{\mathbf{K}}_{uv} \nabla v \cdot (\check{\mathbf{P}} d\mathbf{S}), \\ T_{p,y}^{\text{efv}} &= \int_{\mathcal{F}_p} \check{\mathbf{K}}_{vu} \nabla u \cdot (\check{\mathbf{P}} d\mathbf{S}) + \int_{\mathcal{F}_p} \check{\mathbf{K}}_{vv} \nabla v \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $\check{\mathbf{P}}$ é um tensor de permutação simétrico, definido como

$$\check{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

enquanto que $\check{\mathbf{K}}_{uu}$, $\check{\mathbf{K}}_{vv}$, $\check{\mathbf{K}}_{uv}$ e $\check{\mathbf{K}}_{vu}$ são tensores diagonais dependentes das características mecânicas da rocha. Sabendo que a segunda constante de Lamé, λ_l , pode ser escrita em função do módulo de elasticidade transversal, G , e do coeficiente de *Poisson*, ν , através da expressão (Wang, 2000)

$$\lambda_l = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad (4.23)$$

os tensores previamente mencionados podem ser definidos pelas expressões

$$\check{\mathbf{K}}_{uu} = \begin{pmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\check{\mathbf{K}}_{vv} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\check{\mathbf{K}}_{uv} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \frac{2G\nu}{1-2\nu} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\check{\mathbf{K}}_{vu} = \begin{pmatrix} \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Utilizando a aproximação numérica nas integrais das equações (4.21), definida na equação (3.14), e a aproximação do gradiente, definida na equação (3.7), pode-se manipular as equações (4.21) de tal forma que,

$$\begin{aligned} T_{p,x}^{\text{efv}} &= \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_p^e} (\mathbf{\Gamma}_{x,f}^e)^T \mathbf{u}^e + \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_p^e} (\mathbf{\Lambda}_{x,f}^e)^T \mathbf{v}^e, \\ T_{p,y}^{\text{efv}} &= \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_p^e} (\mathbf{\Lambda}_{y,f}^e)^T \mathbf{u}^e + \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{J}_p^e} (\mathbf{\Gamma}_{y,f}^e)^T \mathbf{v}^e, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\mathbf{\Gamma}_{x,f}^e$, $\mathbf{\Gamma}_{y,f}^e$, $\mathbf{\Lambda}_{x,f}^e$ e $\mathbf{\Lambda}_{y,f}^e$ são operadores vetoriais de dimensão $N_n(e)$, definidos pelas expressões

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma}_{x,f}^e)^T &= \Delta \mathbf{S}_f^T \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{J}_f^{-T} \mathbf{D}_f^{e,T}, \\ (\mathbf{\Gamma}_{y,f}^e)^T &= \Delta \mathbf{S}_f^T \mathbf{K}_{vv}^e \mathbf{J}_f^{-T} \mathbf{D}_f^{e,T}, \\ (\mathbf{\Lambda}_{x,f}^e)^T &= \Delta \mathbf{S}_f^T \mathbf{PK}_{uv}^e \mathbf{J}_f^{-T} \mathbf{D}_f^{e,T}, \\ (\mathbf{\Lambda}_{y,f}^e)^T &= \Delta \mathbf{S}_f^T \mathbf{PK}_{vu}^e \mathbf{J}_f^{-T} \mathbf{D}_f^{e,T}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Além disso, \mathbf{u}^e e \mathbf{v}^e são vetores de valores nodais de deslocamentos u e

ν , no elemento e , cuja dimensão é $N_n(e)$. Observe-se que as equações (4.28), forma discretizada do termo de tensões efetivas, estão em uma forma compacta aos moldes da discretização utilizada no modelo de escoamento.

4.2.2 Termo de pressão de poro

A discretização do termo de pressão de poro, segundo termo da equação (4.17), é realizada utilizando a equação de aproximação da integral de volume, definida na equação (3.8). Assim tem-se que

$$T_p^{\text{psr}} = \alpha(\nabla P)_p \Delta V_p \quad (4.30)$$

onde $(\nabla P)_p$ é o vetor gradiente de pressão no volume de controle associado ao nó p . Como a variável pressão já é conhecida do problema de escoamento, devido ao tipo de tratamento do acoplamento considerado, pode-se aproximar este gradiente através da equação de Green-Gauss (Blazek, 2001)

$$(\nabla P)_p \approx \frac{1}{\Delta V_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p} P_f \Delta \mathbf{S}_f. \quad (4.31)$$

No entanto, os valores discretos de pressão disponíveis estão associados aos nós da malha, desta forma, deve-se avaliar as pressões P_f nas faces, através das funções de forma. Assim, obtém-se

$$(\nabla P)_p = \frac{1}{\Delta V_p} \sum_{e \in \mathcal{T}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} \sum_{q \in \mathcal{N}^e} (N_q^e)_f P_q \Delta \mathbf{S}_f. \quad (4.32)$$

onde $(N_q^e)_f$ são as funções de forma no elemento e , associada ao nó q e avaliadas na face f da superfície de controle.

4.2.3 Termo gravitacional

Utilizando a mesma aproximação da integral de volume dada pela equação (3.8), obtém-se

$$T_p^{\text{grav}} = \mathbf{g} \rho_p \Delta V_p \quad (4.33)$$

onde a densidade média, definida na equação (2.6), em sua forma discreta fica,

$$\rho_p = \phi_p \rho_f + (1 - \phi_p) \rho_s, \quad (4.34)$$

onde ϕ_p é a porosidade associada a célula p . A porosidade, no modelo considerado, é a variável de acoplamento, a qual é determinada pela equação (2.25), que será discretizada na sequência deste capítulo.

4.2.4 Montagem do sistema linear

A montagem do sistema linear é realizada da mesma forma apresentada na seção 4.1.5, entretanto, no modelo geomecânico ter-se-á duas equações por volume de controle, equilíbrio de forças na direção x e equilíbrio de forças na direção y . Assim, substituindo os termos discretos na equação (4.17), chega-se em

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\mathbf{\Gamma}_{x,f}^e)^T \mathbf{u}^e + \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\mathbf{\Lambda}_{x,f}^e)^T \mathbf{v}^e - \alpha (\nabla P)_{p,x} \Delta V_p + g_x \rho_p \Delta V_p = 0 \quad (4.35)$$

e

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\mathbf{\Lambda}_{y,f}^e)^T \mathbf{u}^e + \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} (\mathbf{\Gamma}_{y,f}^e)^T \mathbf{v}^e - \alpha (\nabla P)_{p,y} \Delta V_p + g_y \rho_p \Delta V_p = 0 \quad (4.36)$$

onde $(\nabla P)_{p,x}$ e $(\nabla P)_{p,y}$ são as componentes cartesianas do vetor gradiente de pressão discreto, obtido através da equação (4.30).

Observe que ambas as equações podem ser reescritas no formato usual do método dos volumes finitos, como mostrado na equação (4.15). No entanto, haverá dois conjuntos de variáveis envolvidas, deslocamentos u e v . Isto faz com que haja a necessidade de escolha do agrupamento das variáveis para a montagem do sistema de equações.

Assim, optou-se por arranjar as equações na forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_u^x & \mathbf{A}_v^x \\ \mathbf{A}_u^y & \mathbf{A}_v^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

onde \mathbf{u}_h e \mathbf{v}_h são os vetores de deslocamentos para o domínio discreto completo, \mathbf{A}_u^x , \mathbf{A}_v^x , \mathbf{A}_u^y e \mathbf{A}_v^y são matrizes de coeficientes das equações de

equilíbrio de forças nas direções x e y associadas às variáveis u e v , respectivamente. É importante lembrar que no problema estrutural geomecânico há duas variáveis a serem resolvidas. Assim, o vetor de incógnitas é duas vezes o número de nós da malha computacional utilizada.

Na listagem 4.3 é listado o algoritmo de montagem das contribuições do termo de tensões efetivas no sistema linear do problema geomecânico. Note-se que são quatro contribuições associadas a esse problema, duas para cada direção coordenada, onde cada uma dessas contribuições são análogos àquela utilizada no problema de escoamento, listagem 4.1.

Listagem 4.3 – Algoritmo de montagem das contribuições do termo de tensões efetivas.

```

1  para cada elemento e da malha {
2      para cada face  $f \in \mathcal{F}^e$  {
3          para cada nó  $p \in \mathcal{N}^e$  {
4              nB = índice global nó atrás da face f
5              nF = índice global nó a frente da face f
6              // Equação de equilíbrio de forças na direção x
7              computar  $c_1 = \Gamma_{x,f}^e(p)$ 
8               $\mathbf{A}_u^x(nB, p) = \mathbf{A}_u^x(nB, p) + c_1$ 
9               $\mathbf{A}_u^x(nF, p) = \mathbf{A}_u^x(nF, p) - c_1$ 
10             computar  $c_2 = \Lambda_{x,f}^e(p)$ 
11              $\mathbf{A}_v^x(nB, p) = \mathbf{A}_v^x(nB, p) + c_2$ 
12              $\mathbf{A}_v^x(nF, p) = \mathbf{A}_v^x(nF, p) - c_2$ 
13             // Equação de equilíbrio de forças na direção y
14             computar  $c_3 = \Gamma_{y,f}^e(p)$ 
15              $\mathbf{A}_v^y(nB, p) = \mathbf{A}_v^y(nB, p) + c_3$ 
16              $\mathbf{A}_v^y(nF, p) = \mathbf{A}_v^y(nF, p) - c_3$ 
17             computar  $c_4 = \Lambda_{y,f}^e(p)$ 
18              $\mathbf{A}_u^y(nB, p) = \mathbf{A}_u^y(nB, p) + c_4$ 
19              $\mathbf{A}_u^y(nF, p) = \mathbf{A}_u^y(nF, p) - c_4$ 
20         }
21     }
22 }
```

Por outro lado, a adição dos termos de pressão de poro e gravitacional é realizada diretamente no termo independente de cada nó do domínio, como pode ser observado na listagem 4.4. É importante notar que esses dois termos citados são formados por componentes nas direções coordenadas e devem ser adicionadas em seus vetores correspondentes.

Listagem 4.4 – Algoritmo de cômputo das contribuições de acumulação e termo independente.

```

1  para cada nó  $p$  da malha {
2      computar  $b_{p,x} = -\alpha(\nabla P)_{p,x} \Delta V_p$ 
3      computar  $b_{g,x} = g_x \rho_p \Delta V_p$ 
4       $\mathbf{b}_x(p) = \mathbf{b}_x(p) + b_{p,x} + b_{g,x}$ 
5      computar  $b_{p,y} = -\alpha(\nabla P)_{p,y} \Delta V_p$ 
6      computar  $b_{g,y} = g_y \rho_p \Delta V_p$ 
7       $\mathbf{b}_y(p) = \mathbf{b}_y(p) + b_{p,y} + b_{g,y}$ 
8  }
```

4.2.5 Condições de contorno

As condições de contorno de valor prescrito, ou neste caso deslocamento prescrito, são adicionadas da mesma forma realizada no modelo de escoamento, com o cuidado de utilizar a equação de balanço na direção coordenada correta. Ou seja, nas condições de contorno do tipo Dirichlet, zera-se a linha da matriz correspondente ao nó cujo deslocamento é conhecido. Após, coloca-se o valor unitário na diagonal e o valor prescrito no termo independente, não esquecendo a distinção de qual deslocamento está sendo prescrito, deslocamento na direção x ou na direção y , variáveis u e v respectivamente.

Para o problema geomecânico, a condição de contorno de Neumann, ou tensão prescrita, é adicionada de forma diferente que o habitual para problema de análise estrutural. Isto porque a tensão total que deve ser imposta no contorno, no problema geomecânico está composta por duas parcelas, tensão efetiva e pressão de poro. Entretanto, a tensão efetiva é aquela que a rocha porosa efetivamente suporta, e aquela que se deseja

resolver pela equação do equilíbrio de forças, dada por

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}') - \alpha \nabla P + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (4.38)$$

pois a pressão P é uma variável cujo valor já é conhecido devido ao tipo de acoplamento utilizado no presente trabalho. Ora, se a equação de equilíbrio de forças está em termos de tensões efetivas, deve-se transformar a tensão total prescrita em uma tensão efetiva. Para isso, utiliza-se a definição de tensões efetivas, já mostrada na equação (2.1). Assim, para uma tensão total prescrita $\boldsymbol{\sigma}_b$ tem-se que,

$$\boldsymbol{\sigma}'_b = \boldsymbol{\sigma}_b + \alpha P_b \mathbf{I}, \quad (4.39)$$

onde P_b é a pressão de poro no contorno onde a tensão está sendo prescrita. É importante lembrar que no momento da montagem do sistema linear do problema geomecânico discreto a pressão já é conhecida, uma vez que o sistema linear para a pressão já foi resolvido. Finalmente, com o tensor de tensões efetivas determinado no contorno do domínio, basta adicionar ao termo independente o produto da tensão pelo vetor área da face, na forma

$$\mathbf{b}_x(\mathbf{p}) = \mathbf{b}_x(\mathbf{p}) + \sigma'_{xx,b} (\Delta S_{fb})_x + \sigma'_{xy,b} (\Delta S_{fb})_y \quad (4.40)$$

e

$$\mathbf{b}_y(\mathbf{p}) = \mathbf{b}_y(\mathbf{p}) + \sigma'_{xy,b} (\Delta S_{fb})_x + \sigma'_{yy,b} (\Delta S_{fb})_y, \quad (4.41)$$

onde $(\Delta S_{fb})_x$ e $(\Delta S_{fb})_y$ são as componentes cartesianas do vetor área da face de contorno fb, a qual faz parte da superfície de controle do volume de controle associado ao nó p.

4.3 Discretização da equação da porosidade

Conforme já comentado na seção 2.5.2, o acoplamento entre as variáveis utilizado no presente trabalho é o iterativo ou segregado em duas direções. Nesse tipo de acoplamento, os problemas físicos, escoamento e geomecânica, são solucionados separadamente trocando informações entre si. As informações trocadas são as variáveis envolvidas no problema,

pressão e deslocamentos. Além disso, há também a dependência da porosidade da rocha com relação à pressão e aos deslocamentos, conforme pode ser observado na equação (2.25).

Desta forma, necessita-se também obter uma forma discretizada dessa equação, para que a porosidade possa ser atualizada durante o procedimento iterativo. Devido ao caráter temporal da equação (2.25), deve-se realizar uma integração no tempo, além da integração de volume inerente ao método de volumes finitos, obtendo-se

$$\phi_p = \phi_p^o + (\alpha - \phi_p^o) [\varepsilon_{v,p} - \varepsilon_{v,p}^o] + (\alpha - \phi_p^o) c_s [P_p - P_p^o]. \quad (4.42)$$

Como pode-se observar nessa equação, dois valores de porosidade são avaliados: um no nível de tempo anterior e outro no nível de tempo corrente. Entretanto, para que seja possível atualizar a porosidade durante o procedimento iterativo de acoplamento, em cada nível temporal, faz-se um atraso nas variáveis pressão e deformação volumétrica com relação à porosidade no nível tempo corrente. Assim, avalia-se a porosidade para o próximo nível iterativo utilizando os valores de pressão e deformação já determinados no nível iterativo anterior, na forma

$$\phi_p^{\kappa+1} = \phi_p^o + (\alpha - \phi_p^o) [\varepsilon_{v,p}^{\kappa} - \varepsilon_{v,p}^o] + (\alpha - \phi_p^o) c_s [P_p^{\kappa} - P_p^o], \quad (4.43)$$

onde κ é a iteração atual e o indica o instante de tempo anterior. É fácil perceber que, ao final do procedimento iterativo todas as variáveis estarão determinadas e associadas ao nível de tempo corrente, bem como a porosidade.

4.4 Cálculo da deformação volumétrica

Nas equações (4.43) e (4.14), o único termo que falta ser explicitado é o de deformação volumétrica. Em ambas as equações esse termo pode ser calculado diretamente, uma vez que, através da solução do problema geomecânico, os deslocamentos discretos já foram obtidos.

Sabe-se da definição da deformação volumétrica que,

$$\varepsilon_{v,p} = \varepsilon_{x,x,p} + \varepsilon_{y,y,p} = (\partial_x u + \partial_y v)_p, \quad (4.44)$$

ou ainda, utilizando-se da definição dos gradientes de u e v , equações (4.20), pode-se escrever como

$$\varepsilon_{v,p} = (\nabla u)_{p,x} + (\nabla v)_{p,y}, \quad (4.45)$$

onde $(\nabla u)_{p,x}$ e $(\nabla v)_{p,y}$ são as componentes x e y dos gradientes dos deslocamentos avaliados no nó p . Por outro lado, o gradiente de uma variável escalar discreta pode ser obtido através da formula de Green-Gaus, conforme já utilizado para a avaliação do gradiente de pressão, através da equação (4.32). Assim, para obter os gradientes da equação (4.45), basta substituir a variável pressão da equação (4.32) pelos deslocamentos u e v . Logo, têm-se que

$$(\nabla u)_p \approx \frac{1}{\Delta V_p} \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} \sum_{q \in \mathcal{N}^e} (N_q^e)_f u_q \Delta \mathbf{S}_f \quad (4.46)$$

e

$$(\nabla v)_p \approx \frac{1}{\Delta V_p} \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \sum_{f \in \mathcal{F}_p^e} \sum_{q \in \mathcal{N}^e} (N_q^e)_f v_q \Delta \mathbf{S}_f. \quad (4.47)$$

As equações anteriores fornecem valores dos vetores gradiente de u e v , associados ao nó p . No entanto, a equação (4.45) requer apenas uma componente de cada vetor para obter a deformação volumétrica associada ao volume de controle p .

4.5 Recuperação das tensões

A recuperação das tensões efetivas associadas a um volume de controle não é realizada de forma direta, isso porque os valores das propriedades mecânicas estão associados aos elementos. Assim, esse computo deve ser realizado em termos de subelementos, conforme a aproximação mostrada na equação (3.10). Para isso, aproxima-se o valor do tensor de tensões efetivas associado a um volume de controle p como a média volumétrica dos valores do tensor tensão associados aos subelementos, ou seja,

$$\check{\sigma}'_p = \frac{1}{\Delta V_p} \sum_{e \in \mathcal{E}_p} \check{\sigma}'_{s_p^e} \Delta V_{s,p}^e, \quad (4.48)$$

onde $\sigma'_{s_p^e}$ é o tensor de tensões efetivas associado ao subelemento s_p^e .

Logo, substituindo as equações (2.2), (2.9), (2.12), (2.13) e (4.23) na equação (4.48), obtém-se as equações das tensões efetivas associadas ao subelemento s_p^e como

$$\sigma'_{xx, s_p^e} = \frac{2G}{1-2\nu} \Big|_e \left[(1-\nu_e)\varepsilon_{xx, s_p^e} + \nu_e\varepsilon_{yy, s_p^e} \right], \quad (4.49)$$

$$\sigma'_{yy, s_p^e} = \frac{2G}{1-2\nu} \Big|_e \left[\nu_e\varepsilon_{xx, s_p^e} + (1-\nu_e)\varepsilon_{yy, s_p^e} \right] \quad (4.50)$$

$$\sigma'_{xy, s_p^e} = 2G_e\varepsilon_{xy, s_p^e}. \quad (4.51)$$

Nas equações anteriores, as deformações são avaliadas nos baricentros dos subelementos, através de uma interpolação simples dos valores nodais do elemento por funções de forma.

Vale salientar que, os valores de tensões obtidos aqui servirão apenas para um pós processamento dos resultados. Isto é, as expressões mostradas nessa seção não são usadas para aproximação das tensões. As aproximações numéricas das tensões já foram detalhadas no procedimento de discretização apresentado ao longo desse capítulo.

4.6 Algoritmo de solução

No tipo de acoplamento empregado no presente trabalho, cada modelo é resolvido de forma independente em um processo iterativo em que há troca de dados entre ambos os modelos. O processo continua até que ambas as soluções satisfaçam de maneira conjunta, as equações de conservação. O algoritmo de solução utilizado é baseado no fluxograma da figura 2.3. Os principais passos são

1. Obter a condição de equilíbrio inicial entre o estado de tensões e a pressão do fluido. Depende de fatores físicos do problema a ser resolvido, como heterogeneidade das propriedades e condições de contorno.
2. Avançar no tempo.

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t$$

3. Calcular os coeficientes do sistema linear do modelo de escoamento.
4. Resolver o sistema linear e obter a pressão P .

$$\mathbf{AP} = \mathbf{b},$$

5. Calcular o gradiente de pressão, $(\nabla P)_p$, associado aos volumes de controle, utilizando equação (4.32).
6. Calcular os coeficientes do sistema linear do modelo geomecânico.
7. Resolver o sistema linear e obter os deslocamentos u e v .

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_u^x & \mathbf{A}_v^x \\ \mathbf{A}_u^y & \mathbf{A}_v^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{pmatrix},$$

8. Calcular a deformação volumétrica, $\varepsilon_{v,p}$, associada aos volumes de controle, utilizando a equação (4.45).
9. Atualizar a porosidade ϕ com a pressão P e os deslocamentos u e v , utilizando a equação (4.43).
10. Verificar a convergência com os valores de pressão de duas iterações sucessivas, $\kappa - 1$ e κ .

$$\frac{\|\mathbf{P}^\kappa - \mathbf{P}^{\kappa-1}\|_\infty}{|P_{\max}^\kappa - P_{\min}^\kappa|} \leq \tau \quad (4.52)$$

a) Se a desigualdade (4.52) **não** for satisfeita:

- Avançar para o próximo nível iterativo. $\kappa = \kappa + 1$.
- Voltar ao passo 3

b) Se a desigualdade (4.52) for satisfeita:

- Calcular as tensões efetivas (equação (4.48))
- Com os novos valores de ϕ e ε_v voltar ao item 2

O critério de convergência da equação (4.52) consiste em verificar a ordem de grandeza da diferença entre os campos discretos da pressão de duas iterações sucessivas. Nessa equação, $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma infinito de um vetor, equivalente ao valor da maior componente desse vetor.

Note-se que o fator de normalização $|P_{\max}^k - P_{\min}^k|$ representa a faixa de variação da pressão e τ é a tolerância do critério de convergência, que neste estudo é empregado o valor de 10^{-7} .

Exemplos de aplicação

No presente capítulo são apresentados os resultados obtidos para alguns exemplos de aplicação do modelo de escoamento em meio poroso deformável, utilizando-se a formulação numérica apresentada neste trabalho. Inicialmente, dois problemas unidimensionais são resolvidos, sendo o primeiro deles o problema da coluna de Terzaghi (1923). Já o segundo problema unidimensional é uma modificação do primeiro, onde a coluna é dividida em duas regiões com materiais porosos de diferentes propriedades mecânicas (Verruijt, 2013). Em seguida, são apresentados os resultados referentes a um problema bidimensional conhecido como problema de Mandel (1953). Esse problema é comumente usado como *benchmark* para algoritmos que resolvem o acoplamento escoamento/geomecânica em meios porosos. Todos esses problemas possuem solução analítica¹, desta forma pode-se estimar o erro de discretização comparando as soluções numérica e analítica de forma a validar o modelo numérico apresentado. Após a etapa de validação, são apresentados os resultados de um problema bidimensional que possui condições de contorno, poços de exploração e regiões do meio poroso como uma aplicação

¹As soluções analíticas dos problemas de Terzaghi e de Mandel são reproduzidas no apêndice C.

prática de geomecânica na simulação de reservatórios de petróleo. Com a solução numérica desse problema pretende-se demonstrar a aplicabilidade da metodologia numérica apresentada no presente trabalho.

Os resultados apresentados nesse capítulo foram obtidos através de um código computacional implementado em linguagem de programação C^{++} . Nessa implementação utilizou-se da biblioteca computacional *EFVLib* (Maliska *et al.*, 2011), desenvolvida no laboratório SINMEC através de um projeto de pesquisa no âmbito da rede temática de gerenciamento e simulação de reservatórios (SIGER) (Maliska *et al.*, 2008; 2009a;b). Essa biblioteca, cuja implementação utiliza-se do paradigma da programação orientada a objetos², fornece o suporte geométrico para aplicação do método de volumes finitos baseado em elementos, além de disponibilizar o cálculo de operadores numéricos e outros parâmetros necessários na discretização. A *EFVLib* possui ferramentas importantes como módulos para montagem e solução de sistemas lineares, controle de simulação, exportação de resultados e gerenciamento de malhas não estruturadas.

Para a solução de sistemas lineares, estão disponíveis na *EFVLib*, através de encapsulamento³, os *solvers* e matrizes da biblioteca *PETSc* (Balay *et al.*, 2015), biblioteca essa que possui uma grande variedade de métodos de solução de sistemas lineares. Assim, dentre diversos métodos iterativos disponíveis na *PETSc*, optou-se por utilizar o método *GMRES*⁴ (Golub & Loan, 1996; Saad, 2000), amplamente utilizado na solução de sistemas lineares que apresentam matrizes esparsas. Além disso, empregou-se o pré-condicionamento através do método *ILU*⁵ posicionado pela direita⁶. A tolerância utilizada na solução dos sistemas lineares da pressão (conservação da massa) e dos deslocamentos (equilíbrio de forças) foi 10^{-12} para a solução do problema de Terzaghi. No entanto, o problema de Mandel exigiu uma tolerância um pouco mais apertada e igual 10^{-13} , devido a problemas de convergência ao longo da solução transiente.

²Essa filosofia de programação permite uma simplificação no processo de desenvolvimento de códigos computacionais complexos, como é a implementação do método dos Volumes Finitos baseado em Elementos.

³Técnica empregada na programação orientada a objetos para a adaptação e utilização de estruturas de dados e códigos computacionais de terceiros.

⁴*Generalized Minimal Residual*

⁵*Incomplete LU Factorization*

⁶Um pré-condicionador posicionado à direita não altera o valor da norma do resíduo em um *solver* de sistemas lineares no formato $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (Saad, 2000; Balay *et al.*, 2015).

Por fim, com o intuito de não acrescentar, neste capítulo, uma quantidade demasiada de informações a respeito dos resultados, optou-se em adicionar no apêndice D informações complementares referentes ao número de iterações realizadas por cada problema.

5.1 Estimação de erros

Conforme comentado anteriormente, os problemas poroelásticos de Terzaghi e Mandel possuem soluções analíticas para as principais variáveis dos problemas. Com ajuda dessas soluções é possível estimar o erro de discretização do método numérico empregado. Usualmente procura-se caracterizar o erro de uma dada aproximação numérica em uma certa malha por um único valor, tipicamente alguma norma da diferença entre as soluções analítica e numérica. Assim, seguiu-se a forma de caracterização utilizada por Herbin & Hubert (2008), onde o erro de uma variável Θ qualquer associado a uma malha é dado por

$$\epsilon = \left[\frac{\sum_{p=1}^{N_n} (\Theta_p^n - \Theta_p^a)^2 \Delta V_p}{\sum_{p=1}^{N_n} (\Theta_p^a)^2 \Delta V_p} \right]^{1/2}, \quad (5.1)$$

onde N_n é o número de nós da malha, Θ_p^n é a solução numérica e Θ_p^a é a solução analítica, ambas no volume de controle associado ao nó p . Essa estimação do erro representa uma norma 2 da diferença entre as soluções analítica e numérica, normalizada e ponderada pelo volume.

Uma outra característica importante na análise de convergência é um valor que caracterize o grau de refino da malha. Para tanto foi considerado o comprimento característico dado por

$$h = \frac{\sum_{p=1}^{N_n} \sqrt{\Delta V_p}}{N_n}. \quad (5.2)$$

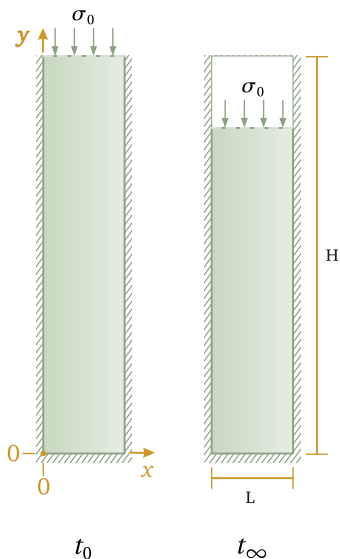
É importante salientar que a expressão anterior inclui a raiz quadrada do volume, porque em uma malha bidimensional o volume do volume de controle nada mais é que uma área. Quanto menor o comprimento característico associado a uma malha, maior a quantidade de volumes de

controle existentes nessa malha e, logicamente, maior será o refino desta malha.

5.2 Problema de Terzaghi

O problema de Terzaghi (1923), ou coluna poroelástica de Terzaghi, consiste em uma coluna unidimensional confinada, formada por um determinado meio poroso saturado de fluido e submetida a uma carga conhecida σ_0 em seu topo. No tempo t_0 a carga é instantaneamente aplicada e devido a fronteira superior ser permeável o fluido é expulso do confinamento. Assim, após um tempo suficientemente grande t_∞ , a pressão do fluido se anulará e o material poroso suportará completamente a carga aplicada. Um diagrama esquemático da coluna poroelástica pode ser observado na figura 5.1.

Figura 5.1 – Diagrama esquemático do problema de Terzaghi.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O confinamento do meio poroso é imposto em todas as fronteiras do domínio, entretanto o fluido, como comentado anteriormente, pode fluir pela fronteira superior, a qual funciona como um êmbolo. Nesse confinamento, o material poroso pode se deslocar unidimensionalmente

na direção y , de tal forma que as condições de contorno na direção x são

$$\begin{cases} u = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = L, \quad (5.3)$$

permitindo o escorregamento, sem restrição, nas paredes laterais da coluna, indicado pela tensão de cisalhamento $\sigma_{xy} = 0$ imposta. Já na direção direção y , em que se desenvolve o deslocamento, as condições de contorno são

$$\begin{cases} v = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{em } y = 0 \text{ e } \begin{cases} \sigma_{yy} = -\sigma_0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{em } y = H. \quad (5.4)$$

Além disso, as condições de contorno para o escoamento do fluido são matematicamente expressas por

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} = 0 \\ P = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{em } x = 0, x = L \text{ e } y = 0, \\ \text{em } y = H. \end{array} \quad (5.5)$$

Em outras palavras, todas as fronteiras da coluna são impermeáveis, com exceção da superior, que é considerada aberta. A solução analítica desse problema, exposta no apêndice C, não considera os efeitos gravitacionais, além de não considerar a não linearidade existente pela variação da porosidade. Logo, na solução numérica a porosidade também foi considerada constante e, portanto, a equação (4.42) não foi incluída no algoritmo de solução.

Na tabela 5.1 encontram-se os dados de entrada utilizados na simulação do problema de Terzaghi. Os dados listados são as dimensões da coluna, a carga aplicada, além das propriedades do fluido e da rocha porosa considerados. Dentre as propriedades, as compressibilidades, C_f e C_s , o coeficiente de Biot, α , e o coeficiente de Poisson, ν , não são obtidos de forma direta, sendo determinados através de correlações⁷ que utilizam-se dos módulos de compressão volumétrica, mostrados na tabela 5.2. Os módulos expostos nessa tabela são referentes a rocha, arenito Berea, e ao fluido, sendo todos extraídos de Wang (2000).

⁷As correlações utilizadas são para um meio poroso ideal e podem ser encontradas em detalhes em Wang (2000).

Tabela 5.1 – Dados de entrada para o problema de Terzaghi.

Dado	Símbolo	Valor	Unid.
Altura da coluna	H	6,0	m
Largura da coluna	L	1,0	m
Carga aplicada	σ_0	$1,0 \times 10^6$	Pa
Compressibilidade do fluido	C_f	$3,030303 \times 10^{-10}$	1/Pa
viscosidade do fluido	μ	0,001	Pa.s
Compressibilidade do grão sólido	C_s	$2,777777 \times 10^{-11}$	1/Pa
Coefficiente de Biot	α	0,777778	-
Coefficiente de Poisson	ν	0,20	-
Módulo de elast. transversal	G	$6,0 \times 10^9$	Pa
Porosidade	ϕ	0,19	-
Permeabilidade absoluta	\mathbf{K}^8	$1,9 \times 10^{-15}$	m ²

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante salientar que os dados de rochas disponíveis em Wang (2000) foram extraídos de diversos trabalhos de poroelasticidade, os quais foram agrupados e organizados por esse autor. Assim, os dados da rocha arenito Berea foram, na verdade, apresentados primeiramente por De-tournay & Cheng (1993) e disponibilizados junto com os dados de outras tantas rochas em Wang (2000).

Tabela 5.2 – Módulos de compressão volumétrica da rocha, arenito Berea, e do fluido.

Propriedade	Símbolo	Valor	Unid.
Módulo de compressão volumétrica da matriz porosa	K	$8,0 \times 10^9$	Pa
Módulo de compressão volumétrica dos grãos sólidos	K_s	$3,6 \times 10^{10}$	Pa
Módulo de compressão volumétrica do fluido	K_f	$3,3 \times 10^9$	Pa

Fonte: Wang (2000) .

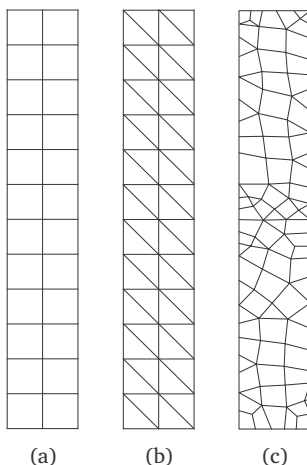
⁸Embora a variável permeabilidade seja tensorial, nos casos simulados utilizou-se um valor escalar por ser um tensor esférico.

Na continuidade dessa seção diferentes análises serão apresentadas, sendo em primeiro lugar uma comparação direta dos campos de pressão e deslocamento vertical entre a solução numérica e a solução analítica. Em um segundo momento será apresentada a análise de convergência das variáveis do problema.

5.2.1 Malhas utilizadas

A metodologia numérica apresentada neste trabalho permite o uso de malhas bidimensionais híbridas, ou seja, com elementos triangulares e quadrangulares juntos em uma mesma discretização espacial. Assim, as análises realizadas para o problema de Terzaghi utilizam três conjuntos de malhas, sendo dois conjuntos de malhas regulares com apenas um tipo de elemento e um terceiro conjunto de malhas não regulares híbridas, como pode ser observado na figura 5.2.

Figura 5.2 – Tipos de malha utilizados: (a) quadrangular, (b) triangular e (c) híbrida.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os conjuntos de malhas regulares são semelhantes, sendo que a malha triangular é obtida pela simples divisão dos quadriláteros da malha quadrangular. Desta forma, os processos de refino dessas malhas são similares, onde o número de divisões nas direções x e y são os mesmos em

ambos conjuntos de malhas. As tabelas 5.3 e 5.4 mostram as características das malhas regulares de quadriláteros e triângulos, respectivamente. É importante salientar que a escolha do número de divisões nas direções principais foi tal que garantisse a mesma razão de aspecto dos elementos nas malhas com diferentes níveis de refino.

Tabela 5.3 – Conjunto de malhas quadrangulares.

Malha	Nº de elementos	Nx	Ny	Nº de nós	h(m)
Q1	24	2	12	39	0,38423798
Q2	150	5	30	186	0,17706349
Q3	726	11	66	804	0,08571529
Q4	1350	15	90	1456	0,06381246
Q5	2646	21	126	2794	0,04613732

Fonte: Elaborada pelo autor.

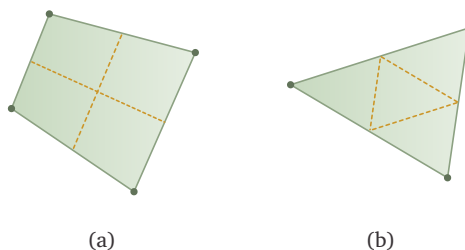
Tabela 5.4 – Conjunto de malhas triangulares.

Malha	Nº de elementos	Nx	Ny	Nº de nós	h(m)
T1	48	2	12	39	0,38386872
T2	300	5	30	186	0,17703252
T3	1452	11	66	804	0,08571203
T4	2700	15	90	1456	0,06381114
T5	5292	21	126	2794	0,04613683

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, um mesmo sistema de refino não é possível de se utilizar no conjunto de malhas híbridas, uma vez que esse conjunto não possui uma lei de formação como aquela apresentada nas malhas regulares. Assim, optou-se em utilizar um procedimento de refino disponível no aplicativo ANSYS® ICEM CFD (ANSYS Inc, 2013), onde cada elemento é subdividido em quatro, mantendo a mesma estrutura original. Esse procedimento é realizado unindo o centroide do elemento com o ponto médio de suas arestas, no refino do elemento quadrangular, e unindo diretamente os pontos médios das arestas, no refino do elemento triangular, como pode ser observado na figura 5.3.

Figura 5.3 – Divisão dos elementos utilizada no refino de malhas híbridas. Elementos (a) quadrangular e (b) triangular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando-se o procedimento encontrado no aplicativo ICEM, obtve-se quatro malhas para esse conjunto, cujas características são indicadas na tabela 5.5. É importante notar que nesse procedimento cada nível de refino obtém-se uma malha com quatro vezes mais elementos que a malha anterior. Os nós também tendem a aumentar nessa proporção, o qual provoca um incremento muito rápido do número de incógnitas à medida que as malhas são refinadas. Por essa razão, a análise com esse tipo de malhas foi restrita a um conjunto de somente quatro malhas.

Tabela 5.5 – Conjunto de malhas híbridas.

Malha	Nº de elementos	Nº de nós	$h(m)$
H1	91	107	0,22367935
H2	364	367	0,12230938
H3	1456	1349	0,06433233
H4	5824	5161	0,033049

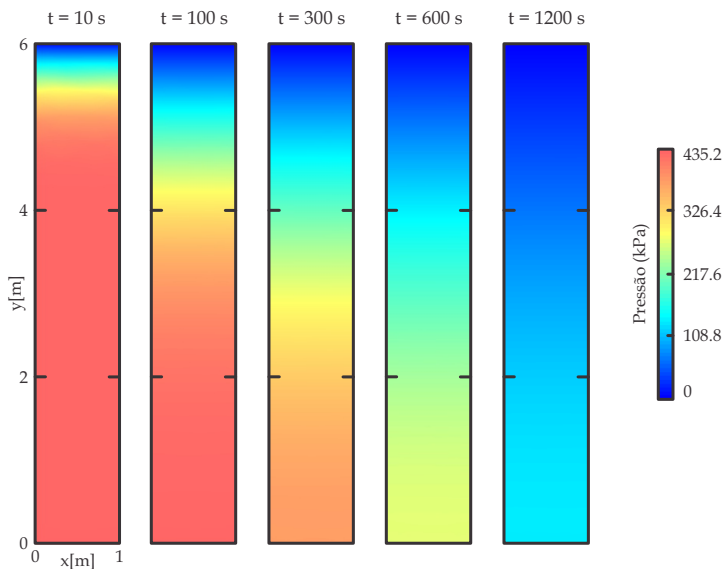
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.2 Resultados obtidos

Devido à simplicidade do problema da coluna de Terzaghi pode-se prever intuitivamente o comportamento das variáveis do problema. Isso permite fazer uma verificação qualitativa da solução obtida analisando as condições de contorno, equações (5.3), (5.4) e (5.5). Durante a compactação da coluna, um perfil de pressão no fluido se estabelece ao longo da

coluna, onde a pressão na fronteira superior é mínima, devido ao êmbolo ser permeável. A pressão na fronteira inferior é a máxima, resultado do equilíbrio com as tensões na rocha porosa. Ao longo do tempo, o gradiente de pressão vai diminuindo, bem como a pressão na base da coluna, até o ponto em que haverá uma pressão nula em toda a coluna. Por outro lado, o deslocamento vertical no topo aumenta durante o processo de compactação, já que o fluido vai sendo expulso da coluna. Logo, no tempo t_{∞} , o deslocamento vertical é máximo no topo da coluna, pois com a ausência de fluido apenas a rocha suporta a carga aplicada.

Figura 5.4 – Campos de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0,1$ s.

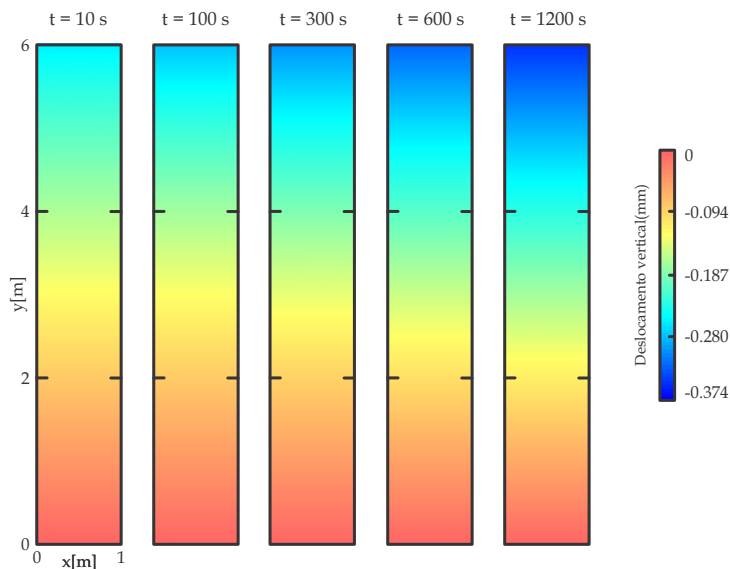


Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa previsão qualitativa pode ser confirmada na figura 5.4, que apresenta o campo de pressão em diferentes tempos de simulação. Nessa figura pode-se observar que à medida que o tempo avança a pressão na coluna diminui, conforme esperado. Da mesma forma, o campo de deslocamento vertical para diferentes tempos é mostrado na figura 5.5. Percebe-se nessa figura que o deslocamento vertical também segue o comportamento esperado. Em ambas as figuras 5.4 e 5.5, os resultados expostos

foram obtidos com a malha mais grosseira, H1, do conjunto de malhas híbridas. Além disso, o passo de tempo utilizado foi $\Delta t = 0,1\text{s}$.

Figura 5.5 – Campos de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0,1\text{s}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

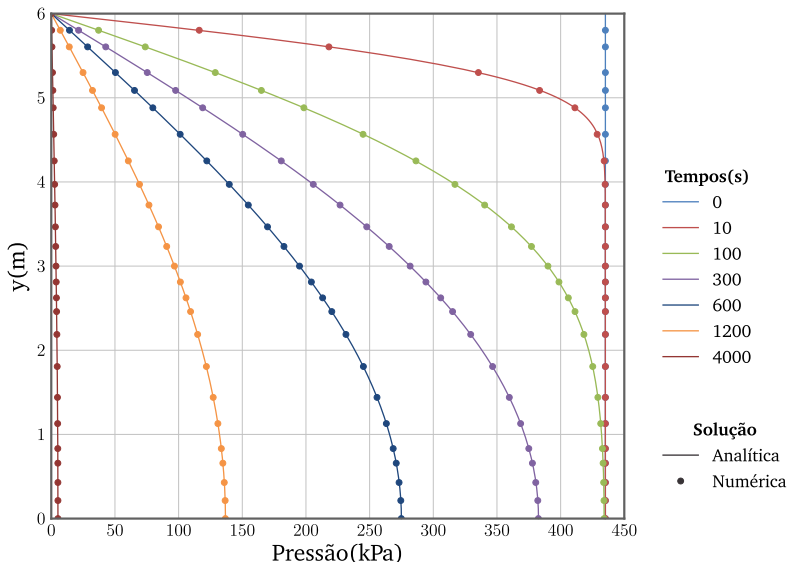
Uma avaliação mais precisa pode ser realizada através de uma comparação com a solução analítica desse problema⁹. Para isso, optou-se por traçar gráficos dos perfis de pressão e deslocamento vertical para ambas as soluções, em diferentes tempos de simulação. Dessa forma, pode-se visualizar o quão próxima a solução numérica está da solução analítica.

Na figura 5.6 está mostrado o gráfico com os perfis de pressão ao longo da coluna em diferentes níveis de tempo. Nessa figura pode-se observar que no tempo $t = 0\text{s}$ a pressão é constante na coluna inteira. Já no tempo $t = 4000\text{s}$ o perfil de pressão é praticamente nulo, ou seja, está quase no regime permanente do problema. Como se pode visualizar, a solução numérica está muito próxima à solução analítica, mostrando uma ótima concordância entre as soluções. É importante salientar que essa

⁹Conforme já comentado anteriormente, a solução analítica do problema de Terzaghi pode ser encontrada no apêndice C, mais especificamente na seção C.1.

concordância ocorre mesmo para a malha mais grosseira do conjunto de malhas híbridas, cujos resultados são os mostrados nessa figura.

Figura 5.6 – Perfis de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0,1s$.

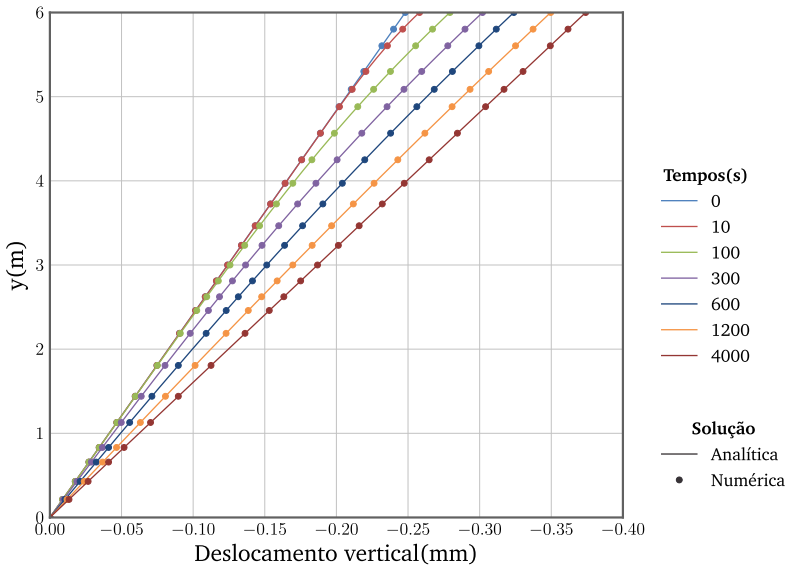


Fonte: Elaborada pelo autor.

Já na figura 5.7 está mostrado o gráfico com os perfis de deslocamento vertical ao longo da coluna em diferentes tempos. Mais uma vez, como pode ser observado, a solução numérica tem ótima concordância com a solução analítica, mesmo utilizando-se da solução na malha mais grosseira. Nas figuras 5.6 e 5.7, no tempo $t = 0s$ os valores de ambas as variáveis coincidem com os da solução de equilíbrio, obtida inicialmente com a fronteira superior impermeável de tal modo que seja resultante do equilíbrio entre o tensor tensão efetivo e a pressão do fluido. Esse equilíbrio é obtido na primeira etapa do algoritmo de solução, exposto na seção 4.6 do capítulo anterior.

Outro ponto a ser observado em ambos os gráficos das figuras 5.6 e 5.7 são os valores máximos de cada variável na coluna poroelástica. Enquanto o valor máximo de pressão ocorre na base da coluna, o valor máximo de deslocamento vertical ocorre no topo da coluna. Obviamente,

Figura 5.7 – Perfis de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 0,1\text{ s}$.



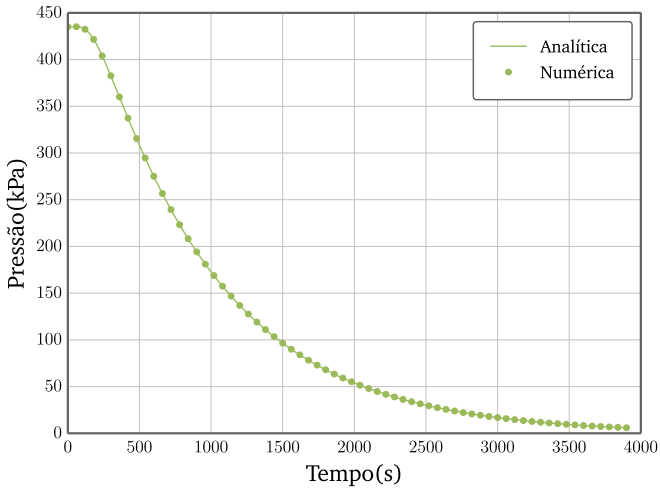
Fonte: Elaborada pelo autor.

como era de se esperar, a pressão máxima só poderia ser na base, pois a pressão no topo é igual a zero devido a condição de contorno. Da mesma forma, devido a condição de deslocamento nulo na base da coluna, o valor máximo no deslocamento vertical só poderia ser encontrado no topo da coluna.

As figuras 5.8 e 5.9 mostram a variação dos valores máximos de pressão e deslocamento vertical na coluna ao longo do tempo, nas respectivas posições onde são encontrados. Como pode ser observado em ambas as figuras, a variação temporal desses valores concorda também muito bem com a solução analítica. Vale informar que o valor do passo de tempo utilizado foi de $\Delta t = 1\text{ s}$, o que mostra que mesmo utilizando um passo de tempo maior do que aquele utilizado até o momento, os resultados numéricos são coerentes com a solução exata do problema. Mais uma vez, os resultados apresentados foram obtidos na malha mais grosseira do conjunto de malhas híbridas, ou seja, na malha H1.

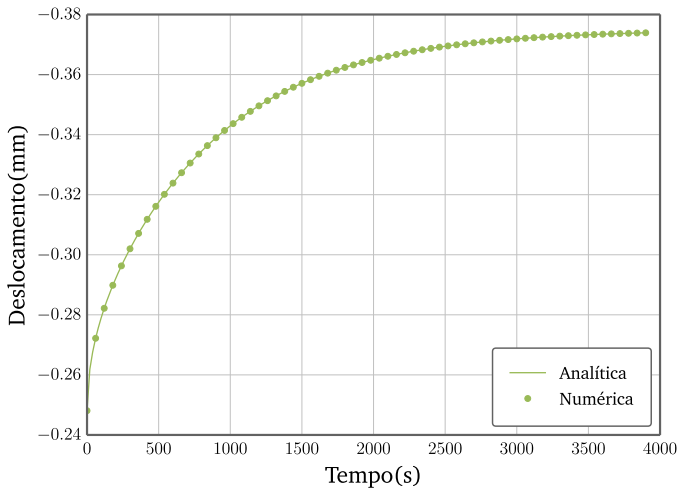
Nos gráficos das figuras 5.8 e 5.9 os intervalos entre os pontos da solução numérica não correspondem ao passo de tempo utilizado. Na ver-

Figura 5.8 – Variação no tempo da pressão na base da coluna, $y = 0m$. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 1s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.9 – Variação no tempo do deslocamento vertical no topo da coluna, $y = 6m$. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 1s$.

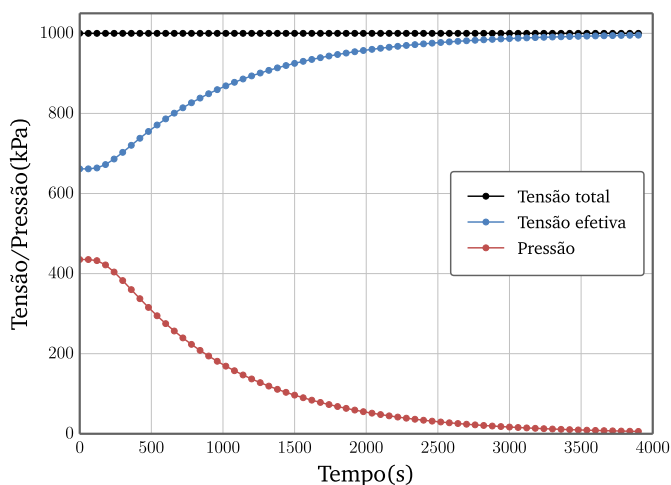


Fonte: Elaborada pelo autor.

dade, os pontos plotados possuem um intervalo entre si de 60 segundos. Se todos os pontos fossem plotados com o intervalo de tempo igual ao passo de tempo utilizado, os pontos da solução numérica iriam encobrir completamente a linha da solução analítica, dificultando a comparação dos resultados.

Um gráfico bastante ilustrativo é o da figura 5.10, que apresenta as variações no tempo da tensão vertical total, da tensão vertical efetiva e da pressão do fluido, todos na base da coluna. Nessa figura pode-se verificar o conceito de tensões efetivas apresentado por Terzaghi (1923). Inicialmente, quando ainda há fluido na coluna, a tensão total aplicada no topo da coluna é suportada parte pela pressão exercida pelo fluido e parte pela tensão interna da rocha porosa. Mas, com o avanço no tempo, o fluido é expulso da coluna gradualmente, diminuindo a pressão e, conseqüentemente, toda carga passando a ser suportada apenas pela rocha porosa.

Figura 5.10 – Variação no tempo de pressão, tensão efetiva e tensão total na base da coluna, $y = 0$. Resultados obtidos com a malha H1 e $\Delta t = 1s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos gráficos apresentados na presente seção, os resultados foram obtidos utilizando a malha H1, da tabela 5.5, e dois passos de tempo diferentes, 0,1s e 1s. Entretanto, o mesmo problema foi simulado com todos os conjuntos de malhas considerados (ver figura 5.2), bem como

com outros passos de tempo, inclusive alguns mais refinados. Em todas as simulações a concordância com a solução analítica foi semelhante, tanto nos gráficos de perfis no domínio espacial do problema quanto nos gráficos de variação no tempo. Logo, optou-se por não mostrar todos, pois não seria possível perceber visualmente uma diferença notável entre os resultados nas diferentes malhas.

5.2.3 Análise de convergência

Os resultados apresentados até o momento permitiram avaliar de forma qualitativa a solução numérica obtida, além de validar a implementação do código computacional. Como se pôde observar, os resultados reproduziram adequadamente o comportamento físico do problema. E mesmo em uma malha grosseira foi possível obter soluções satisfatórias.

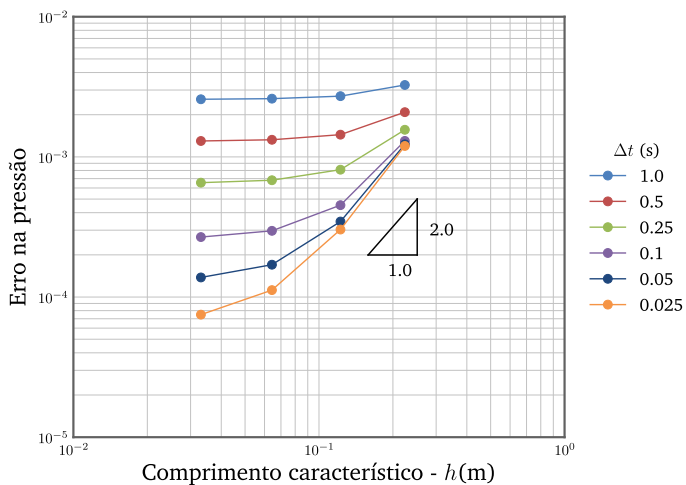
Entretanto, uma avaliação mais rigorosa de um método numérico passa pela análise de convergência espacial e temporal. Nessa análise, pode-se quantificar a precisão da solução através da determinação do erro de discretização. E assim, pode-se verificar se a solução numérica tende à solução analítica do problema quando se refina a malha espacial e o passo de tempo. Obviamente, nessa situação o erro de discretização deverá tender a zero.

De acordo com as aproximações consideradas, pode-se prever a ordem de convergência espacial e temporal do erro de discretização. Assim, enquanto a aproximação espacial por funções de forma normalmente apresenta convergência de segunda ordem (Hughes, 1987; Zienkiewicz & Taylor, 2000), a aproximação por diferenças finitas utilizada para a derivada temporal deverá apresentar convergência de primeira ordem (Ferziger & Perić, 2002; Maliska, 2004).

De fato, essas taxas de convergência teóricas foram verificadas para o erro na pressão em simulações que se utilizaram das malhas híbridas, como é possível observar nas figuras 5.11 e 5.12¹⁰. Enquanto na primeira figura mostra-se a convergência espacial para diferentes passos de tempo,

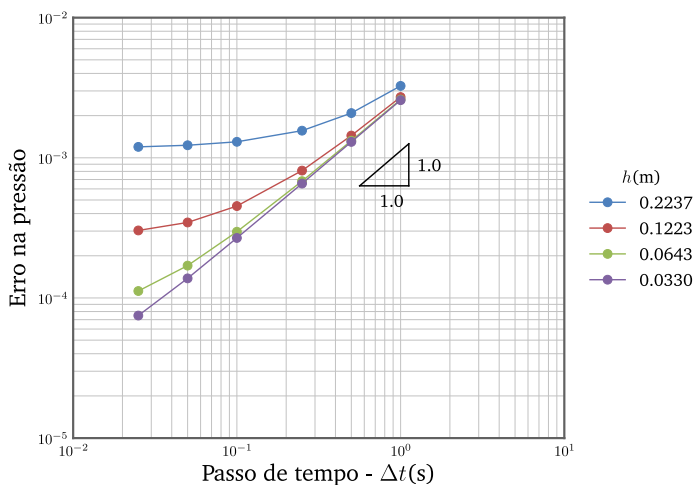
¹⁰Devido ao caráter transiente desse problema, todos os gráficos de convergência serão avaliados no tempo $t = 20s$. Nesse nível de tempo o gradiente de pressão já está estabelecido em mais da metade da coluna.

Figura 5.11 – Convergência espacial da pressão. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.12 – Convergência temporal da pressão. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

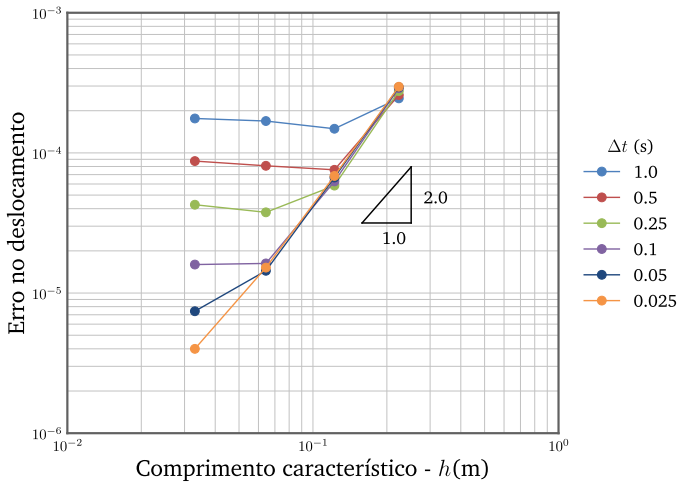
na segunda figura mostra-se a convergência temporal para diferentes níveis de refino de malha. É importante observar que as taxas de convergência teóricas são alcançadas após um refino de malha e do passo de tempo suficientes. Note-se que em ambas as figuras há uma horizontalização da convergência em passos de tempo grosseiros e em malhas grosseiras, respectivamente. Esse fenômeno é facilmente explicado pelo fato de que a solução numérica contém simultaneamente ambos os erros, um associado à discretização espacial e outro associado à discretização temporal. Assim, quando o gráfico de convergência torna-se horizontal, como por exemplo na curva associada ao $\Delta t = 1s$ na figura 5.11, o erro associado à discretização espacial tornou-se muito menor que o erro associado à discretização temporal. Este último então torna-se dominante e não pode ser diminuído refinando a malha, porque depende somente do valor do passo de tempo.

Como pode ser visualizado no gráfico da figura 5.11, refinando o passo de tempo o efeito de horizontalização é reduzido, porque o erro associado à discretização temporal diminui dessa forma. Um raciocínio análogo é válido para o efeito de horizontalização na figura 5.12, onde o refino da malha reduz esse efeito na convergência temporal. Na verdade, esse gráfico mostra que há uma eliminação total do efeito, como pode-se observar pela curva associada ao refino de malha indicado pelo valor do comprimento característico $h = 0,0330m$, correspondente à malha H4 da tabela 5.5.

Uma análise análoga pode ser realizada para o erro na solução do deslocamento vertical. Para isso, a figura 5.13 mostra os gráficos de convergência espacial associados ao deslocamento vertical para diferentes passos de tempo e a figura 5.14 mostra a convergência temporal para diferentes refinamentos de malha. Um fato anômalo que ocorre na convergência do erro do deslocamento vertical é que há um pequeno aumento do erro nas malhas mais refinadas antes do efeito de horizontalização ocorrer. Esse fato pode ser observado nas curvas da figura 5.13 para $\Delta t > 0,1s$, bem como nas curvas da figura 5.14. Embora ocorra esse pequeno aumento do erro tanto no refino espacial quanto temporal, as curvas tornam-se uma reta com uma inclinação esperada. Isso pode ser observado nas curvas para o Δt mais refinado na figura 5.13 e para a malha mais refinada na figura 5.14.

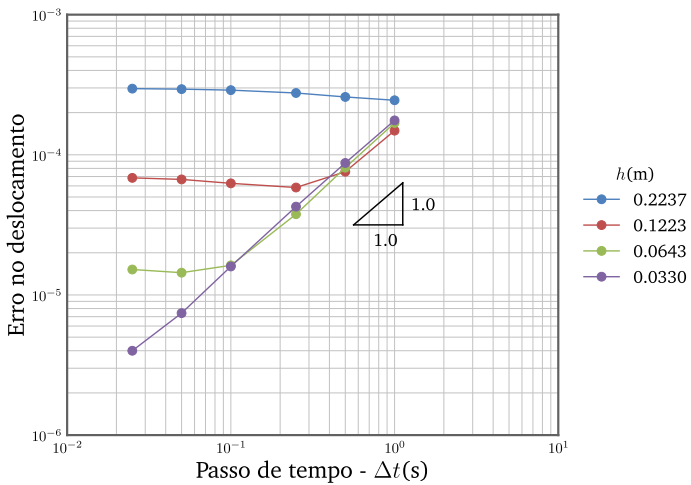
O aumento do erro mostrado pelas curvas da figura 5.13 para $\Delta t >$

Figura 5.13 – Convergência espacial do deslocamento vertical. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$.



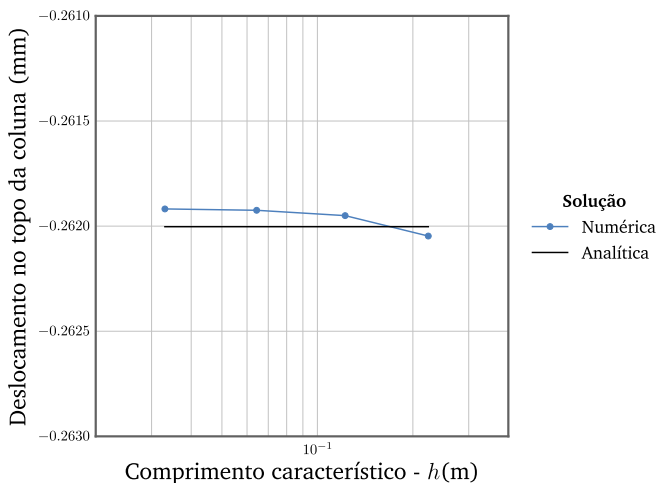
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.14 – Convergência temporal do deslocamento vertical. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.15 – Variação do deslocamento no topo da coluna em função do refino de malha para o $\Delta t = 1s$. Malhas híbridas . Tempo $t = 20s$.

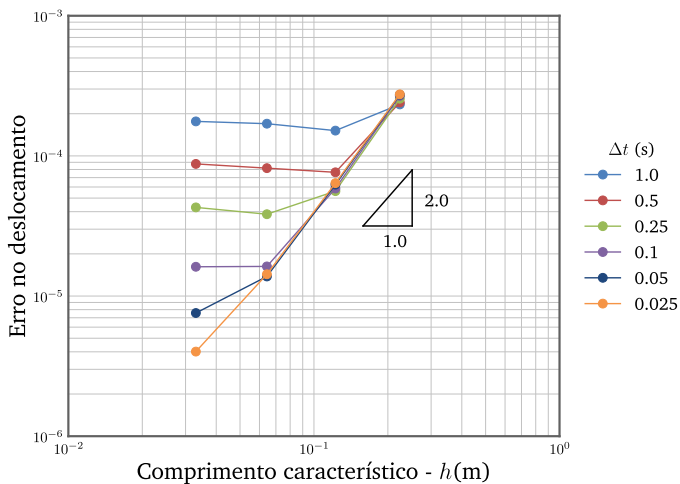


Fonte: Elaborada pelo autor.

0, 1s pode ser explicado comparando a solução numérica com a solução analítica. Considere-se por exemplo o gráfico da figura 5.15, que compara o valor analítico do deslocamento no topo da coluna com os valores numéricos obtidos em diferentes malhas. Como pode-se notar nesse gráfico, à medida que se refina a malha, a solução numérica converge para um valor maior que o da solução analítica, contudo, na malha grosseira esse valor é menor. Consequentemente, o valor correspondente à solução numérica cruza o valor analítico em um determinado ponto. O cruzamento entre as soluções faz com que o erro diminua nas malhas mais grosseiras. Entretanto, quando a solução numérica começa a convergir para o valor maior que o analítico, tem-se o comportamento de horizontalização no erro, já que a solução numérica deixa de mudar.

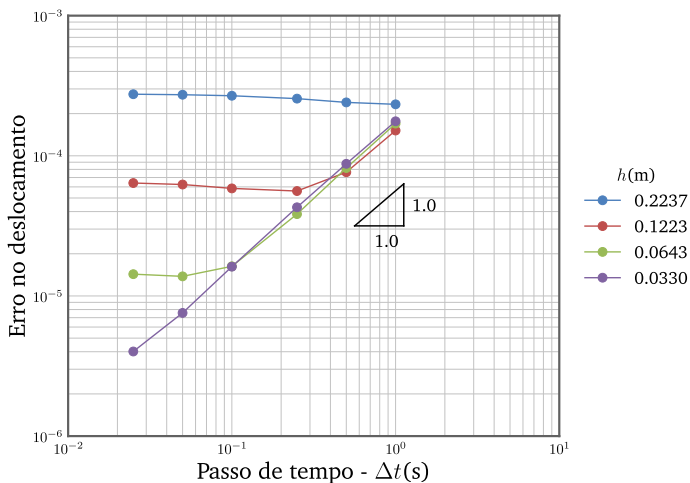
Esse comportamento também é observado quando se considera o refino do passo de tempo, o que justifica o aumento do erro nas curvas da figura 5.14, seguido da horizontalização. Obviamente, quando há um refino suficiente em ambas as discretizações, de forma a eliminar o efeito de horizontalização, passa-se a ter um comportamento esperado para a convergência do erro.

Figura 5.16 – Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.17 – Convergência temporal do deslocamento vertical para o MEF Malhas híbridas. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Devido ao uso comum do método de elementos finitos(MEF) para a solução numérica de problemas de elasticidade, optou-se por utilizá-lo para obter uma solução de referência para fins de comparação. Para isso, o MEF foi utilizado na discretização apenas do modelo geomecânico¹¹, sendo acoplado com a solução numérica do EbFVM para o modelo de escoamento. Plotando os gráficos de convergência para o deslocamento vertical obtido com o MEF, figuras 5.16 e 5.17, percebe-se o mesmo comportamento apresentado pelos resultados obtidos pelo EbFVM. Observe-se que mesmo os gráficos de convergência para os dois métodos sendo muito parecidos entre si, há algumas diferenças nos valores de erros, tanto para o gráfico de convergência espacial, figura 5.16, quanto para o de convergência temporal, figura 5.17.

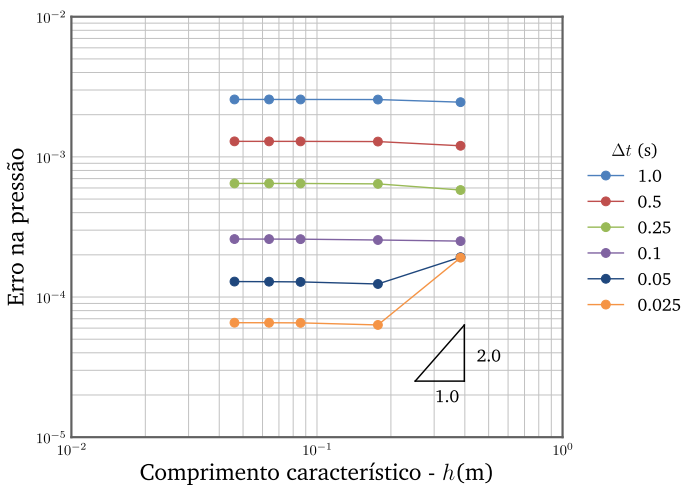
É importante notar que o comportamento do aumento do erro que precede o efeito de horizontalização dos gráficos também ocorre quando o MEF é utilizado na solução do modelo geomecânico. Obviamente, da mesma forma que no EbFVM, realizando um refino suficiente em ambas as discretizações, espacial e temporal, esse comportamento anômalo desaparece. Percebe-se que a solução do EbFVM é equivalente àquela obtida pelo MEF, onde os erros associados são da mesma ordem de grandeza, além de apresentarem o mesmo comportamento.

A seguir é apresentada a análise de convergência com base nos resultados obtidos com malhas quadrangulares na discretização espacial do problema de Terzaghi. A figura 5.18 mostra o gráfico de convergência do erro na pressão e a figura 5.19 o gráfico de convergência do erro no deslocamento vertical, ambos empregando-se as malhas quadrangulares. O gráfico associado ao erro na pressão mostra que a utilização de malhas de quadriláteros exige um refino temporal maior, pois o efeito de horizontalização só é reduzido na solução com os dois passos de tempo mais refinados. Ou seja, para obter resultados com a redução efetiva do erro para todas as malhas seria necessário usar passos de tempo ainda menores do que os utilizados.

Contudo, comparando os gráficos da figura 5.11, erros na pressão associados às malhas híbridas, com os da figura 5.18, erros na pressão associados às malhas quadrangulares, pode-se observar que a ordem de grandeza dos erros é a mesma. Na verdade, o que diferencia os gráficos de

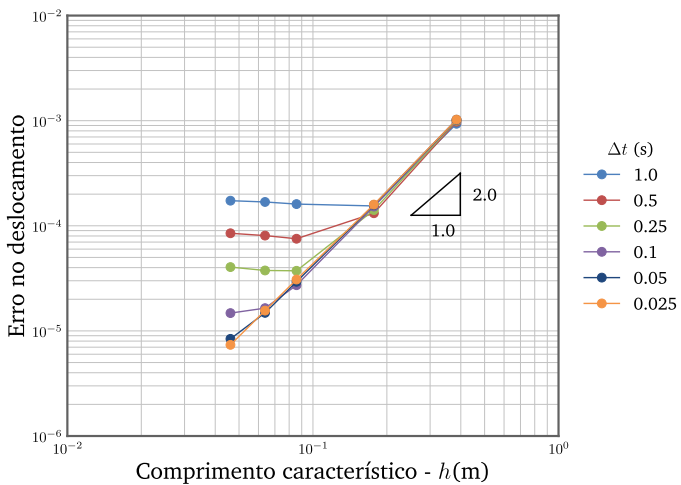
¹¹O procedimento de discretização implementado para o método de elementos finitos está exposto no Apêndice B do presente trabalho

Figura 5.18 – Convergência espacial da pressão. Malhas quadrangulares. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.19 – Convergência espacial do deslocamento vertical. Malhas quadrangulares. Tempo $t = 20s$.

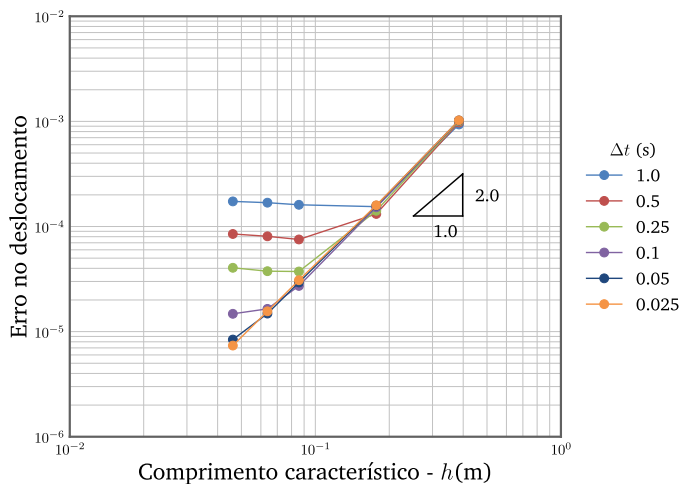


Fonte: Elaborada pelo autor.

convergência é que aqueles relativos às malhas quadrangulares diminuíram mais os erros associados às malhas grosseiras do que àqueles obtidos para as malhas híbridas. Assim, os erros nas malhas grosseiras ficaram praticamente iguais a aqueles associados às malhas refinadas quando se empregou as malhas quadrangulares.

Já para a convergência do erro para o deslocamento vertical, as curvas não diferem muito do comportamento apresentado pelos erros associados às malhas híbridas. Bem como a convergência do erro associado à discretização pelo MEF, que também teve um comportamento similar quando comparado com aqueles associados às malhas híbridas, como pode-se observar na figura 5.20.

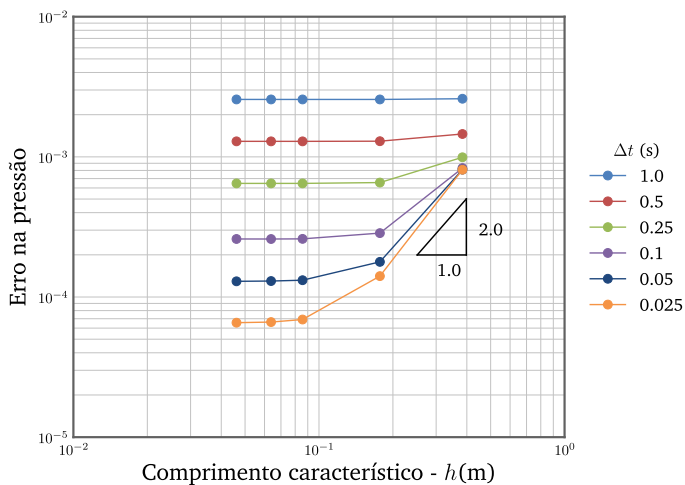
Figura 5.20 – Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Malhas quadrangulares. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

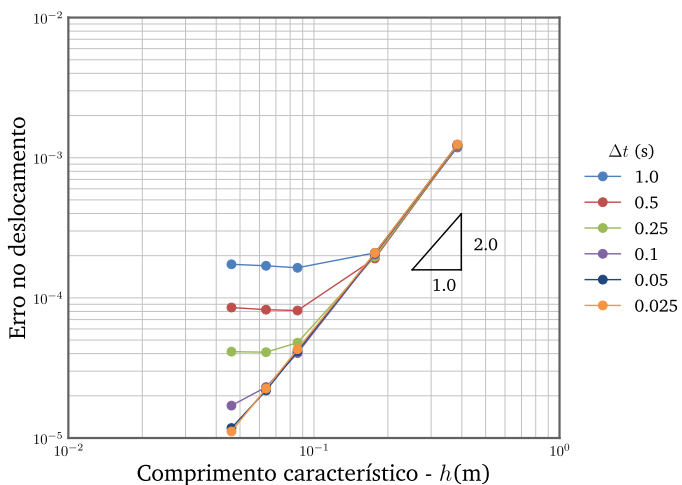
Com o emprego das malhas triangulares o comportamento não foi diferente, como pode ser visualizado nas figuras 5.21 e 5.22, onde são apresentadas as curvas de convergência espacial para o erro na pressão e no deslocamento vertical, respectivamente. Mais uma vez, quando é realizado um refino suficiente no passo de tempo, o efeito de horizontalização é reduzido na convergência do erro de ambas as variáveis.

Figura 5.21 – Convergência espacial da pressão. Malhas triangulares. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

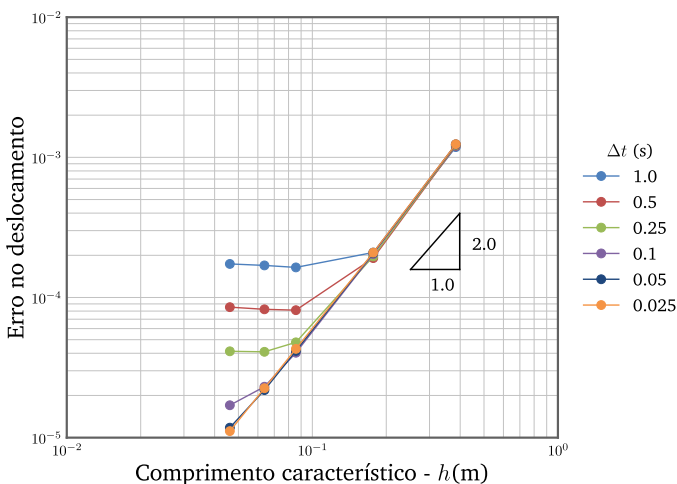
Figura 5.22 – Convergência espacial do deslocamento vertical. Malhas triangulares. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe-se que os valores do erro no deslocamento obtidos pelo MEF são exatamente os mesmos obtidos pelo EbFVM. Isso não poderia ser diferente quando se utiliza malhas triangulares, uma vez que os sistemas lineares para os deslocamentos têm coeficientes idênticos para esse tipo de malhas. Isso ocorre porque as funções de forma associadas aos nós do elemento triangular são lineares, por consequência suas derivadas são constantes, fazendo com que as aproximações das integrais internas aos elementos seja iguais. Embora as integrais aproximadas sejam de superfície no EbFVM, sobre as faces, e sejam volumétricas no MEF, ambas têm em seus integrandos matrizes das derivadas das funções de forma, constantes no elemento triangular.

Figura 5.23 – Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Malhas triangulares. Tempo $t = 20s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

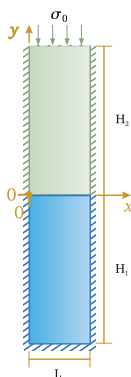
De maneira geral, os resultados obtidos para problema de Terzaghi foram satisfatórios, já que a solução numérica concordou com a solução analítica. Vale lembrar que essa concordância foi constatada mesmo para as malhas mais grosseiras dos três conjuntos considerados (híbridas, quadrangulares e triangulares). Outra evidência que corrobora a eficiência do método apresentado é a redução consistente do erro de discretização observada quando as malhas e o passo de tempo foram refinados.

Outrossim, o fato da solução do modelo geomecânico pelo EbFVM ser equivalente à solução obtida pelo MEF, demonstra sua aptidão para a solução de problemas estruturais.

5.3 Problema de Terzaghi com duas camadas

Este problema consiste na mesma coluna poroelástica de Terzaghi apresentada anteriormente, porém, agora com o domínio dividido em duas camadas com materiais de propriedades diferentes. A coluna poroelástica está submetida às mesmas condições de contorno do problema anterior, definidas pelas equações (5.3), (5.4) e (5.5). A figura 5.24 mostra um diagrama esquemático que ilustra essa coluna com duas camadas de alturas H_1 e H_2 e largura L . Nesse problema, os eixos coordenados foram posicionados na interface de contato entre as duas camadas. Essa posição é conveniente para a obtenção da solução analítica, obtida por Verruijt (2013). A única solução analítica disponível para esse problema é a da pressão, mostrada na seção C.2 do apêndice C. É digno de nota o fato de que essa solução analítica só considera camadas formadas por rochas com compressibilidades e permeabilidades absolutas diferentes.

Figura 5.24 – Diagrama esquemático do problema de Terzaghi com duas camadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O uso de duas camadas com materiais diferentes permite estudar o comportamento do método numérico quando empregado na solução de

problemas geomecânicos heterogêneos. Essa característica é bastante importante, pois reproduz uma situação comumente encontrada em reservatórios de petróleo. Isso porque os reservatórios são normalmente formados por rochas com propriedades muitas vezes bastante distintas. Um exemplo disso são os reservatórios areníticos de alta permeabilidade intercalados por camadas de folhelhos de baixa permeabilidade (Dal Pizzol, 2014).

Desta forma, definiu-se dois tipos de problemas heterogêneos distintos a serem testados, sendo um com permeabilidades diferentes entre as camadas e outro com propriedades mecânicas diferentes. Em cada um dos problemas pretende-se avaliar de forma separada a heterogeneidade no escoamento e na parte geomecânica do problema. Vale lembrar que não há solução analítica disponível para nenhuma das variáveis do problema quando se considera camadas com propriedades mecânicas diferentes.

5.3.1 Permeabilidades heterogêneas

Para avaliar a heterogeneidade na permeabilidade definiu-se uma razão de permeabilidades dada por $R_k = K_2/K_1$, onde K_1 é a permeabilidade da camada inferior e K_2 é a permeabilidade da camada superior. A razão de permeabilidades R_k assumiu os valores 100, 10 e 0,1. Nos dois primeiros casos a permeabilidade da camada superior é maior que a da camada inferior, enquanto no último é menor.

Os dados de simulação empregados nesse problema são os indicados na tabela 5.1. A carga aplicada no topo da coluna e a permeabilidade do meio inferior são os mesmos utilizados na coluna de Terzaghi original, e mostrados novamente na tabela 5.6. Definiu-se que a permeabilidade do meio inferior (K_1) permanecerá constante, logo a permeabilidade do meio superior (K_2) variará segundo os valores da razão de permeabilidades R_k previamente especificados.

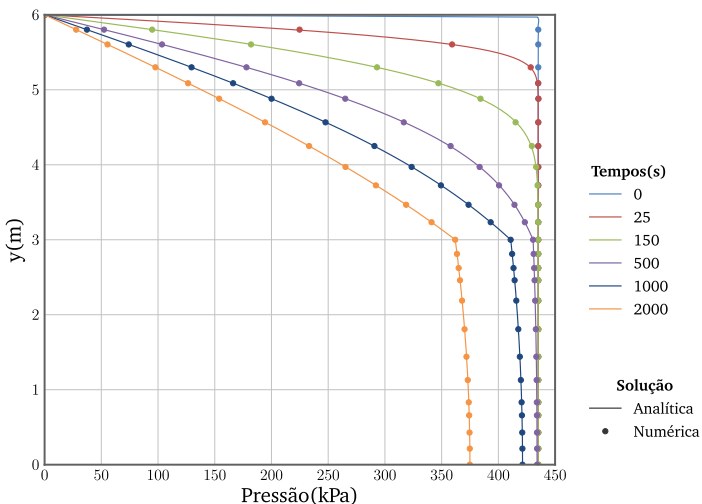
A figura 5.25 mostra a comparação entre perfis de pressão oriundos das soluções numérica e analítica, para uma razão de permeabilidades $R_k = 0,1$, ou seja, a permeabilidade do meio inferior é 10 vezes maior que a permeabilidade do meio superior. Note que o gradiente de pressão na parte inferior da coluna é bem menor que o obtido para o meio superior. Isso decorre da permeabilidade no meio superior ser menor, fazendo

Tabela 5.6 – Dados de entrada para o problema com permeabilidades diferentes.

Dado	Símbolo	Valor	Unid.
Altura do meio inferior	H_1	3,0	m
Altura do meio superior	H_2	3,0	m
Largura da coluna	L	1,0	m
Carga aplicada	σ_0	$1,0 \times 10^6$	Pa
Permeabilidade absoluta do meio inferior	K_1	$1,9 \times 10^{-15}$	m^2

Fonte: Elaborada pelo autor.

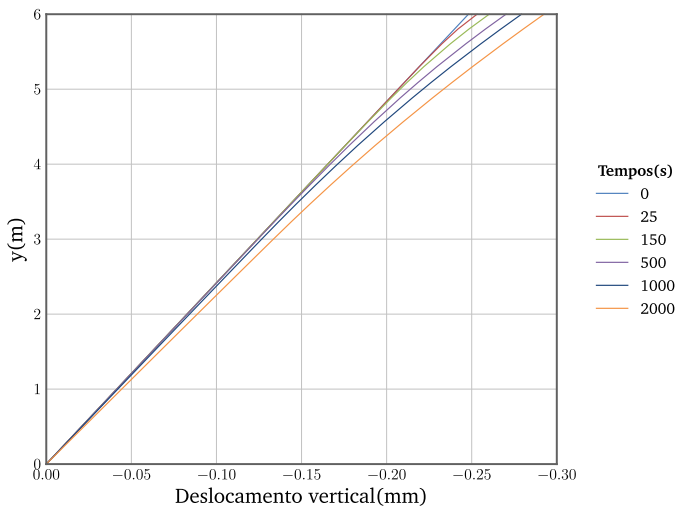
com que esse meio seja aquele que estabeleça a dinâmica transiente na coluna. Esse gráfico nos mostra ainda a descontinuidade no gradiente de pressão na interface entre os meios. Como pode ser observado, a metodologia prevê de maneira bastante satisfatória essa descontinuidade entre os meios, pois a mudança no perfil é repentina e no ponto onde deve ocorrer. Isso mostra que o método possui uma boa precisão na solução de problemas com permeabilidades heterogêneas.

Figura 5.25 – Perfis de pressão para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 0, 1$. Malha H1 e $\Delta t = 0, 1s$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 5.26 apresenta a solução numérica para os perfis de deslocamento vertical em diferentes níveis de tempo, na situação onde a razão R_k é de 0,1. Novamente, o resultado apresentado é o esperado. Diferentemente dos perfis de pressão, aqui não há uma descontinuidade na solução, pois não há variação das propriedades mecânicas entre as camadas. Logo, a solução do modelo geomecânico deve manter o mesmo comportamento encontrado em um problema de Terzaghi com apenas um material.

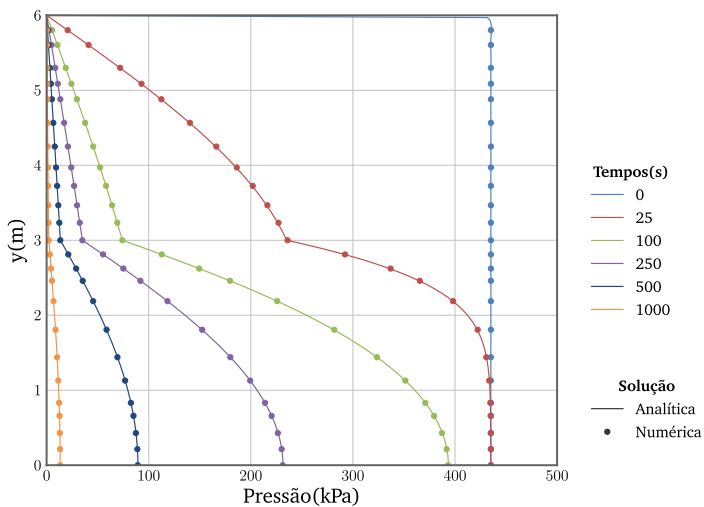
Figura 5.26 – Solução numérica de perfis de deslocamento vertical para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 0,1$. Malha H1 e $\Delta t = 0,1s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

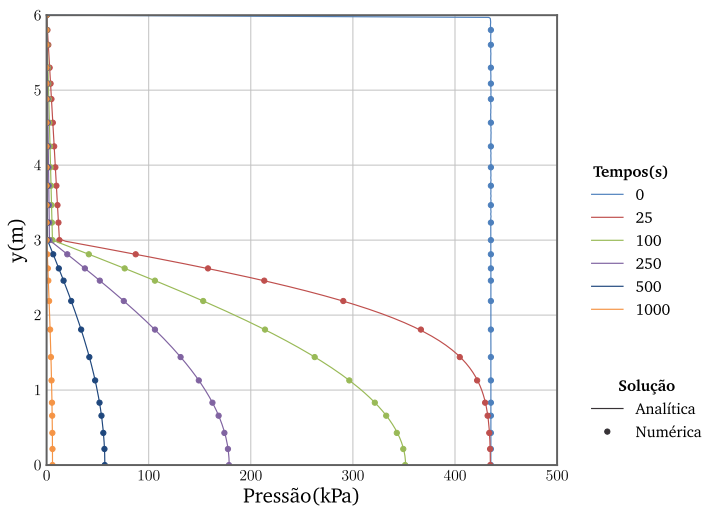
Para a situação onde a permeabilidade do meio superior é maior considerou-se dois casos, um com permeabilidade 10 vezes maior e outro 100 vezes maior que a permeabilidade associada ao meio inferior. Assim como no caso anterior, obteve-se resultados numéricos em uma ótima concordância com a solução analítica. Esses resultados podem ser visualizados nos gráficos das figuras 5.27 e 5.28. Observa-se que mais uma vez o método foi capaz de prever a descontinuidade nos gradientes de pressão de forma precisa em ambos os casos.

Figura 5.27 – Perfis de pressão para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 10$. Malha H1 e $\Delta t = 0,1s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.28 – Perfis de pressão para diferentes tempos. Razão de permeabilidades $R_k = 100$. Malha H1 e $\Delta t = 0,1s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, os deslocamentos verticais mantiveram o mesmo comportamento encontrado para a razão de permeabilidades anterior, ou seja, com perfis sem descontinuidades. Como não seria possível perceber uma diferença visual entre as soluções dos perfis de deslocamento vertical para os resultados obtidos com diferentes razões de permeabilidades, optou-se por suprimir esses gráficos.

Como pôde ser observado nesses resultados, embora o problema seja formado por regiões com escalas de tempo bastante distintas, como no caso com $R_k = 100$, a metodologia numérica foi capaz de obter o resultado com precisão. Observe que para as três razões de permeabilidades consideradas, os valores numéricos ficaram sobre as curvas de solução analítica. Vale lembrar que as soluções apresentadas foram obtidas para a malha híbrida mais grosseira (malha H1).

5.3.2 Propriedades mecânicas e poroelásticas heterogêneas

Nessa variante do problema da coluna de Terzaghi com duas camadas, escolheu-se manter as permeabilidades absolutas iguais entre os dois meios e considerar duas rochas porosas com propriedades mecânicas e poroelásticas diferentes. Para este caso considerou-se duas rochas cujas propriedades estão listadas na tabela 5.7. A carga aplicada no topo da coluna é a mesma para o caso de permeabilidades diferentes, informada na tabela 5.6. Como não há solução analítica disponível para esse caso, se apresentam apenas os resultados numéricos.

Tabela 5.7 – Dados de entrada para o problema com dois materiais de propriedades mecânicas diferentes.

Dado	Meio inferior	Meio superior	Unid.
Altura	3,0	3,0	m
Compressib. do grão sólido	$2,65 \times 10^{-11}$	$3,26 \times 10^{-11}$	1/Pa
Coefficiente de Biot	0,79	0,85	-
Coefficiente de Poisson	0,33	0,31	-
Módulo de elast. transversal	$6,0 \times 10^9$	$4,2 \times 10^9$	Pa
Porosidade	0,19	0,2	-
Permeabilidade absoluta	2,0	2,0	mD

Fonte: Elaborada pelo autor.

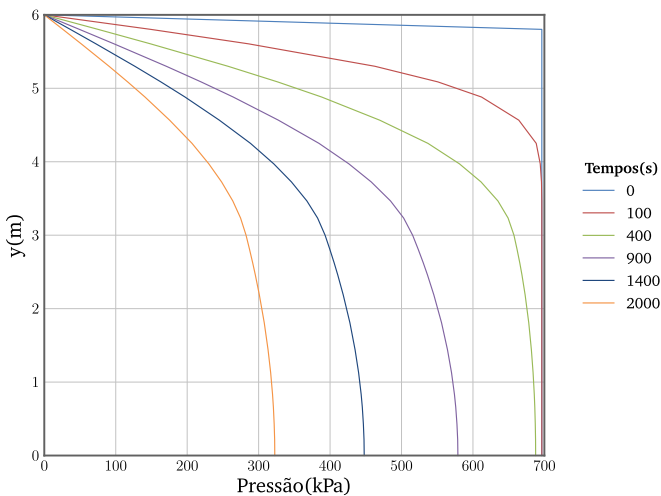
Um ponto importante a ser considerado nesse caso é a determinação do estado de equilíbrio inicial. Enquanto nos casos anteriores da coluna de Terzaghi a condição de equilíbrio inicial era obtida instantaneamente considerando o topo da coluna impermeável, com as propriedades poroelásticas diferentes esta condição de equilíbrio não pode ser obtida de maneira instantânea. Isso ocorre porque as propriedades poroelásticas determinam o quanto da carga total aplicada será suportada pelo fluido e o quanto será suportada pela rocha. Como essas propriedades são diferentes, a carga suportada pelo fluido em cada camada é diferente, de tal forma que a pressão varia entre as camadas. Com esse gradiente de pressão surge fluxo de fluido entre os dois meios. Assim, para se obter uma solução com a pressão uniforme em toda a coluna deve-se simular a condição inicial com alguns passos de tempo, o suficiente para atingir um campo de pressão constante. Essa modificação na determinação da condição de equilíbrio foi considerada nesse caso.

A figura 5.29 mostra a solução numérica para os perfis de pressão ao longo da coluna em níveis de tempo diferentes. Como pode-se observar, assim como a coluna de Terzaghi original¹², não há uma descontinuidade na solução da pressão, o que é esperado já que não há variação na permeabilidade absoluta. Embora as propriedades poroelásticas sejam diferentes, a principal propriedade que estabelece o gradiente de pressão no fluido é a permeabilidade absoluta.

Já na figura 5.30 a diferença das propriedades poroelásticas entre os meios fica bastante evidente. Como o meio inferior é mais rígido e menos compressível que o superior, o meio superior se deforma mais. Essa maior deformação pode ser constatada pela maior inclinação na parte superior do gráfico. Mais uma vez, a metodologia apresentada mostrou-se eficaz na solução de problemas heterogêneos. Embora não exista uma solução analítica disponível para esse problema, pode-se perceber que a solução numérica obedece as condições de contorno e reproduz o comportamento esperado. Assim como no caso anterior, a malha utilizada foi a H1 com o passo de tempo $\Delta t = 0,1$ s.

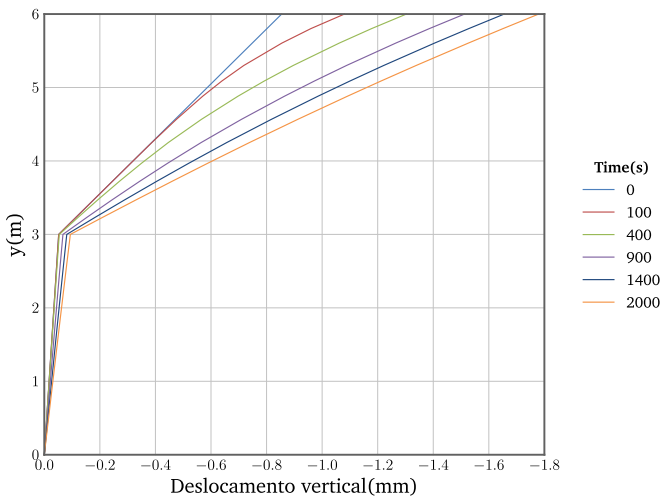
¹²Ver seção 5.2.2, onde estão expostos os perfis de pressão e deslocamento vertical para a situação onde a coluna é formada por apenas um tipo de rocha porosa.

Figura 5.29 – Solução numérica de perfis de pressão para diferentes tempos com meios de propriedades mecânicas diferentes. Malha H1 e $\Delta t = 0,1s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.30 – Solução numérica de deslocamento vertical para diferentes tempos com meios de propriedades mecânicas diferentes. Malha H1 e $\Delta t = 0,1s$



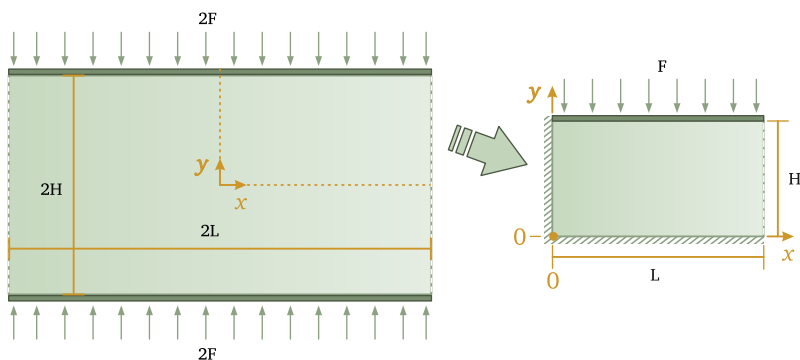
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Problema de Mandel

O problema de Mandel (1953) é um problema clássico da poroelasticidade e bastante utilizado para validação de códigos numéricos aplicados à geomecânica (Cheng & Detournay, 1988; Ferronato *et al.*, 2010; Dal Pizzol, 2014; Tonelli, 2016). Como ele apresenta um comportamento não-monotônico na pressão, é um ótimo problema para verificação da robustez do procedimento de solução acoplada escoamento/geomecânica, uma vez que esse comportamento não é observado em soluções desacopladas (Abousleiman *et al.*, 1996).

O problema de Mandel consiste em uma amostra de rocha saturada por um fluido, cujas dimensões são $2H$ de altura por $2L$ de largura. Essa amostra é comprimida por duas placas planas rígidas e impermeáveis em contato com as superfícies superior e inferior. Além disso é livre para se deformar nas superfícies laterais, como pode ser observado na figura 5.31. No instante inicial, uma força de magnitude $2F$ é aplicada sobre as placas, comprimindo a amostra e expulsando o fluido pelas laterais permeáveis. Devido à simetria em relação aos eixos coordenados, cuja origem é considerada no centro da amostra, é mais conveniente estabelecer como domínio de cálculo apenas um quarto do domínio total, como é mostrado no diagrama da figura 5.31.

Figura 5.31 – Diagrama esquemático do problema de Mandel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As placas rígidas, que comprimem a amostra, são mantidas paralelas entre si. Desse modo, fica estabelecido um deslocamento vertical

constante ao longo das fronteiras superior e inferior. Essa imposição de placas rígidas fará com que o deslocamento horizontal seja nulo em $x = 0$ enquanto o deslocamento vertical seja nulo em $y = 0$, instaurando-se duas linhas de simetria, uma na direção x e outra na direção y . Contudo, na lateral direita do domínio de cálculo não há imposição de nenhum tipo de restrição, permitindo qualquer deslocamento por parte da amostra bem como o escoamento do fluido. Outrossim, em todas as fronteiras há condição de deslizamento, ou seja, tensão de cisalhamento nula. No problema de Mandel a variação da porosidade é desconsiderada, por essa razão a porosidade será mantida constante na simulação desse problema.

Matematicamente, as condições de contorno na direção x são

$$\begin{cases} u = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \text{ em } x = 0 \text{ e } \begin{cases} \sigma_{xx} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \text{ em } x = L, \quad (5.6)$$

já que não há restrição ao deslizamento, sendo a única restrição ao deslocamento imposta sobre a superfície de simetria. As condições de contorno na direção y são

$$\begin{cases} v = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \text{ em } y = 0 \text{ e } \begin{cases} \int_0^L \sigma_{yy} dx = -F \\ v = \text{constante} \end{cases} \text{ em } y = H. \quad (5.7)$$

Observe-se que a condição de contorno na superfície superior é especificada na forma integral, porque ao invés de uma tensão normal há uma força F sendo imposta como condição de contorno ¹³. Por último, as condições de contorno para o escoamento são

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} = 0 \\ P = 0 \end{cases} \text{ em } x = 0, y = 0 \text{ e } y = H, \quad (5.8)$$

Da mesma forma que no problema de Terzaghi (seção 5.2), as condições de contorno para o escoamento são de paredes impermeáveis com exceção de uma, neste caso a superfície lateral direita. Mais uma vez, o escoamento é estabelecido pela diferença de pressão entre aquela instaurada no interior do domínio, resultado do equilíbrio de forças entre

¹³A imposição de uma condição de contorno em termos de força para o problema geomecânico exige um tratamento especial, que será explicado na sequência dessa seção.

fluido, rocha e carga aplicada, e a pressão nula na superfície permeável do domínio.

Outra consequência direta da condição de contorno de placas rígidas, que impõem um deslocamento vertical constante nas fronteiras superior e inferior, é o fenômeno conhecido como efeito de Mandel-Cryer (Schiffman *et al.*, 1969). Esse efeito diz respeito ao comportamento não monotônico da pressão, cuja variação nos instantes iniciais do processo de compressão da amostra não ocorre da forma que seria esperada.

Após se estabelecer uma pressão de equilíbrio, no instante $t = 0s$, com as tensões efetivas e a carga aplicada, espera-se que devido à saída do fluido pela fronteira à direita o valor da pressão diminua no interior do domínio. Entretanto, não é o que ocorre, na verdade há um aumento da pressão, especialmente na região próxima ao centro da amostra. Isso porque a imposição de placas rígidas estabelece que a compressão que ocorre na lateral do domínio, onde há condição de pressão nula, seja a mesma compressão que ocorre no centro da amostra. Assim, nos instantes iniciais deste processo a informação de pressão nula nas fronteiras laterais ainda não chegou ao centro da amostra, gerando um aumento de pressão nessa região com relação ao valor inicial de equilíbrio. Depois de um determinado período de tempo, quando o escoamento do fluido já está estabelecido, a pressão na região central vai diminuindo gradativamente.

Este efeito foi observado inicialmente por Mandel (1953) e em um segundo momento por Cryer (1963), que constatou tal efeito ao resolver o problema da consolidação de uma esfera poroelástica. Na sequência, Gibson *et al.* (1963) realizaram diversos experimentos em laboratório que comprovaram este efeito. Mais tarde, em uma análise detalhada de todas as teorias de consolidação, Schiffman *et al.* (1969) nomeou-o como efeito de Mandel-Cryer.

Numericamente, o procedimento de obtenção da solução do problema de Mandel é praticamente o mesmo utilizado para o problema Terzaghi. Inclusive a determinação da solução de equilíbrio inicial ($t = 0s$) utiliza-se da mesma técnica, onde a fronteira aberta, é considerada impermeável no tempo inicial. Após encontrar a solução de equilíbrio entre a pressão do fluido, tensões efetivas e carga aplicada, a condição de contorno original é imposta e, portanto, o fluido pode escoar.

No entanto, a condição de força F constante aplicada na superfície

superior do domínio de cálculo faz com que a tensão nessa superfície, que deve ser imposta como condição de contorno, não seja necessariamente constante. Devido à relação existente entre força e tensão, essa condição de contorno especial deve respeitar a seguinte expressão

$$\int_0^L \sigma_{yy} dx = -F, \quad (5.9)$$

junto com a restrição de deslocamento vertical constante, conforme mostrado na equação (5.7). É fácil perceber que a imposição da condição de contorno de tensão total, fica prejudicada, já que o perfil de tensão normal, ao longo da direção x , e o valor do deslocamento vertical na superfície superior não são conhecidos. Dal Pizzol (2014) apresentou uma forma de contornar essa situação, em que um valor de tensão é estimado inicialmente e corrigido depois através de um procedimento iterativo. No presente trabalho será utilizada uma adaptação para malhas não estruturadas dessa técnica, que será explicada na sequência.

Nessa abordagem, primeiramente considera-se a condição de deslocamento vertical constante na fronteira superior. De acordo com essa condição, todos os valores de deslocamento vertical associados aos volumes controle sobre essa fronteira devem ser iguais. Assim, seleciona-se um desses volumes de controle para que sua equação de equilíbrio de forças na direção y seja resolvida. Em seguida, impõe-se que os deslocamentos verticais associados aos volumes restantes na fronteira sejam iguais ao valor do deslocamento no volume selecionado previamente. Seguindo a estrutura da equação (4.15), forma usual de uma equação discreta em volumes finitos, pode-se reescrever a equação discreta para esses volumes na forma

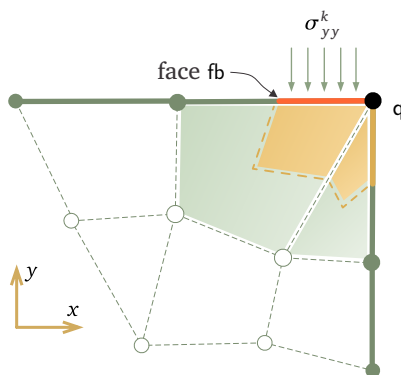
$$v_p = v_q, \quad (5.10)$$

onde v_q é o deslocamento vertical do volume de controle selecionado.

Em termos práticos, na linha da matriz de coeficientes associada ao volume p , da equação (5.10), eliminam-se todos os coeficientes, e na sequência adiciona-se 1 na diagonal e -1 na coluna relativa ao volume q , selecionado na primeira etapa. Note que v_q não é conhecido e será determinado como parte da solução do sistema linear do problema geomecânico. Isso porque a sua equação de equilíbrio de forças na direção y permanecerá completa no sistema linear.

Em teoria qualquer volume de controle sobre a fronteira superior poderia ser selecionado. No entanto, prefere-se aqueles que possuem apenas uma face de contorno que esteja sobre a fronteira superior. Este é o caso dos volumes de controle localizados nos extremos da fronteira superior. Assim, optou-se por selecionar o volume associado ao nó que é compartilhado pela fronteira superior e fronteira lateral direita, destacado na figura 5.32. Obviamente, impondo a condição de contorno em apenas uma face da fronteira, a etapa seguinte, de correção da tensão, fica facilitada.

Figura 5.32 – Esquema de imposição da condição de contorno de força no último volume de controle da fronteira superior.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme já citado anteriormente, a correção da tensão total vertical é realizada através de um procedimento iterativo. Nesse procedimento, a força aplicada na fronteira superior será a informação que controlará a correção da tensão no volume associado ao nó q . Assim, o algoritmo de correção da tensão vertical total, que deve ser aplicado em cada nível de tempo, está descrito a seguir:

1. Estima-se o valor inicial da tensão na superfície superior.

$$\sigma_{yy}^k = \frac{F}{L}$$

2. Obtém-se a solução dos modelos discretos de escoamento e geomecânico até a convergência.

3. Calcula-se um novo campo de tensão vertical total σ_{yy} , utilizando-se dos valores de pressão e deslocamentos determinados no item anterior.
4. Verifica-se se a condição da equação (5.9), segundo

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^{n_{fb}} |\sigma_{yy,i}^k| |\Delta \mathbf{S}_i| - F}{F} \right| \leq \tau_b, \quad (5.11)$$

onde n_{fb} é o número de faces de contorno sobre a fronteira superior, $\sigma_{yy,i}^k$ é a tensão vertical calculada na face i da fronteira, $\Delta \mathbf{S}_i$ é o vetor área da face i e τ_b a tolerância.

a) Se a condição **não** for satisfeita:

- Determina-se uma nova tensão vertical

$$\sigma_{yy}^{k+1} = \sigma_{yy}^k - \left[\frac{\sum_{i=0}^{n_{fb}} |\sigma_{yy,i}^k| |\Delta \mathbf{S}_i| - F}{L} \right]$$

- Voltar ao item 2

a) Se a condição for satisfeita:

- Avança no tempo.

A equação (5.11) é na verdade um critério de convergência da condição de contorno, onde o denominador é um fator de normalização. É importante notar que o numerador nada mais é que a diferença entre a força aplicada na fronteira e a força que foi determinada numericamente. Para esse critério utilizou-se uma tolerância de $\tau_b = 10^{-7}$.

Independentemente do tratamento numérico especial com que é abordada a condição de contorno de força, a solução do problema de Mandel segue o mesmo comportamento observado anteriormente no problema de Terzaghi. Isto é, a compressão da amostra provoca a expulsão do fluido até o ponto em que apenas a estrutura porosa suporta a carga aplicada. Assim, ao final do transiente, quando a pressão exercida pelo fluido se anula em toda a amostra, tem-se um problema puramente estrutural.

Os dados de entrada utilizados para a obtenção da solução numérica do problema de Mandel estão listados na tabela 5.8. Note-se que dos

valores das propriedades físicas para o fluido e a rocha porosa são os mesmos utilizados para o problema de Terzaghi. Logo, os módulos de compressão volumétricas são os mesmos da rocha arenito Berea, apresentados anteriormente na tabela 5.2.

Tabela 5.8 – Dados de entrada para o problema de Mandel.

Dado	Símbolo	Valor	Unid.
Altura da coluna	H	2,0	m
Largura da coluna	L	10,0	m
Força aplicada	F	$1,0 \times 10^4$	N
Compressibilidade do fluido	C_f	$3,030303 \times 10^{-10}$	1/Pa
Viscosidade do fluido	μ	0,001	Pa.s
Compressibilidade do grão sólido	C_s	$2,777777 \times 10^{-11}$	1/Pa
Coefficiente de Biot	α	0,777778	-
Coefficiente de Poisson	ν	0,20	-
Módulo de elast. transversal	G	$6,0 \times 10^9$	Pa
Porosidade	ϕ	0,19	-
Permeabilidade absoluta	\tilde{K}	$1,9 \times 10^{-15}$	m ²

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da mesma forma como foram apresentados os resultados para o problema de Terzaghi original, na seção 5.2, dois grupos de resultados serão mostrados. No primeiro grupo serão apresentados os campos de pressão e deslocamentos e algumas comparações com a solução analítica. Já no segundo grupo, uma análise de convergência das variáveis será exposta.

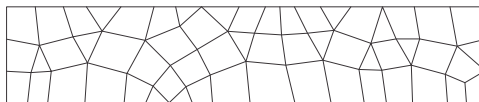
5.4.1 Malhas utilizadas

Com relação à malha computacional, empregou-se um conjunto de quatro malhas híbridas, cujos dados estão listados na tabela 5.9. O procedimento de refino dessas malhas foi o mesmo utilizado para as malhas híbridas empregadas no problema de Terzaghi. Este procedimento está disponível no aplicativo ICEM e divide qualquer elemento, triangular ou quadrangular, em quatro novos elementos, conforme está mostrado na figura 5.3. A primeira malha gerada e que serviu de base para o processo de refinamento é a malha M1, que pode ser visualizada na figura 5.33.

Tabela 5.9 – Conjunto de malhas híbridas utilizado no problema de Mandel.

Malha	Nº de elementos	Nº de nós	h(m)
M1	57	71	0,51069326
M2	228	241	0,27970937
M3	912	881	0,14726641
M4	3648	3361	0,07569566

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.33 – Malha M1 da tabela 5.9.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4.2 Resultados obtidos

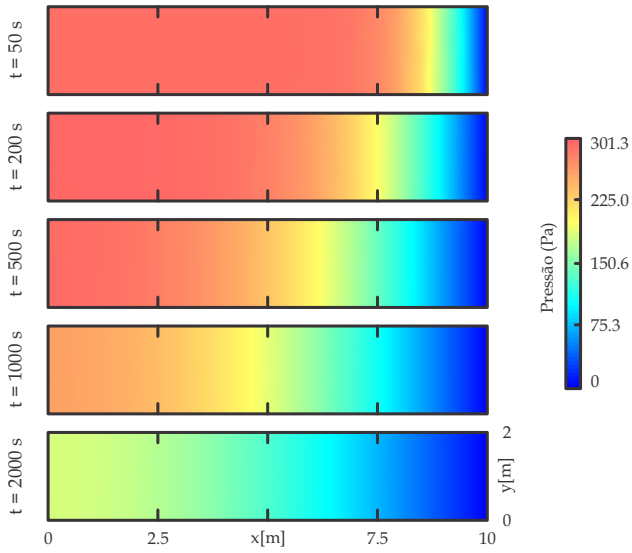
Uma característica interessante do problema de Mandel é a evolução dos campos das variáveis ao longo do tempo. Embora a especificação do problema seja bidimensional, todas as variáveis possuem um comportamento unidimensional. Enquanto as variáveis pressão, deslocamento horizontal e tensão vertical variam na direção x , o deslocamento vertical varia na direção y . Essa característica unidimensional da evolução dos campos está evidenciada nas figuras 5.34, 5.36, 5.38 e 5.40, que apresentam os campos de pressão, tensão vertical efetiva, deslocamento vertical e deslocamento horizontal, respectivamente.

As figuras 5.35, 5.37, 5.39 e 5.41 mostram os perfis de pressão, tensão vertical total, deslocamento vertical e deslocamento horizontal, respectivamente, para diferentes níveis de tempo. Nessas figuras são apresentadas as soluções numérica e analítica¹⁴, para que possam ser comparadas. Como se pode observar, as soluções numéricas apresentam uma ótima concordância com as soluções analíticas.

O efeito de Mandel-Cryer pode ser claramente observado nos perfis expostos na figura 5.35. Note-se que nos instantes iniciais da simulação,

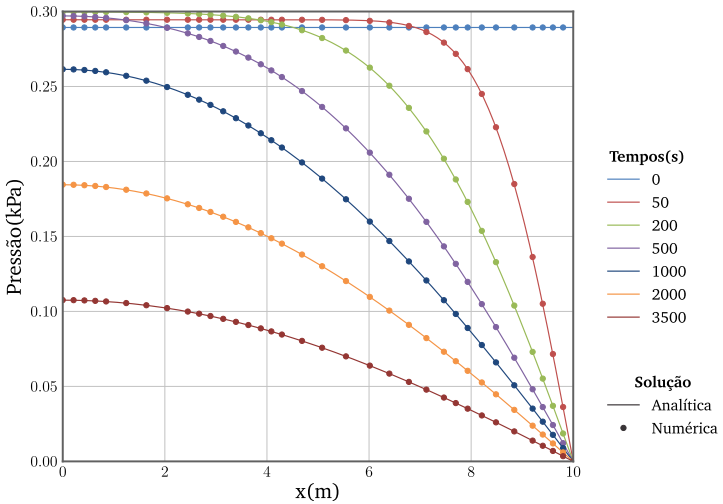
¹⁴As soluções analíticas das variáveis do problema de Mandel são mostradas no apêndice C, seção C.3.

Figura 5.34 – Campos de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1$ s.



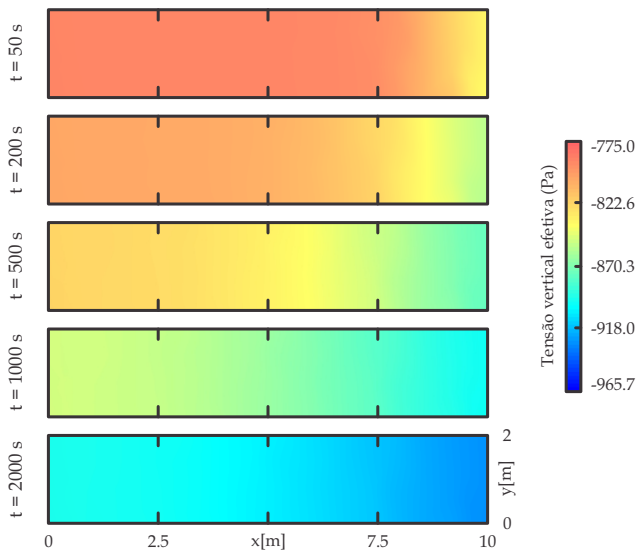
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.35 – Perfis de pressão para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1$ s



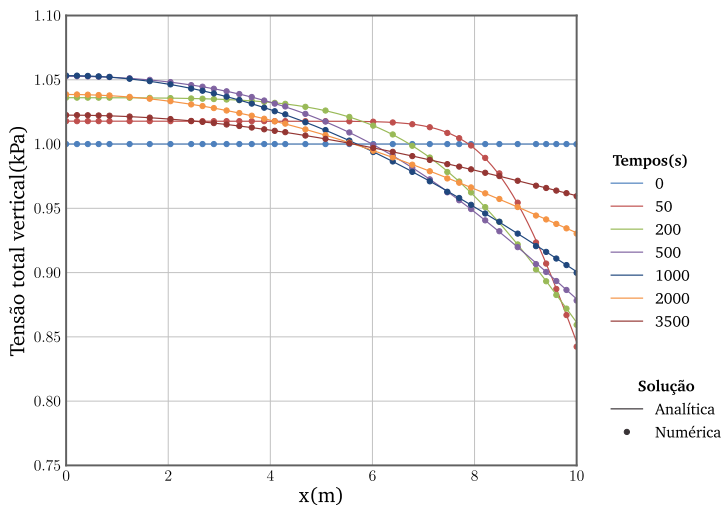
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.36 – Campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1$ s.



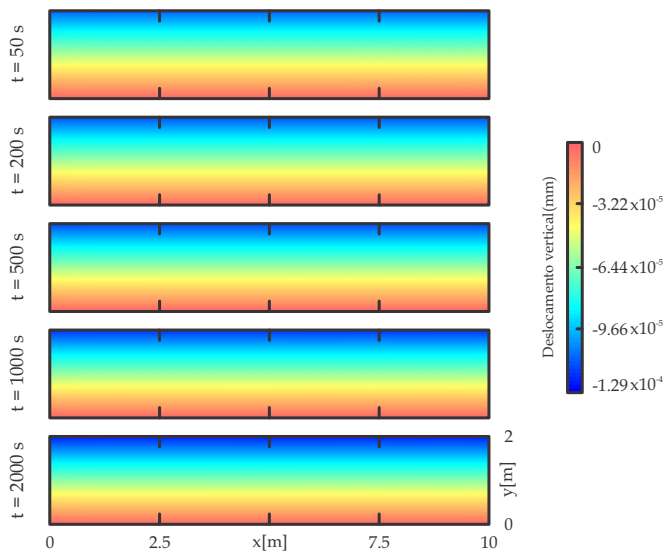
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.37 – Perfis de tensão vertical total para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1$ s



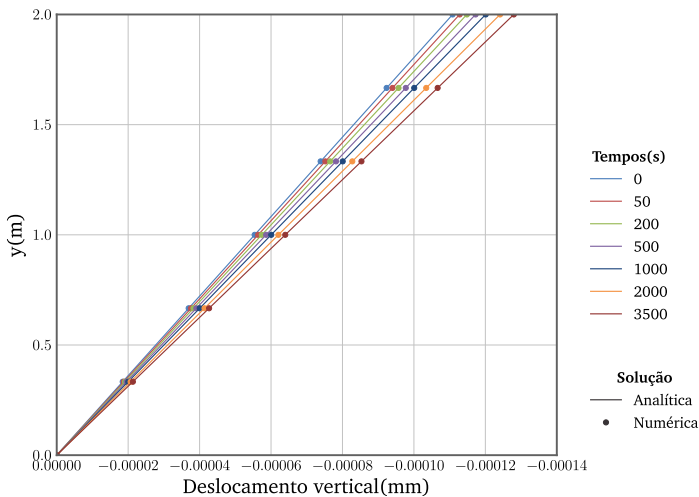
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.38 – Campos de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$.



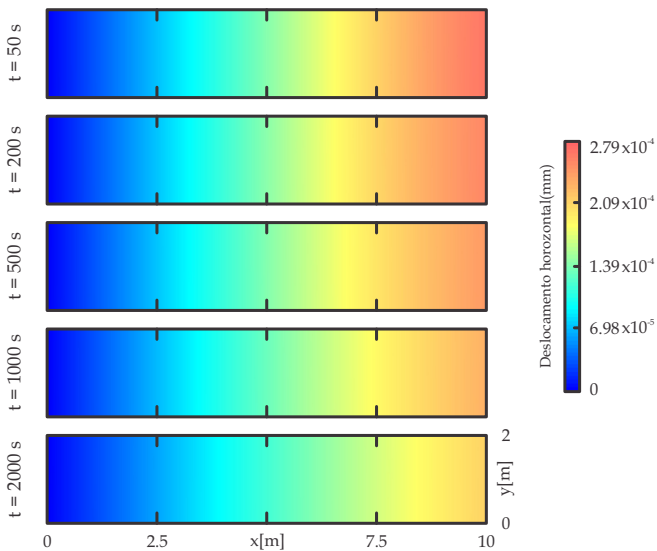
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.39 – Perfis de deslocamento vertical para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$



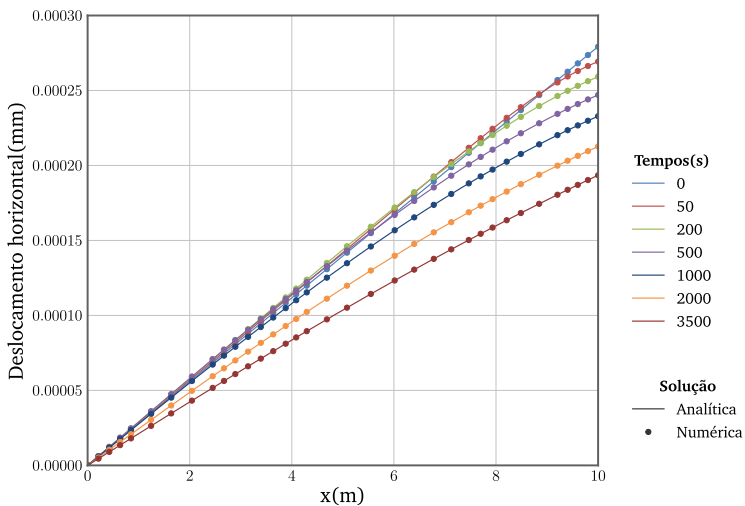
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.40 – Campos de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1$ s.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.41 – Perfis de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1$ s



Fonte: Elaborada pelo autor.

tempos iguais a 50s, 200s e 500s, a pressão próxima da região central da amostra, $x = 0$, é maior que a inicial. Isso mostra que a metodologia foi capaz de captar o comportamento não monotônico da pressão.

Esse efeito também pode ser constatado, de maneira mais evidente, através dos perfis de tensão vertical total, mostrados na figura 5.37. Vale salientar que esse comportamento não é encontrado na tensão vertical efetiva, aquela suportada pela rocha porosa, como pode ser observado nos campos apresentados na figura 5.36. Isso indica que o comportamento não monotônico, efeito de Mandel-Cryer, observado na tensão vertical total está diretamente ligado a pressão de poro.

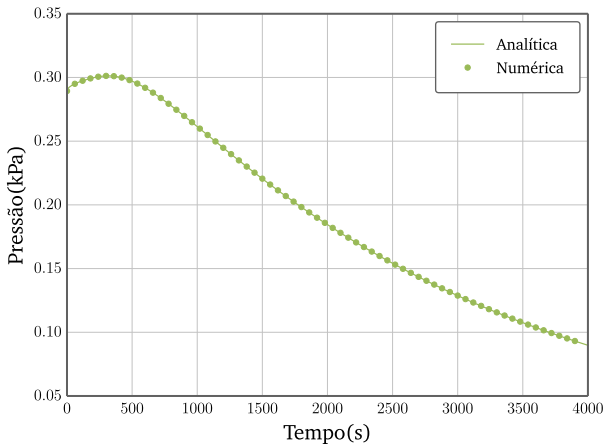
O deslocamento vertical, mostrado nas figuras 5.38 e 5.39, também apresentou o comportamento esperado. Como pode ser observado em ambas as figuras, a restrição de deslocamento constante na fronteira superior do domínio foi respeitada. Percebe-se que a técnica de tratamento da condição de contorno na fronteira superior, apresentada no início desta seção, mostrou-se capaz de satisfazer a restrição, assim como de impor a força prescrita.

Um fato importante a ser observado é o comportamento do deslocamento horizontal na amostra. Percebe-se pelos campos da figura 5.40 e pelos perfis da figura 5.41 que o mesmo diminui na fronteira direita do domínio. Isto é, a amostra se contrai na direção x , mesmo com uma compactação na direção y , ao contrário do que se esperaria a princípio. Esse fenômeno é explicado pela diminuição da pressão de poro à medida que o fluido é drenado da amostra. Logo, a pressão que ajudava a manter a rocha estendida na direção x , na condição de equilíbrio inicial, não está mais presente, contribuindo para sua contração.

Todos os aspectos do comportamento das variáveis comentados até aqui também podem ser observados em gráficos de variação temporal. Para construir esses gráficos, escolheu-se os locais em que cada variável adquire o maior valor.

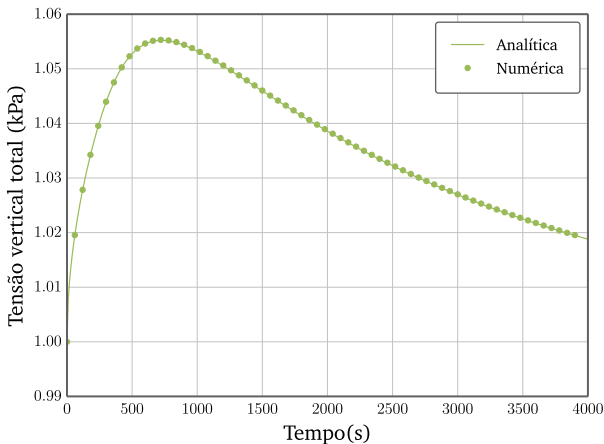
Assim, nas figuras 5.42 e 5.43 são mostradas a variação da pressão de poro e da tensão vertical total, respectivamente, na fronteira esquerda do domínio. É interessante observar que o comportamento não monotônico é bastante evidente nesses gráficos. Outro aspecto que pode ser observado é que os valores máximos são alcançados em diferentes tempos, enquanto na pressão ocorre em $t \approx 300s$ na tensão vertical total ocorre em $t \approx 700s$.

Figura 5.42 – Variação no tempo da pressão na fronteira esquerda. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.43 – Variação no tempo da tensão vertical total na fronteira esquerda. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$.

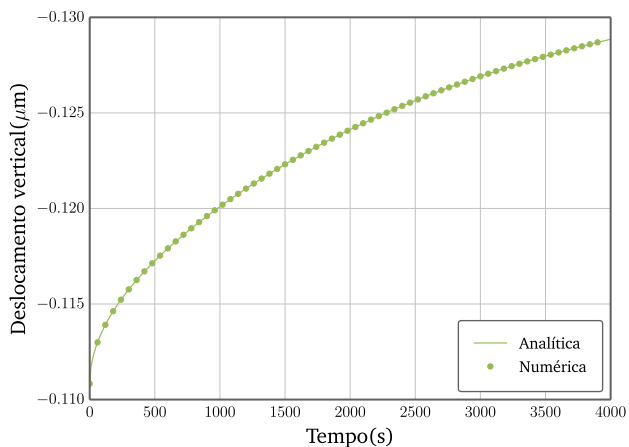


Fonte: Elaborada pelo autor.

Já as figuras 5.44 e 5.45 mostram o gráfico do deslocamento vertical na fronteira superior e o deslocamento horizontal na fronteira direita, respectivamente. Mais uma vez, observa-se a contração da amostra na

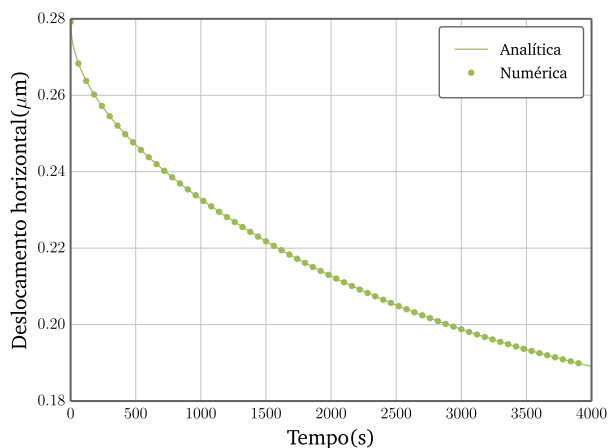
direção x , acompanhando a redução da pressão do fluido no gráfico da figura 5.45.

Figura 5.44 – Variação no tempo do deslocamento vertical no topo do domínio. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.45 – Variação no tempo do deslocamento horizontal na fronteira direita. Resultados obtidos com a malha M2 e $\Delta t = 1s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante salientar que, nos últimos quatro gráficos apresentados, em que há a comparação das soluções numérica e analítica ao longo do tempo, os valores numéricos estão em um intervalo maior que o passo de tempo utilizado, diminuindo a quantidade de pontos da solução numérica nos gráficos. Optou-se por essa diminuição na quantidade de pontos nos gráficos para que fosse possível uma melhor visualização e interpretação dos dados.

Até este momento foram apresentados diversos gráficos comparando de forma exaustiva as soluções numérica e analítica. Em todos esses gráficos, as soluções apresentaram ótima concordância. Independentemente da posição no domínio e do instante de tempo que são plotados os gráficos, a conclusão é sempre a mesma, uma excelente qualidade da solução numérica. Novamente, os resultados comprovam a correta implementação do código e a coerência no comportamento das variáveis, tendo vista que o comportamento físico do problema foi sempre respeitado, mesmo quando é contra-intuitivo, como no caso do deslocamento horizontal. Entretanto, todas essas análises são até certo ponto qualitativas, pois até agora nenhum tipo de erro foi computado para as variáveis desse problema. Assim, na sequência dessa seção, a análise de convergência dos erros é apresentada.

5.4.3 Análise de convergência

A análise de convergência do erro é a etapa final de avaliação da solução numérica obtida para o problema de Mandel. Nessa análise, utilizou-se o conjunto de malhas listado na tabela 5.9, para verificação da convergência espacial, e um conjunto de quatro passos de tempo (0, 1s; 0,25s; 0,5s; 1s), para verificação da convergência temporal. O estudo da convergência do erro foi efetuado para as quatro variáveis do problema que possuem soluções analíticas. Todos os gráficos de convergência apresentados nessa seção são associados à solução no nível de tempo $t = 50s$.

A figura 5.46 mostra os gráficos de convergência espacial do erro na pressão. Como se pode observar, nos diferentes passos de tempo empregados ocorre o efeito de horizontalização, já evidenciado no problema de Terzaghi. Entretanto, esse efeito é reduzido com o refino no passo tempo, comportamento também observado no problema de Terzaghi. Já na figura 5.47 são mostradas as curvas de convergência temporal, que

também apresentam o mesmo efeito de horizontalização. Note-se nessa figura que, agora, é o refino de malha que reduz esse efeito.

É importante observar que o efeito de horizontalização nas curvas da figura 5.46 é precedido por um pequeno aumento no erro. Esse comportamento é o mesmo discutido no problema de Terzaghi, em que é mostrado que a solução numérica está convergindo para um valor maior que o da solução analítica, de modo que essas soluções se cruzem em um nível de refino da malha, gerando esse pequeno aumento do erro da solução.

Conforme discutido na apresentação dos resultados para o problema de Terzaghi, esse comportamento é eliminado com os refinamentos espacial e no passo de tempo. Por fim, percebe-se que as ordens de convergência espacial e temporal encontradas são concordantes com o esperado, sendo segunda ordem para a aproximação espacial e primeira ordem para a aproximação temporal.

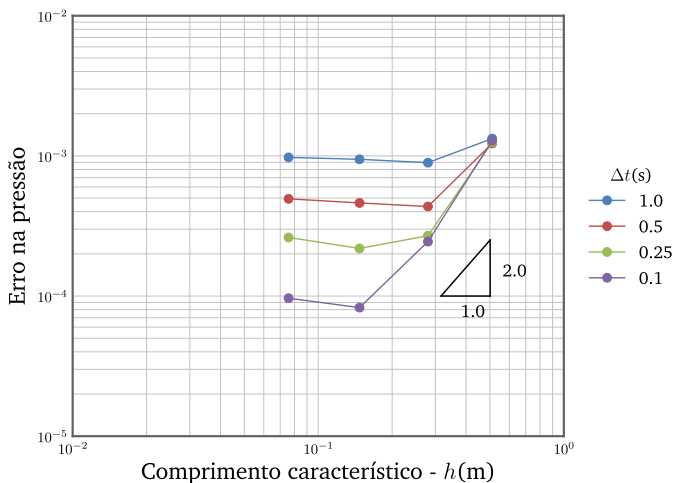
As figuras 5.48 e 5.49 mostram os gráficos de convergência espacial e temporal, respectivamente, para o erro na tensão vertical total. Ao observar o gráfico de convergência espacial, um fato bastante evidente é a ordem de convergência do erro dessa variável ser próximo a dois. Ora, se a tensão total é dependente das derivadas dos deslocamentos e da pressão, ela deveria ter a mesma ordem de convergência que as derivadas dos deslocamentos combinada com a da pressão¹⁵. Entretanto, não é o que acontece, pois a ordem de convergência espacial da tensão vertical total permanece a mesma associada aos erros dos deslocamentos e da pressão.

Para um entendimento desse fato inesperado, deve-se fazer primeiramente uma análise física da condição de contorno de força no topo do domínio. Nota-se pela restrição da tensão vertical total, equação (5.9), que a mesma varia apenas na direção x , o que já foi mostrado na descrição do problema. Essa restrição combinada com a condição de placa rígida, que estabelece deslocamento vertical constante ao longo da fronteira superior, faz com que o mesmo comportamento da tensão vertical total encontrado na fronteira seja instaurado no domínio inteiro.

Logo, qualquer tipo de aproximação que seja considerada nessa restrição estabelecerá o comportamento do erro no domínio completo de

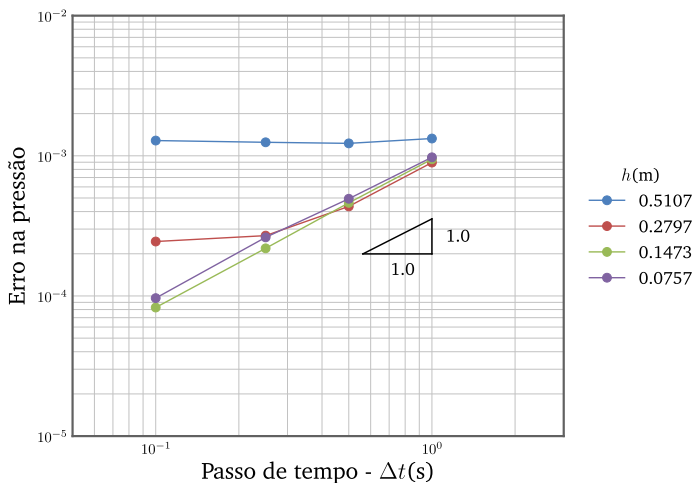
¹⁵Em uma ordem de aproximação combinada com duas ou mais variáveis prevalece sempre a de menor ordem. Neste caso deve prevalecer a ordem de convergência das derivadas dos deslocamentos que é igual a um e possui o maior erro associado.

Figura 5.46 – Convergência espacial da pressão. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



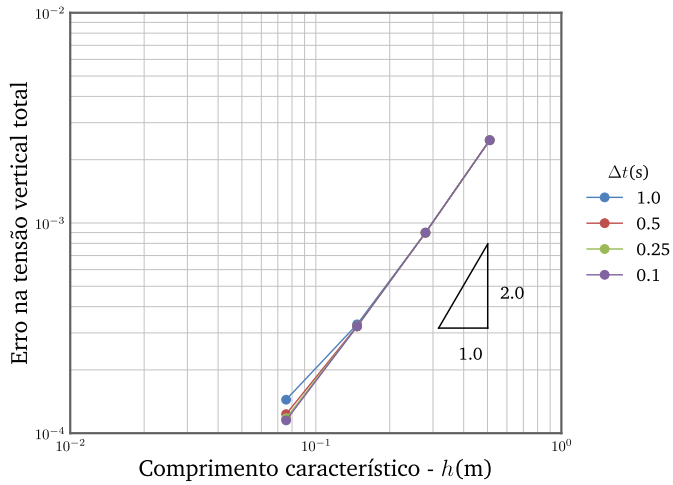
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.47 – Convergência temporal da pressão. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



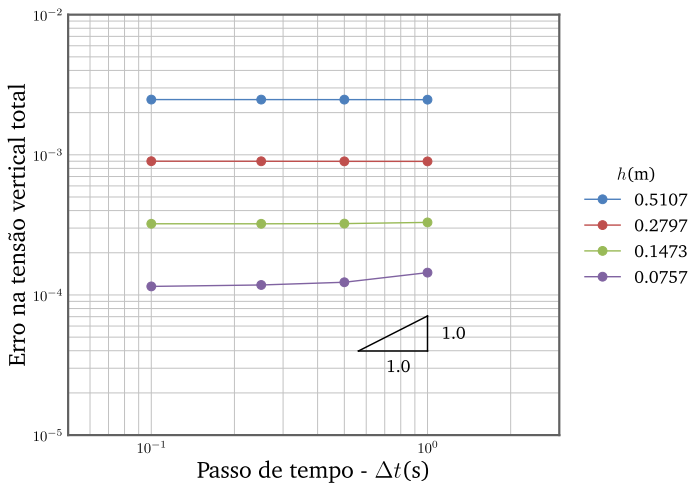
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.48 – Convergência espacial da tensão vertical total. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.49 – Convergência temporal da tensão vertical total. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.

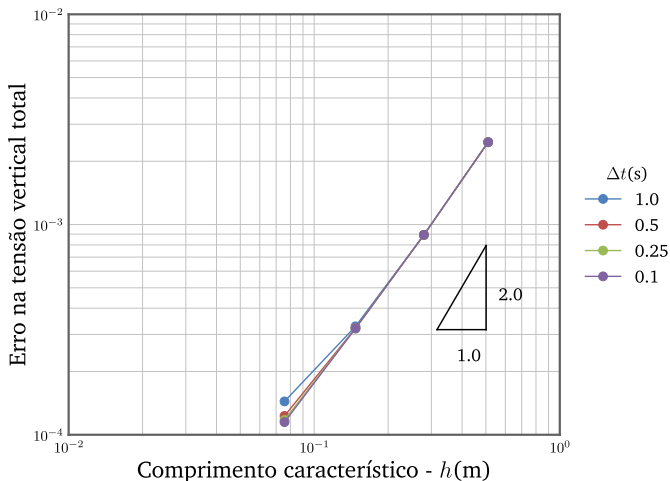


Fonte: Elaborada pelo autor.

solução, independentemente do tipo de aproximação que seja considerada em seu interior. Isso porque, embora obtenha-se uma solução dessa variável no interior do domínio, o seu comportamento é estabelecido pela condição considerada na fronteira superior.

Desta forma, a ordem de convergência do erro encontrada para a tensão vertical total deve estar relacionada à restrição na tensão sobre superfície superior do domínio. Essa relação é bastante provável, já que o mesmo comportamento é observado na ordem de convergência para o erro dessa variável quando o MEF é empregado na obtenção da solução numérica. Isso pode ser observado na figura 5.50, que mostra o gráfico de convergência do erro para a tensão vertical total quando utiliza-se o MEF na discretização espacial do modelo geomecânico.

Figura 5.50 – Convergência espacial da tensão vertical total para o MEF. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, o erro associado à aproximação temporal da tensão vertical total, mostrado na figura 5.49, não apresenta nenhuma redução. Esse comportamento é explicado pelo fato da restrição na tensão, discutida anteriormente, ser independente do tempo. Dessa forma, o único erro de aproximação associado a essa variável é o da discretização espacial. Como pode ser observado nessa figura, o erro só é reduzido quando há

um refino na malha espacial. Isso pode ser visto pelas linhas horizontais que mostram que o refino no passo de tempo não reduz o erro.

Já as convergências espacial e temporal do erro no deslocamento vertical, mostradas nos gráficos das figuras 5.51 e 5.52, apresentaram resultados esperados. Ou seja, ordem de convergência próximo a dois no refino espacial e próximo a um no refino temporal. Novamente, percebe-se a ocorrência do efeito de horizontalização, que é eliminado com os refinamentos de malha e de passo de tempo. É importante ressaltar que, o aumento do erro que precede a horizontalização ocorre pelo mesmo motivo explicado no erro da pressão. No entanto, mais uma vez, o refino na malha espacial e o refino no passo de tempo tendem a eliminar esse problema.

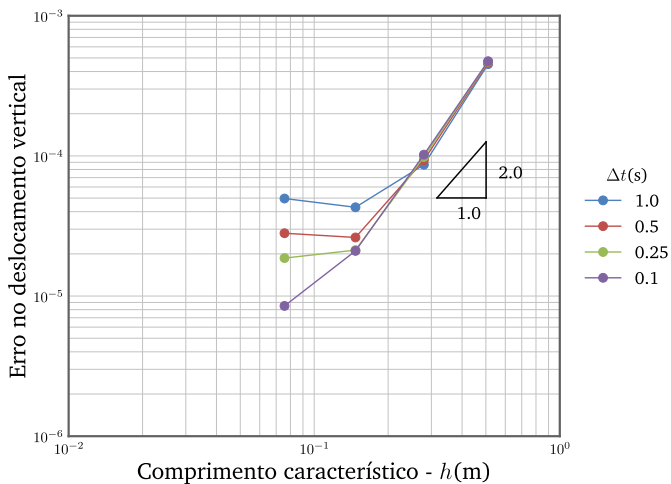
As curvas de convergência do erro na solução obtida pelo EbFVM mostrou-se novamente concordante com a solução obtida pelo MEF, como pode ser observado na figura 5.53. Nessa figura estão os gráficos de convergência espacial para o erro na solução obtida pelo MEF. Embora os gráficos dos métodos tenham algumas diferenças entre si, elas são visualmente imperceptíveis. Como se pode observar, o efeito de horizontalização também é encontrado nas curvas de convergência associadas ao MEF.

Nas curvas de convergência espacial do erro no deslocamento vertical para ambos os métodos, figuras 5.51 e 5.53, aquelas associadas aos passos de tempo de 0.25s e 0.1s não apresentam o aumento do erro que precede a horizontalização da curva. Isso evidencia novamente que o refino temporal faz com que esse problema seja extinguido.

Por último, a convergência do erro do deslocamento horizontal apresentou o melhor comportamento, dentre as variáveis primárias do problema (pressão, deslocamento vertical e deslocamento horizontal). Como pode ser visualizado nas figuras 5.54 e 5.55, tanto na convergência espacial quanto temporal, o comportamento do erro foi conforme o esperado. Isso porque o pequeno aumento do erro que precede o efeito de horizontalização das curvas não foi encontrado na convergência espacial do erro no deslocamento horizontal. Entretanto, esse problema só foi observado na curva de convergência temporal do erro associado a malha mais grosseira, malha M1 da tabela 5.9, cujo comprimento característico é igual a 0,5107m.

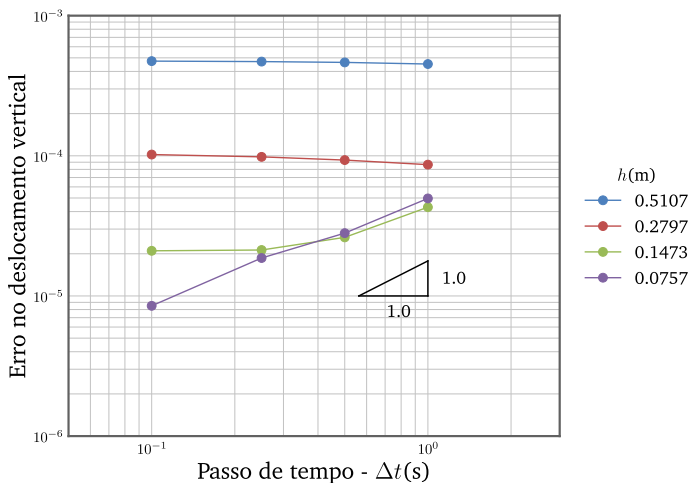
Comparando com o método de referência, MEF, mais uma vez, a convergência do erro se manteve com o mesmo comportamento, como pode-

Figura 5.51 – Convergência espacial do deslocamento vertical. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



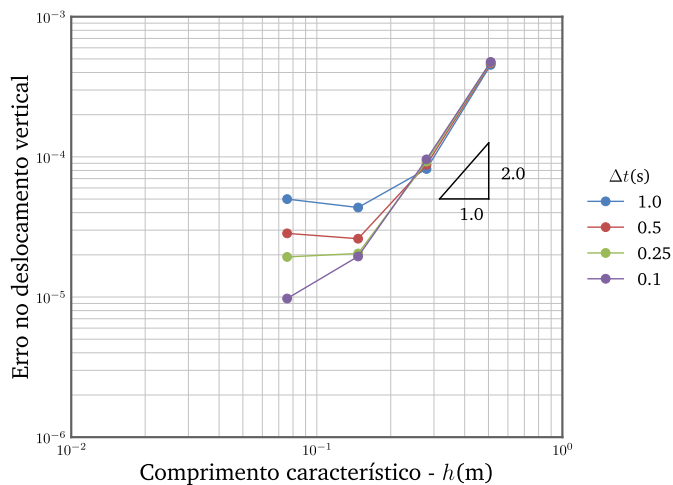
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.52 – Convergência temporal do deslocamento vertical. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



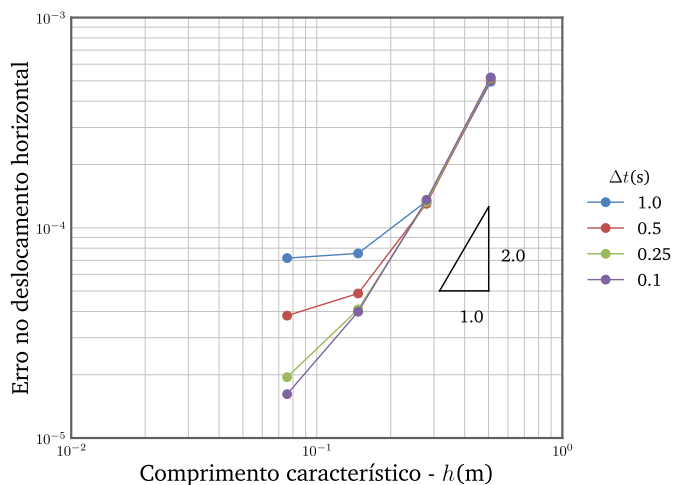
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.53 – Convergência espacial do deslocamento vertical para o MEF. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



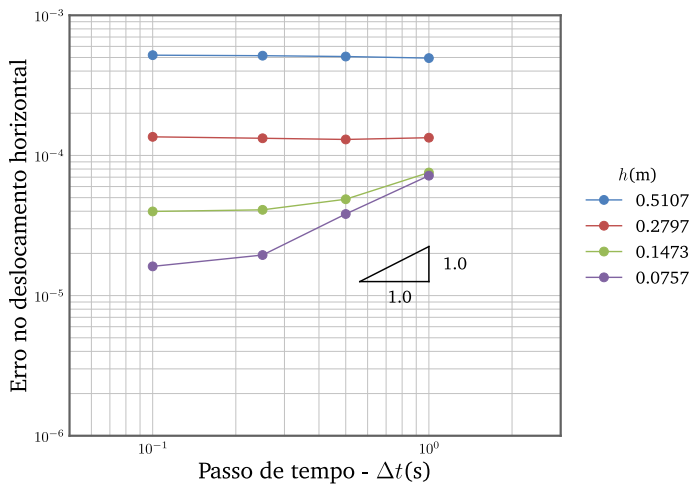
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.54 – Convergência espacial do deslocamento horizontal. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



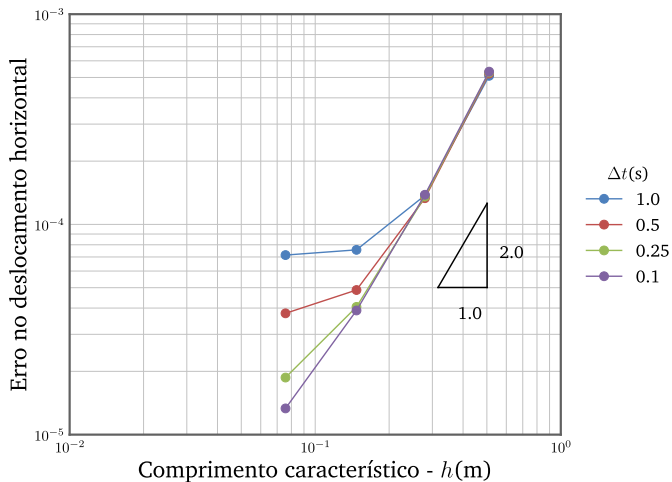
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.55 – Convergência temporal do deslocamento horizontal. Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.56 – Convergência espacial do deslocamento horizontal para o MEF Problema de Mandel. Tempo $t = 50s$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

se perceber na figura 5.56. Observe que, as curvas de convergência espacial entre os métodos tem uma concordância muito boa.

Finalmente, um ponto importante a ser constatado, através de todos os gráficos de convergência para o problema de Mandel, é que o erro associado a qualquer variável do problema é sempre menor que 1%, mesmo quando utilizou-se a combinação do passo de tempo mais grosseiro com a malha mais grosseira do conjunto empregado.

Com a análise de convergência dos erros para o problema de Mandel, encerra-se a fase de validação da metodologia apresentada no presente trabalho. Assim como na análise do problema de Terzaghi, percebeu-se que a metodologia utilizando o EbFVM deu ótimos resultados. Além disso, teve uma ótima concordância com a solução analítica do problema e o comportamento do erro foi bastante similar ao MEF, na solução do modelo geomecânico.

É importante deixar claro nesse momento que em todos os gráficos de convergência seria necessária a exposição de apenas uma curva de convergência, aquela associada ao maior refino temporal e espacial. Entretanto, esse tipo de análise, onde são mostradas várias curvas de convergência, é comumente encontrada nos trabalhos relacionados à solução acoplada do escoamento e geomecânica. Assim, por completeza, optou-se em apresentar todas as curvas de convergência relacionadas aos diferentes níveis de refino temporal e espacial.

5.5 Aplicação na simulação de reservatórios de petróleo

Nesta seção exemplos de aplicação na simulação de reservatórios de petróleo serão resolvidos. Esses exemplos permitirão vislumbrar o potencial do método proposto na solução acoplada do escoamento do reservatório junto com um modelo geomecânico. Essa solução acoplada é bastante promissora na área de petróleo e gás devido ao crescente interesse da inclusão de um modelo geomecânico nessas simulações, visando realizar previsões de produção mais acuradas.

Após uma avaliação exaustiva da metodologia apresentada, através da comparação com diferentes soluções analíticas, dois problemas realísticos serão resolvidos. O primeiro deles é composto por um reservatório

de geometria retangular. Já o segundo, embora o domínio de cálculo seja similar ao primeiro, possui um reservatório com geometria irregular. Esse último problema tem o objetivo de mostrar a versatilidade do uso das malhas não estruturadas.

Em ambos os problemas, os domínios de cálculo são compostos por uma região mais ampla ao redor dos reservatórios. Essa região representa as rochas vizinhas ao reservatório que não têm a capacidade de armazenamento. Assim, o modelo geomecânico é resolvido no domínio completo. Embora o escoamento também seja solucionado no domínio completo, na região das rochas adjacentes é atribuído um valor de permeabilidade absoluta igual a zero. Assim, apenas no reservatório há uma permeabilidade não nula, pois é onde de fato ocorre o escoamento. Vale salientar que, em ambos os problemas o domínio de cálculo é retangular, sendo apenas a geometria dos reservatórios diferentes entre si.

Esse tipo de problema é interessante, pois, como se sabe, não só o reservatório se deforma depois que um gradiente de pressão é estabelecido no mesmo. O desequilíbrio de forças, gerado por esse gradiente de pressão, acaba por mudar o estado de tensões da rocha reservatório e, conseqüentemente, das rochas adjacentes. O conhecimento do comportamento nesse domínio mais amplo é importante para determinar a velocidade de extração do petróleo, que se for muito acelerada pode causar o colapso do reservatório e os poços nele instalados, ou ainda, ativar falhas geológicas.

Nos problemas apresentados na sequência, considerou-se que a rocha reservatório e as rochas adjacentes possuem as mesmas propriedades mecânicas e poroelásticas, com exceção da permeabilidade que é considerada nula nas rochas adjacentes. Uma carga σ_0 é aplicada no topo do domínio e dois poços com pressão prescrita estão instalados nas extremidades dos reservatórios, sendo um injetor com pressão elevada e outro produtor com pressão nula. Todos os dados e propriedades utilizados nos dois problemas estão listados na tabela 5.10, incluindo o tempo de simulação e o passo de tempo empregados nas simulações.

É importante lembrar que esses problemas são hipotéticos, sendo uma representação bidimensional simplificada do plano vertical de um reservatório. Entretanto, os mesmos podem auxiliar no entendimento do comportamento qualitativo das variáveis durante um processo de produção de petróleo. Além disso, com a presença de poços, pode-se observar

Tabela 5.10 – Dados de entrada e propriedades para o problema com reservatório retangular.

Dado	Símbolo	Valor	Unid.
Tempo final de simulação	t_f	1000	dias
Passo de tempo	Δt	0,25	dias
Carga aplicada	σ_0	$1,0 \times 10^8$	Pa
Pressão no poço injetor	P_I	$6,0 \times 10^7$	Pa
Pressão no poço produtor	P_P	0,0	Pa
Compressibilidade do fluido	C_f	$3,0303 \times 10^{-10}$	1/Pa
Viscosidade do fluido	μ	0,001	Pa.s
Compressibilidade do grão sólido	C_s	$2,65 \times 10^{-11}$	1/Pa
Coefficiente de Biot	α	0,79	-
Coefficiente de Poisson	ν	0,20	-
Módulo de elast. transversal	G	$6,0 \times 10^9$	Pa
Porosidade	ϕ	0,19	-
Permeabilidade absoluta	\tilde{K}	2,0	mD

Fonte: Elaborada pelo autor.

o comportamento das rochas em suas proximidades, onde estão localizados os maiores gradientes.

Conforme comentado anteriormente, esses problemas são hipotéticos e extremamente simplificados. Desta forma, nenhum tipo de consideração da condição inicial *in-situ* das rochas adjacentes e da rocha reservatório foram feitas. Além disso, as propriedades da rocha reservatório são as mesmas empregadas nas rochas adjacentes.

5.5.1 Caso A: Reservatório com domínio retangular

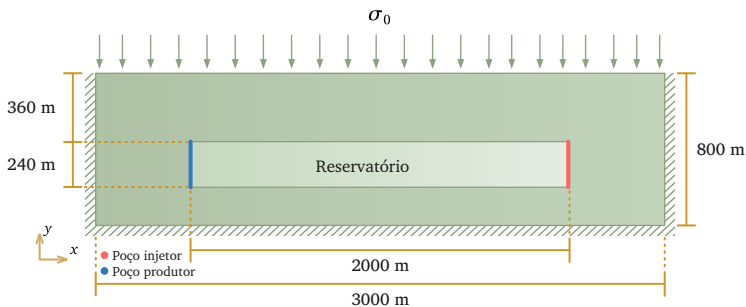
O domínio de cálculo desse caso, com um reservatório de geometria retangular, está apresentado no diagrama da figura 5.57. Conforme comentado anteriormente, dois poços estão instalados nas extremidades do reservatório, sendo o injetor na lateral direita e o produtor na lateral esquerda, como pode ser observado na figura 5.57.

O domínio de cálculo completo tem dimensões de 3000m na horizontal e 800m na vertical, sendo que o reservatório, situado em seu interior, tem dimensões de 2000m por 240m. As condições de contorno para

o problema geomecânico são de tensão normal σ_0 na fronteira superior, deslocamento vertical nulo na fronteira inferior e deslocamento horizontal nulo nas fronteiras laterais. Além disso, a condição de deslizamento, tensão de cisalhamento igual a zero, é aplicada em todas as fronteiras.

Já as condições de contorno para o reservatório são de pressão prescrita nos poços, situados nas laterais, e fluxo nulo nas fronteiras superior e inferior. É importante salientar que o reservatório não está fixo no interior do domínio, isto é, não há condições de deslocamento nulo no reservatório, podendo mudar a posição de suas fronteiras durante a simulação.

Figura 5.57 – Diagrama esquemático do domínio de solução do problema com reservatório retangular.

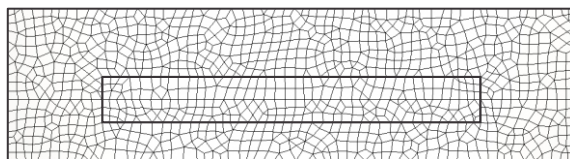


Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a solução numérica desse problema empregou-se a malha híbrida mostrada na figura 5.58. Algumas características dessa malha encontram-se na tabela 5.11. Na figura 5.58 pode-se visualizar a divisão do domínio em duas regiões, sendo a mais interna a que corresponde ao reservatório. Observa-se também nessa imagem uma linha horizontal que divide o domínio. Essa linha, localizada na posição $y = 320\text{m}$, servirá de suporte para a visualização de perfis de deslocamentos, tensões e pressão no reservatório ao longo da direção x .

O procedimento de solução do problema segue as mesmas etapas do algoritmo exposto na seção 4.6. Isto é, obtém-se uma solução de equilíbrio inicial entre as tensões efetivas, a pressão e a tensão total imposta no contorno superior. Nessa etapa, condições de fluxo nulo são impostas em todas as fronteiras. Após a obtenção da condição de equilíbrio, impõem-se as pressões nos poços injetor e produtor, iniciando a simulação transi-

Figura 5.58 – Malha empregada na solução do problema com reservatório retangular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5.11 – Dados da malha híbrida empregada na solução do problema com reservatório retangular.

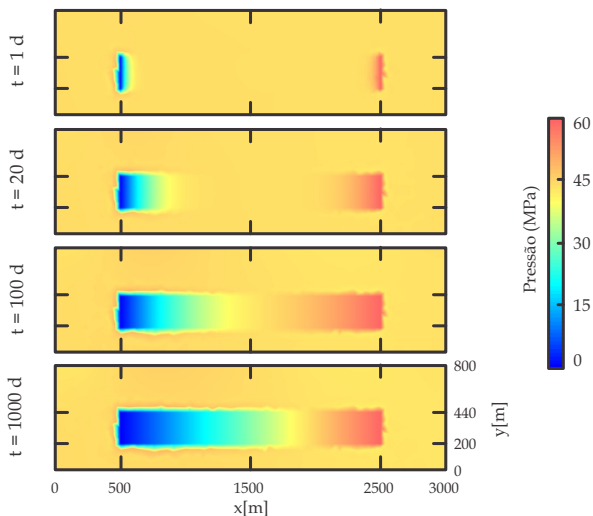
Nº de nós	1135
Nº de elementos	1176
Nº de elem. triang.	244
Nº de elem. quadrang.	932

Fonte: Elaborada pelo autor.

ente. É importante salientar que, nessa condição inicial, as distribuições de tensão efetiva e de pressão são uniformes no domínio inteiro.

A figura 5.59 mostra os campos de pressão no domínio completo de solução para diferentes tempos. Observa-se que o gradiente de pressão é não nulo apenas na região do reservatório, enquanto o restante do domínio mantém-se com a pressão inicial de equilíbrio. As condições de contorno juntamente com a geometria no reservatório estabelecem um comportamento linear da pressão ao longo da direção coordenada x . Esse comportamento é estabelecido no regime permanente do problema, pois ao longo do transiente a informação das condições nos poços propaga-se gradualmente para o interior do reservatório. De fato, essa variação linear da pressão se estabelece, como pode ser observado na figura 5.60. Nessa figura são mostrados perfis de pressão na linha posicionada em $y = 320$ m para diferentes níveis de tempo. Note-se que, no tempo $t = 1000$ dias o perfil linear da pressão já está estabelecido.

Nos campos de pressão apresentados na figura 5.59, pode-se observar que os contornos do reservatório apresentam uma certa irregularidade, mesmo com a malha representando perfeitamente os limites dessa região. Essa irregularidade se deve apenas à forma como é plotado o campo no software de visualização, que é feita uma interpolação dos va-

Figura 5.59 – Campos de pressão para diferentes tempos. Caso A.

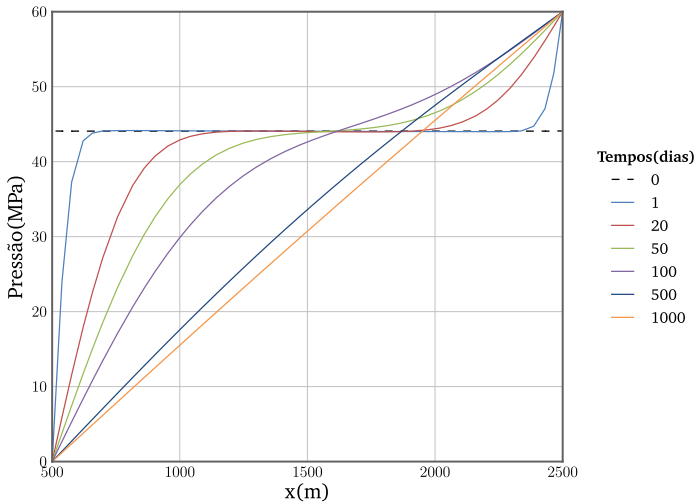
Fonte: Elaborada pelo autor.

lores nodais no interior dos elementos. Dessa forma, nos elementos adjacentes ao contorno do reservatório, que possuem nós que fazem parte das duas regiões do domínio, é gerado um gradiente fictício devido à diferença de valores de pressão entre o reservatório e região das rochas adjacentes.

Na figura 5.61 pode-se visualizar o comportamento da tensão vertical total ao longo do regime transiente. Nessa figura, os perfis mostrados estão associados à linha horizontal posicionada em $y = 320\text{m}$, abrangendo o domínio de solução completo. Observe-se que no interior do reservatório a tensão vertical total, σ_{yy} , acompanha a tendência apresentada pela pressão, ou seja, onde a pressão é mínima, no poço produtor, o valor da tensão total também é mais baixo. De forma contrária, no poço injetor, onde está a máxima pressão, a tensão total vertical apresenta o maior valor no reservatório.

No entanto, o comportamento da tensão vertical total nas rochas adjacentes ao reservatório é diferente. Pode-se observar, ainda na figura 5.61, que na parte externa ao reservatório e próxima ao poço produtor há um aumento da tensão vertical total, comportamento contrário ao encontrado na parte interna do reservatório. Esse aumento ocorre devido ao

Figura 5.60 – Perfil de pressão na linha posicionada em $y = 320\text{m}$ para diferentes tempos. Caso A.



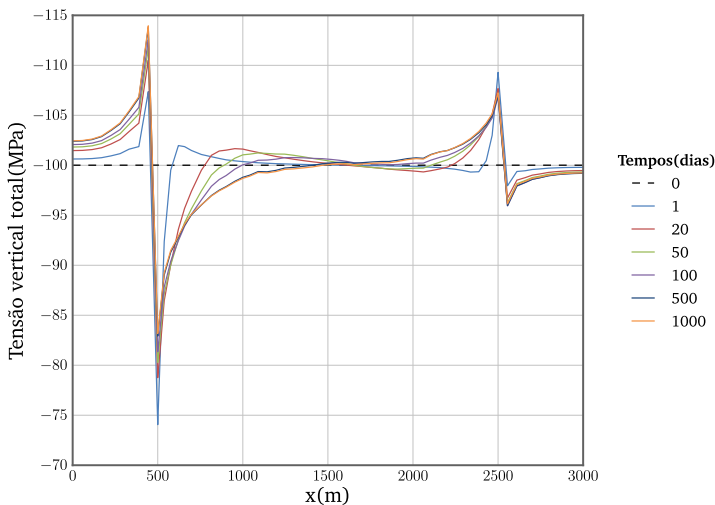
Fonte: Elaborada pelo autor.

aumento na tensão vertical efetiva nessa região, como pode ser observado pelos perfis ao longo da direção x mostrados na figura 5.62. Obviamente, sendo a pressão constante nas rochas adjacentes, apenas o acréscimo de tensão efetiva poderia aumentar a tensão total.

A tensão vertical efetiva aumenta significativamente nas redondezas do poço produtor, pois com o decréscimo da pressão no poço a matriz porosa passa a suportar uma parcela maior da carga imposta. Além disso, esse aumento na tensão vertical efetiva ocorre também nas rochas adjacentes, elevando a tensão vertical total na parte externa ao reservatório e próxima ao poço produtor. O raciocínio inverso pode ser feito para o comportamento da tensão vertical total nas rochas adjacentes ao poço injetor e fora do reservatório. A diferença é que no poço injetor há um aumento da pressão no reservatório, fazendo com que a tensão vertical efetiva diminua nessa região.

A figura 5.63 mostra os campos de tensão vertical efetiva no domínio de solução completo. Observa-se que as regiões com variações significativas nessa tensão estão localizadas próximas aos poços. Esse comportamento evidencia o princípio das tensões efetivas de Terzaghi. Como

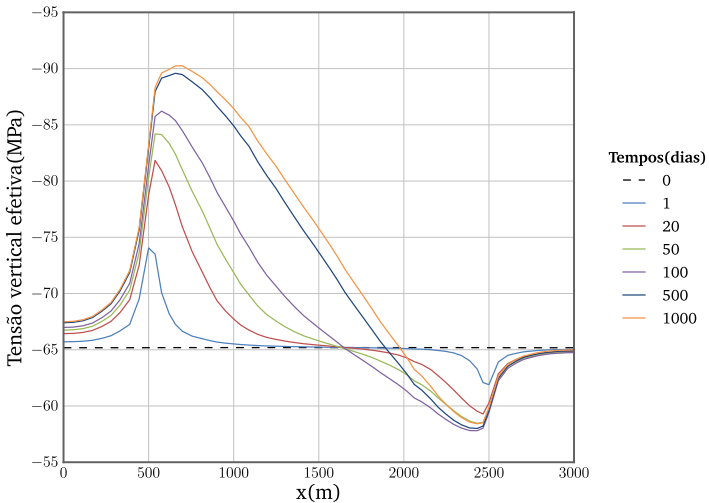
Figura 5.61 – Perfil de tensão vertical total na linha posicionada em $y = 320\text{m}$ para diferentes tempos. Caso A.



pode-se observar nas figuras 5.62 e 5.63, os valores de tensão efetiva aumentam ou diminuem conforme a pressão no fluido ajuda ou não a suportar a carga imposta na superfície superior do domínio. Isto é, com a diminuição da pressão, a rocha passa a suportar mais a carga, por essa razão aumenta o valor da tensão vertical efetiva. Por outro lado, quando há um aumento da pressão, a rocha suporta uma parcela menor da carga imposta, diminuindo o valor da tensão.

Outro ponto bastante importante, quando se considera o efeito geomecânico na simulação de reservatórios, é o quanto o reservatório e as rochas adjacentes se deformam durante o processo de produção do petróleo. Na figura 5.64 são mostrados os perfis de deslocamento vertical na fronteira superior do domínio. Houve uma deformação inicial de 3,26m, resultado da condição de equilíbrio inicial. A partir dessa condição inicial, representada por uma linha tracejada no gráfico, o deslocamento na posição acima do poço produtor ficou cada vez maior. Já na posição acima do poço injetor o valor da deformação diminuiu, ficando acima da posição de equilíbrio. Essa informação é bastante importante, pois dependendo do quão próximo da superfície está um determinado reser-

Figura 5.62 – Perfil de tensão vertical efetiva na linha posicionada em $y = 320\text{m}$ para diferentes tempos. Caso A.



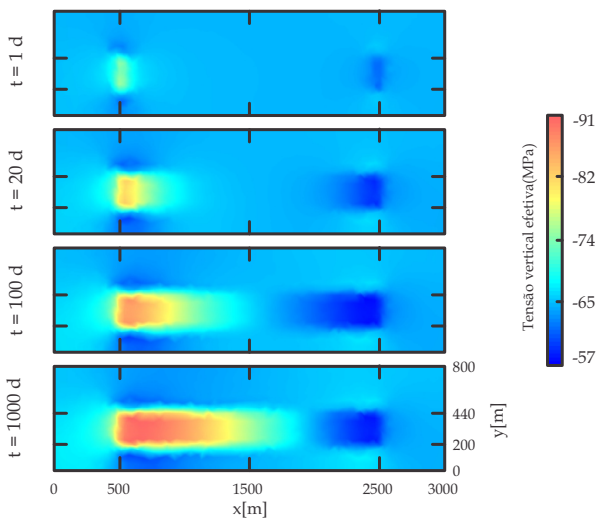
Fonte: Elaborada pelo autor.

vatório, a etapa de produção pode afetar consideravelmente a topografia do terreno logo acima do reservatório.

Já o deslocamento horizontal apresenta uma ordem de grandeza a menos que o deslocamento vertical, como pode ser observado pelos campos apresentados na figura 5.65 e pelos perfis ao longo na linha posicionada em $y = 320\text{m}$ mostrados na figura 5.66. Observe-se que valores de magnitude maior estão na região central do reservatório. É importante notar que o deslocamento horizontal próximo ao poço injetor é tal que a rocha se afasta do poço, enquanto o deslocamento horizontal no poço produtor age de forma que a rocha comprima o poço, como era de se esperar.

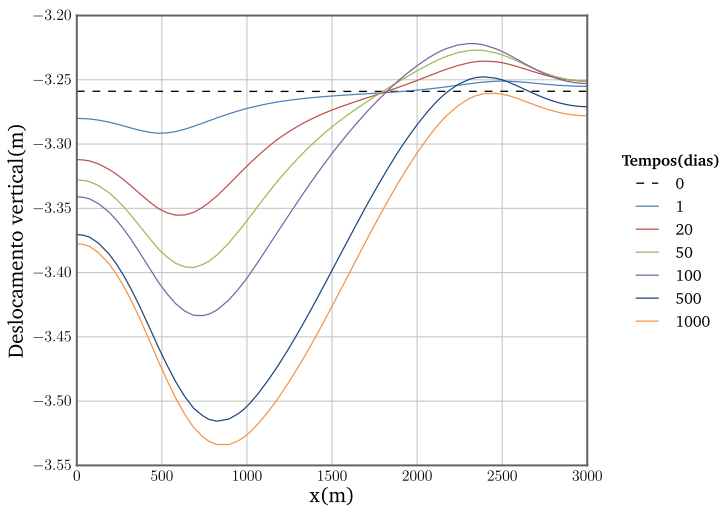
Um dos parâmetros de acoplamento considerados no modelo de simulação acoplada do escoamento e geomecânica é a porosidade. Essa propriedade varia em função da pressão do fluido e da deformação volumétrica da rocha. Dependendo dos valores combinados dessas variáveis, a porosidade pode aumentar ou diminuir, e essa variação pode ser tanto espacial quanto temporal. Na figura 5.67 são mostrados campos de porosidade em diferentes tempos. Como pode-se observar, as variações

Figura 5.63 – Campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Caso A.



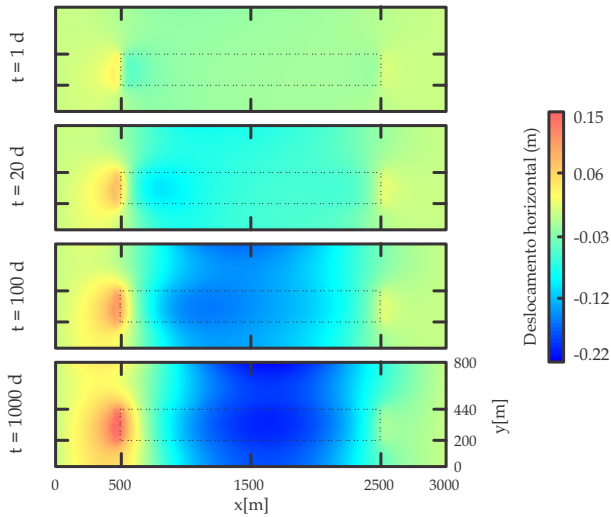
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.64 – Perfil de deslocamento vertical no topo do domínio para diferentes tempos. Caso A.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.65 – Campos de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Caso A.

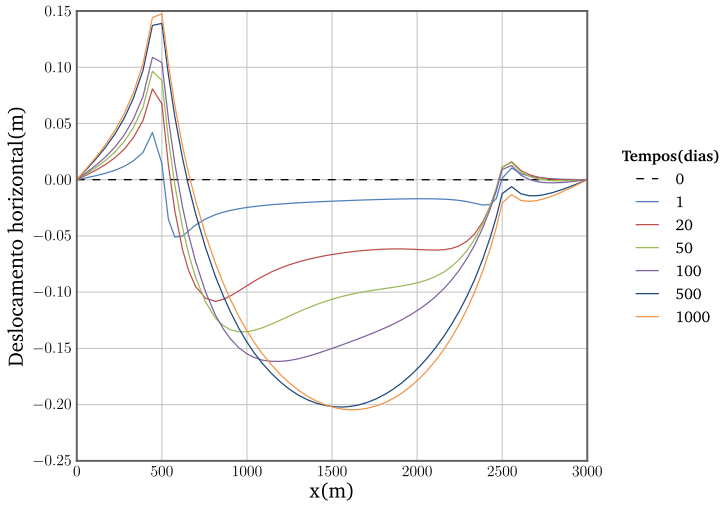


Fonte: Elaborada pelo autor.

da porosidade são coerentes com a física do problema, aumentando na região próxima ao poço injetor e diminuindo na região próxima ao poço produtor. Ora, se no poço injetor está prescrita a maior pressão, nesse ponto há uma expansão da rocha porosa, aumentando sua porosidade. Da mesma forma e com raciocínio contrário ocorre no poço produtor. Além disso, nas rochas adjacentes não há mudança na porosidade.

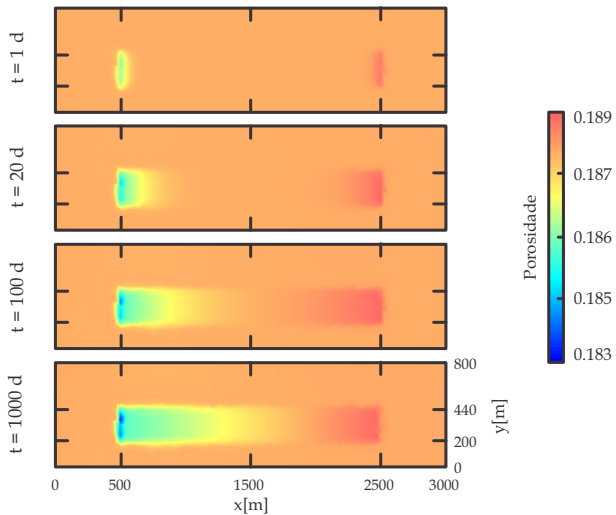
Como pode-se observar nos resultados do caso A, a utilização de um modelo geomecânico na simulação de reservatórios de petróleo necessita de um domínio de solução mais amplo que o delimitado pelo reservatório. Isso porque a variação da pressão influencia no estado de tensões em uma área bem maior que o reservatório. Desta forma, fica evidenciada a importância de definir um domínio de solução estendido para modelo geomecânico. Obviamente, o tamanho desse domínio estendido será dependente das propriedades mecânicas e poroelásticas da rocha, da magnitude das pressões nos poços e do quão profundo está localizado o reservatório. A profundidade do reservatório determina a carga total suportada pelo reservatório e pelas rochas adjacentes.

Figura 5.66 – Perfil de deslocamento horizontal na linha posicionada em $y = 320\text{m}$ para diferentes tempos. Caso A.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.67 – Campos de porosidade para diferentes tempos. Caso A.

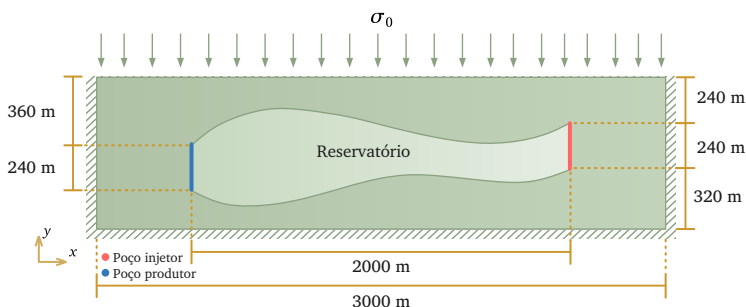


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.2 Caso B: Reservatório com domínio irregular

Neste caso, a geometria do reservatório tem um formato irregular, como pode ser observado na figura 5.68. Note-se que o domínio completo permanece retangular. A espessura do reservatório é variável ao longo da direção x , mas as extremidades tem a mesma altura de 240m. A posição do poço injetor foi modificada com relação ao problema anterior, nesse problema o poço injetor foi elevado em 120m. Já o comprimento do reservatório permanece com os 2000m.

Figura 5.68 – Diagrama esquemático do domínio de solução do problema com reservatório irregular.

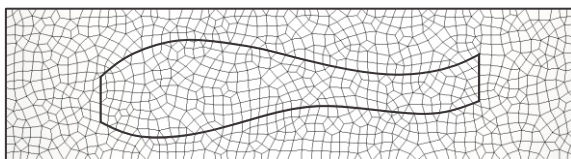


Fonte: Elaborada pelo autor.

As condições de contorno para esse caso são as mesmas que aquelas utilizadas no caso com reservatório de geometria retangular. Isto é, fronteiras laterais e inferior com deslocamento nulo e tensão normal na fronteira superior. Para o escoamento, condições de pressão prescrita nos poços e fluxo nulo nas fronteiras superior e inferior. A malha utilizada na simulação pode ser visualizada na figura 5.69. Os dados da referida malha dados estão listados na tabela 5.12. Deve-se observar que nesse caso, devido à geometria irregular do reservatório, não foi possível criar uma linha auxiliar na malha, como aquela criada no caso A. Por conta disso, serão apresentados somente os campos das principais variáveis envolvidas, bem como o deslocamentos vertical no topo do domínio de solução.

Na figura 5.70 é mostrada a evolução temporal da pressão. Como pode ser observado, mais uma vez, o gradiente de pressão ficou limitado ao domínio do reservatório, conforme o esperado. Já nas rochas

Figura 5.69 – Malha empregada na solução do problema com reservatório irregular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5.12 – Dados da malha híbrida empregada na solução do problema com reservatório irregular.

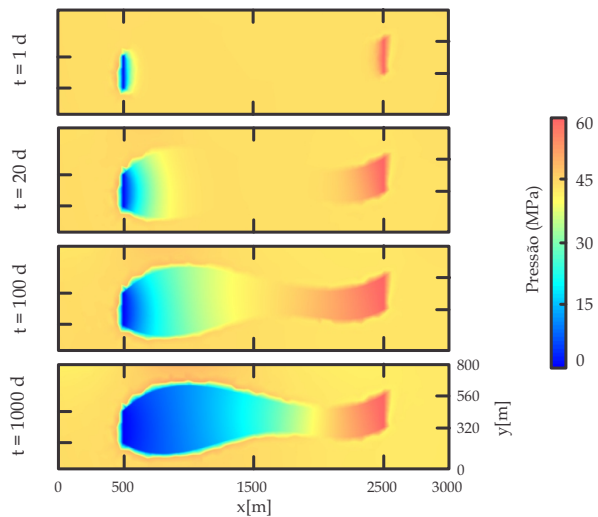
Nº de nós	1119
Nº de elementos	1163
Nº de elem. triang.	250
Nº de elem. quadrang.	913

Fonte: Elaborada pelo autor.

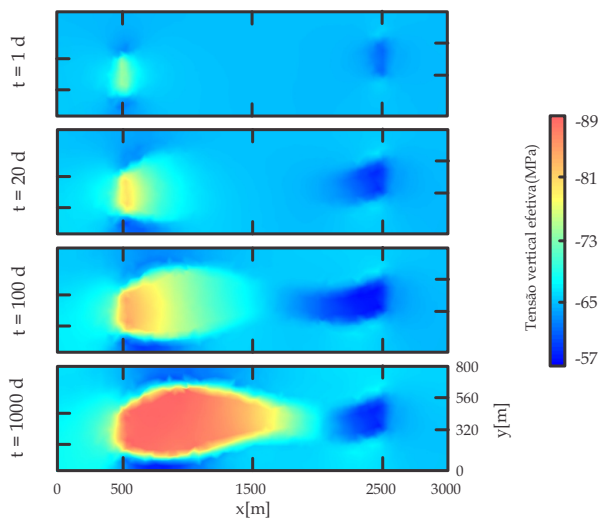
adjacentes a pressão permanece inalterada e igual a pressão inicial de equilíbrio. Nessa figura, pode-se perceber que o regime transiente segue o mesmo comportamento visualizado no Caso A, onde o gradiente de pressão vai se estabelecendo no interior no domínio até ficar linear no regime permanente.

A figura 5.71 mostra os campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Nota-se nessa figura que, o comportamento da tensão vertical efetiva segue a tendência observada no caso anterior. Isto é, quanto menor a pressão, maior será a carga suportada pela rocha e quanto maior a pressão, menor é a carga suportada pela rocha. Entretanto, não apenas o estado de tensões do reservatório é alterado, as rochas adjacentes também sofrem alteração perto dos poços.

Um fato interessante a ser observado está relacionado à geometria do reservatório. Como pode-se observar nas figuras 5.70 e 5.71, a área do reservatório próxima ao poço produtor, onde está localizada a menor pressão no domínio, é maior que aquela próxima ao poço injetor, onde está localizada a maior pressão no domínio. Isso faz com que uma área maior do reservatório tenha uma pressão baixa, quando comparado com o caso A. Essa área maior de pressão baixa indica que uma área maior da rocha reservatório está suportando uma parcela maior do carregamento.

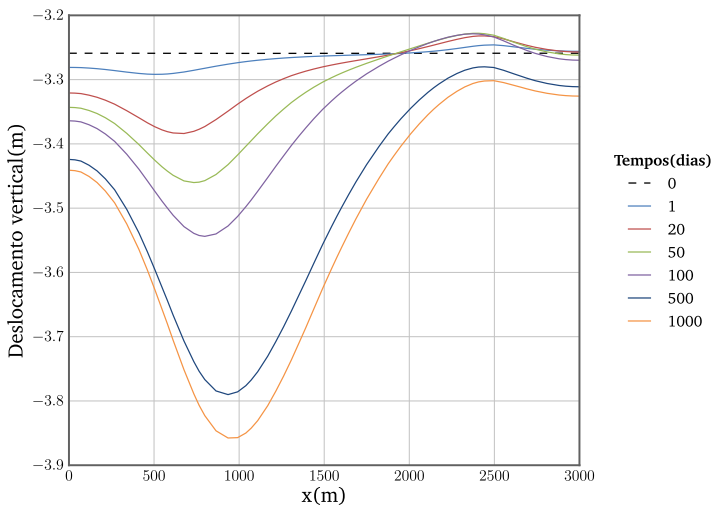
Figura 5.70 – Campos de pressão para diferentes tempos. Caso B.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.71 – Campos de tensão vertical efetiva para diferentes tempos. Caso B.

Fonte: Elaborada pelo autor.

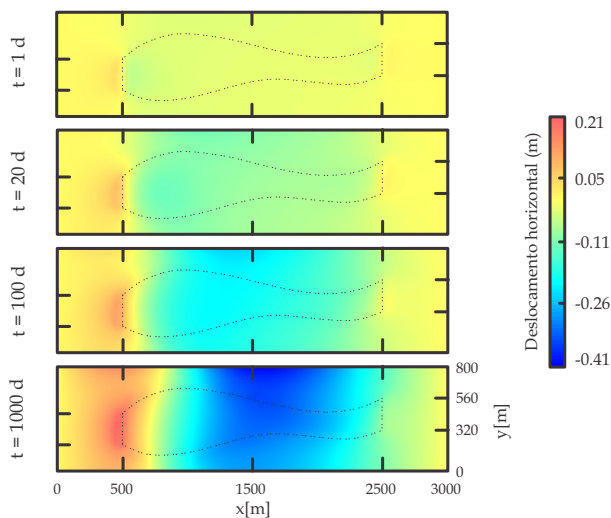
Figura 5.72 – Perfil de deslocamento vertical no topo do domínio para diferentes tempos. Caso B.



Ora, se uma área maior do reservatório está suportando o carregamento, então nessa região o reservatório se deformará mais. De fato, como pode ser observado na figura 5.72, o deslocamento vertical no topo do domínio de solução acima do poço produtor é maior que aquele encontrado no caso A. Enquanto no caso A o maior deslocamento encontrado nessa posição foi de 3,53m no tempo $t = 1000s$, nesse caso o valor foi de 3,85, ou seja, 32cm a mais.

Já a evolução temporal do deslocamento horizontal pode ser observada na figura 5.73, onde são mostrados campos dessa variável para diferentes tempos. O comportamento mostra-se semelhante ao campo de deslocamento horizontal do caso A. No entanto, os valores são maiores que no caso anterior, chegando ao maior valor de 41cm na região central do domínio, ou seja, quase o dobro daquele encontrado para o caso com reservatório de geometria retangular. Mais uma vez, esse aumento no valor do deslocamento é explicado pela região do reservatório próxima ao poço produtor, que nesse caso é maior, devido à espessura do reservatório ser maior nessa região. E assim, uma região maior do reservatório passa a

Figura 5.73 – Campos de deslocamento horizontal para diferentes tempos. Caso B.

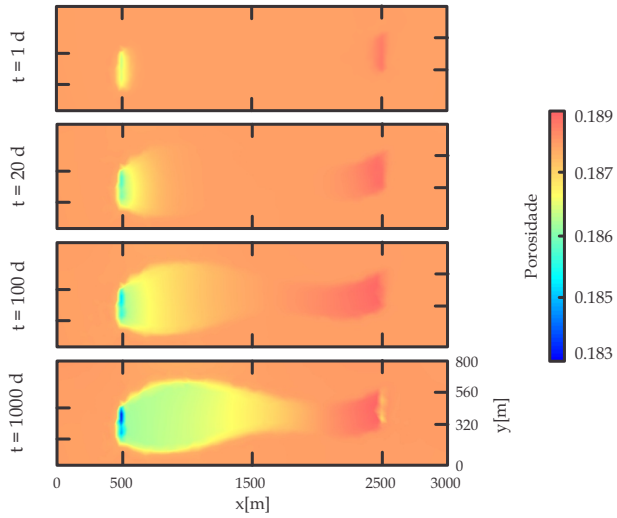


Fonte: Elaborada pelo autor.

suportar uma parcela maior do carregamento aplicado, e por consequência estabelecendo uma deformação maior no domínio.

Por último, os campos de porosidade são mostrados na figura 5.74. Observe-se que a porosidade manteve os valores no mesmo nível que o caso anterior, sendo a única diferença é que neste caso a área de porosidade modificada é maior. O que já era de se esperar, já que neste problema o reservatório possui uma geometria com domínio mais amplo que aquele com domínio retangular. Outra característica notável é que a variação da porosidade manteve-se restrita ao domínio do reservatório, exatamente como ocorreu no caso anterior. O fato de haver variação da porosidade apenas no interior do reservatório leva a uma conclusão de que a pressão tem uma maior influência nessa variação. Embora a pressão e a deformação volumétrica tenham o mesmo peso na hora de se determinar a variação na porosidade, a ordem de grandeza da pressão é maior nos casos simulados. Por isso, a pressão tem maior influência que a deformação volumétrica.

Figura 5.74 – Campos de porosidade para diferentes tempos. Caso B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conclusão

No presente trabalho, foi apresentada uma nova metodologia unificada para a solução acoplada da geomecânica com o escoamento em meios porosos. Essa metodologia unificada emprega apenas um método numérico, o método dos volumes finitos baseado em elementos (EbFVM), e uma única malha computacional não estruturada para a discretização espacial dos modelos físicos. A unificação do método numérico e da malha computacional surge como uma estratégia moderna na solução acoplada dos modelos geomecânico e de escoamento em um meio poroso deformável. Isso porque a estratégia mais comum na literatura é aquela em que diferentes métodos numéricos são aplicados na solução de cada modelo, sendo que a escolha do método é baseada nas características físicas dos modelos. Com a utilização do EbFVM, a principal exigência oriunda das características físicas dos problemas, a conservação em nível discreto para o escoamento, é respeitada. Essa característica credencia o método como uma ótima escolha para a solução acoplada dos modelos considerados.

Embora a estratégia de uma solução unificada, que se utiliza de um método e uma malha, já tenha sido empregada em trabalhos recentes, nenhum deles empregou uma malha não estruturada no contexto do mé-

todo dos volumes finitos. Dessa forma, pode-se dizer que a utilização de uma malha não estruturada no contexto de volumes finitos (EbFVM), para a solução acoplada da geomecânica e do escoamento em meio poroso, foi o maior desafio e também a maior contribuição no desenvolvimento da metodologia apresentada. Como se pôde observar nos resultados obtidos, esse desafio foi superado sem ressalvas.

Dois problemas clássicos de geomecânica foram resolvidos com a metodologia, o de Terzaghi e o de Mandel. Esses problemas, por terem solução analítica, possibilitaram uma validação criteriosa do código computacional implementado. As análises de convergência possibilitaram verificar a ordem com que o erro diminui. Percebeu-se que, as curvas de convergência apresentaram um efeito de horizontalização, tanto no refino de malha quanto no refino do passo de tempo. Esse efeito foi constatado quando optou-se por avaliar apenas um tipo de refino, temporal ou espacial. No entanto, quando a malha e o passo de tempo são refinados esse efeito é eliminado completamente, obtendo-se uma solução, cujo erro associado tem uma ordem de convergência esperada, sendo próximo a dois para o erro de discretização espacial e próximo a um para o erro de discretização temporal.

Foi resolvido também uma variante do problema de Terzaghi, em que uma coluna poroelástica heterogênea é compactada. Nessa variante da coluna poroelástica, os resultados obtidos também apresentaram uma ótima concordância com a solução analítica do problema, mesmo na região de contato entre os dois materiais diferentes. Já no problema de Mandel, a estratégia de tratamento da condição de contorno especial, na superfície superior do domínio, mostrou-se eficaz no tratamento desse comportamento iterativo da condição de contorno. É importante lembrar que, cada um desses problemas, de Terzaghi e de Mandel, possuem solução analítica para mais de uma variável do problema, e a ordem de convergência teórica foi obtida para todas as variáveis.

Um ponto relevante na análise de convergência foi a utilização do método dos elementos finitos (MEF) para solução da parte estrutural, ou modelo geomecânico, do problema acoplado. Nas soluções obtidas com esse método, o comportamento do erro foi exatamente o mesmo que aquele obtido pelo EbFVM, embora o valor dos erros apresentasse alguma diferença. Essa semelhança na convergência do erro mostra, além da proximidade entre os métodos, a capacidade do EbFVM em resolver proble-

mas de mecânica estrutural, corroborando com a literatura. É importante comentar que essa comparação entre o MEF e o EbFVM foi relativamente fácil de ser realizada devido ao acoplamento iterativo *two-way coupling* ser empregado na solução dos modelos.

Com relação ao acoplamento iterativo, pode-se dizer que esta estratégia resolveu de forma satisfatória o acoplamento das variáveis. Uma vez que as variáveis de acoplamento possuem termos nas equações de ambos os modelos, a estratégia de troca de informações em cada passo de tempo possibilitou que as variáveis satisfizessem as equações de conservação da massa e do equilíbrio de forças simultaneamente. Em outras palavras, as soluções dos modelos estão acopladas entre si ao final de cada nível de tempo. Isso fica evidente nos dois problemas clássicos, pois efeitos muito específicos são captados pela metodologia. No problema de Terzaghi com duas camadas, a metodologia conseguiu captar com bastante eficiência a descontinuidade das variáveis na região de interface entre os materiais. Já no problema de Mandel, o efeito de Mandel-Cryer também foi captado sem dificuldades, mostrando a importância do acoplamento na solução dos modelos.

Após a exaustiva etapa de validação, optou-se por empregar a metodologia na solução de dois problemas aplicados à simulação de reservatórios de petróleo. Percebeu-se por esses dois problemas, que a metodologia conseguiu obter o estado de tensões do reservatório e rochas adjacentes de maneira satisfatória. Além disso, mostrou o quão importante é resolver o estado de tensões de um domínio mais amplo que o do reservatório, apesar do gradiente de pressão estar localizado apenas no interior do reservatório. Outro ponto relevante está relacionado ao deslocamento na superfície durante o processo de produção de um reservatório, que foi perfeitamente captado na simulação. A solução de um problema com reservatório de geometria irregular possibilitou utilizar uma das características mais relevantes quando se utiliza malhas não estruturadas, que é a representação adequada de domínios complexos.

Outro fator que foi observado nesses problemas aplicados à simulação de reservatórios é a variação da porosidade. Como se pôde perceber, essa variação é praticamente irrelevante para o tipo de rocha considerada nos testes. Essa pouca influência já tinha sido observada em trabalhos anteriores desenvolvidos no laboratório SINMEC.

De modo geral, a metodologia unificada apresentada conseguiu obter resultados bastante satisfatórios, em que os erros de discretização se comportaram de maneira esperada. Além disso, em todos os problemas resolvidos, observou-se que a solução numérica encontrada está de acordo com o comportamento físico esperado. Obviamente, os modelos geomecânico e de escoamento utilizados possuem muitas simplificações, mas mesmo assim dá-se um passo importante no entendimento e tratamento numérico desse tipo de problema acoplado.

6.1 Sugestões de trabalhos futuros

Conforme comentado anteriormente, o uso desse tipo de técnica unificada para a solução numérica do acoplamento entre os modelos geomecânico e de escoamento em meio poroso é recente. Principalmente quando se pensa em utilizar métodos de volumes finitos para a solução do modelo geomecânico. Devido a isso, pode-se dizer que essa linha de pesquisa é bastante promissora e ainda carece de muitos desenvolvimentos.

Assim, algumas sugestões para o avanço dessa área podem ser citadas. A primeira sugestão que surge de maneira natural é a ampliação da metodologia para solução de problemas tridimensionais. Como se sabe, na maioria dos problemas reais de engenharia, simplificações bidimensionais são muito restritivas.

Em termos numéricos, uma alternativa interessante seria a solução totalmente acoplada entre o modelo geomecânico e o de escoamento. Isto é, a utilização de um único sistema linear que inclua as equações discretas de ambos os modelos simultaneamente. Embora esse tipo de alternativa possa ser encontrada com facilidade no contexto de elementos finitos, apenas pesquisas iniciais foram desenvolvidas com a utilização do método dos volumes finitos. Obviamente, em uma solução totalmente acoplada, o uso de uma metodologia de discretização unificada é extremamente conveniente.

No que diz respeito aos modelos físicos, o modelo geomecânico é aquele que apresenta os maiores desafios. Isso porque há uma variedade muito grande de rochas reservatórios. Essas rochas possuem características muito distintas umas das outras. Logo, diferentes modelos constitu-

tivos podem e devem ser utilizados para ampliar a capacidade da metodologia em trabalhar com modelos geomecânicos. Por último, a sugestão para ampliação do modelo de escoamento vai no sentido de aumentar o número de fases consideradas, começando com modelos como o *black-oil* padrão e chegando em modelos mais realísticos, como o modelo composicional.

Referências bibliográficas

AAVATSMARK, I. **An introduction to multipoint flux approximation for quadrilateral grids.** *Computational Geosciences*, v. 6, pp. 405–432, 2002.

ABOUSLEIMAN, Y., CHENG, A. H. D., CUI, L., DETOURNAY, E., C., R. J. **Mandel's problem revised.** *Géotechnique*, v. 46, n. 2, pp. 187–195, 1996.

ANSYS INC. **ANSYS ICEM CFD 15.0 - Manual and tutorial**, 2013.

AZIZ, K., SETTARI, A. **Petroleum reservoir simulation.** Applied Science Publishers Ltd, London, UK, 1979.

BALAY, S., ABHYANKAR, S., ADAMS, M., BROWN, J., BRUNE, P., BUSCHELMAN, K., DALCIN, L., EIJKHOUT, V., GROPP, W., KARPEYEV, D., KAUSHIK, D., KNEPLEY, M., CURFMAN, L. M., RUPP, K., SMITH, B., ZAMPINI, S., ZHANG, H. **PETSc Users Manual.** Argonne National Laboratory, December, 2015.

BALIGA, B. R., PATANKAR, S. V. **A new finite-element formulation for convection-difusion problems.** *Numerical Heat Transfer*, v. 3, n. 4, pp. 393–409, 1980.

BALIGA, B. R., PATANKAR, S. V. **A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer.** *Numerical Heat Transfer*, v. 6, n. 3, pp. 245–261, 1983.

BERRYMAN, J. G. **Effective stress for transport properties of inhomogeneous porous rock.** *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 97, n. B12, pp. 2156–2202, 1992.

BIOT, M. A. **General theory of three-dimensional consolidation.** *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, pp. 155–164, February, 1941.

BIOT, M. A. **Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid.** *Journal of Applied Physics*, v. 26, n. 2, pp. 182–185, February, 1955.

BIOT, M. A. **Theory of a porous viscoelastic anisotropic solid.** *Journal of Applied Physics*, v. 27, pp. 459–167, May, 1956.

BLAZEK, J. **Computational fluid dynamics: principles and applications.** Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, 2001.

CHEN, Z., HUAN, G., MA, Y. **Computational methods for multiphase flows in porous media.** Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 2006.

CHENG, A. H. D., DETOURNAY, E. **A direct boundary element method for plan strain poroelasticity.** *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 12, pp. 551–572, 1988.

CHIN, L., RAGHAVAN, R., THOMAS, L., COMPANY, P. P. **Fully Coupled Analysis of Well Responses in Stress-Sensitive Reservoirs.** *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, September, 1998, 12 pages.

CHIN, L., RAGHAVAN, R., THOMAS, L., COMPANY, P. P. **Fully-Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells with Stress-Dependent Permeability.** *SPE International Oil and Gas Conference and Exhibition*, November, 1998, 16 pages.

CHIN, L., RAGHAVAN, R., THOMAS, L. **Fully Coupled Analysis of Well Responses in Stress-Sensitive Reservoirs.** *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 3, n. 5, pp. 435–443, October, 2000.

CHIN, L., RAGHAVAN, R., THOMAS, L. **Fully-Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells With Stress-Dependent Permeability.** *SPE Journal*, v. 5, n. 1, pp. 32–45, March, 2000.

CHIN, L., THOMAS, L., SYLTE, J. E., PERSON, R. G. **Iterative coupled analysis of Geomechanics and fluid flow for rock compaction in reservoir simulation.** *Oil & Gas Science and Technology*, v. 57, n. 5, pp. 485–497, June, 2002.

COMERLATI, A., FERRONATO, M., GAMBOLATI, G., PUTTI, M., TEATINI, P. **Saving Venice by seawater.** *Journal of Geophysical Research*, v. 109, 2004.

CORDAZZO, J. **Simulação de reservatórios de petróleo utilizando o método EbFVM e multigrid algébrico.** Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., Co-Orientador: Prof. António Fábio Carvalho da Silva, Dr.Eng., 2006.

CORDAZZO, J., HURTADO, F. S. V., MALISKA, C. R., DA SILVA, A. F. C. **Numerical techniques for solving partial differential equations in heterogeneous media.** In *CILANCE, XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Ouro Preto, Brazil, 2003.

COUSSY, O. **Poromechanics.** John Wiley & Sons Ltd, 2004.

CRYER, C. W. **A comparison of three dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi.** *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 16, n. 4, pp. 401–412, 1963.

DAL PIZZOL, A. **Uma metodologia unificada empregando o método dos volumes finitos para a solução acoplada do escoamento e da geomecânica em meios porosos.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2014.

DAL PIZZOL, A., MALISKA, C. R. **A finite volume method for the solution of fluid flows coupled with the mechanical behavior of compacting porous media.** In *Porous media and Its application in science, Engineering and industry*, vol. 1453 of *AIP Conference Proceedings*, p. 205–210, 2012.

DESAI, C. S., SIRIWARDANE, H. J. **Constitutive Laws for Engineering Materials with emphasis on geologic materials.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

DETOURNAY, E., CHENG, A. H. D. **Fundamentals of poroelasticity.** In *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practise and Projects*, vol. 2, p. 113–171, 1993.

FERRONATO, M., CASTELLETTO, N., GAMBOLATI, G. **A fully coupled 3-D mixed finite element model of Biot consolidation.** *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 12, pp. 4813–4830, June, 2010.

FERZIGER, J. H., PERIĆ, M. **Computational methods for fluid dynamics**, third edition. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2002.

FILIPPINI, G. **O método de volumes finitos baseado em elementos aplicado a problemas de elasticidade.** Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2011.

FILIPPINI, G., MALISKA, C. R., VAZ, M. **A physical perspective of the element-based finite volume method and FEM-Galerkin methods within the framework of the space of finite elements.** *International*

Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 98, pp. 24–43, 2014.

FORSYTH, P. A. **A control-volume, finite element method for local mesh refinement in thermal reservoir simulation.** *SPE Reservoir Engineering*, v. 5, n. 4, pp. 561–566, November, 1990.

FUNG, L. S., HIEBERT, A. D., NGHIEM, L. **Reservoir simulation with a control-volume finite-element method.** *SPE Reservoir Engineering*, pp. 349–357, August, 1992.

FUNG, L. S., BUCHAMAN, W. L., SHARMA, R. **Hybrid-CVFEM Method for flexible grid reservoir simulation.** *SPE Reservoir Engineering*, pp. 188–194, August, 1994.

GAMBOLATI, G., FERRONATO, M., TEATINI, P., DEIDDA, R., LECCA, G. **Finite element analysis of land subsidence above depleted reservoir with pore pressure gradient and total stress formulations.** *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 25, pp. 307–327, 2001.

GEERTSMA, J. **Problems of rock mechanics in petroleum production engineering.** In *Proceedings of the First Congress of International Society of Rock Mechanics*, vol. 1, p. 585–594, Lisboa, 1966.

GIBSON, R. E., KNIGHT, K., TAYLOR, P. W. **A critical experiment to examine theories in three-dimensional consolidation.** *Proceedings Europe Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering*, v. 1, pp. 69–76, 1963.

GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V. **Matrix computations.** John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

GOTTARDI, G., DALL'OLIO, D. **A control-volume finite-element model for simulating oil-water reservoirs.** *Journal of Petroleum Science and*

Engineering, v. 8, pp. 29–41, 1992.

GUTIERREZ, M., LEWIS, R. W. **The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation.** *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*, n. 47392, pp. 439–448, July, 1998.

GUTIERREZ, M., LEWIS, R. W. **Coupling of fluid flow and deformation in underground formations.** *Journal of Engineering Mechanics*, v. 128, n. 7, pp. 779–787, July, 2002.

GUTIERREZ, M., LEWIS, R. W., MASTERS, I. **Petroleum reservoir simulation coupling fluid flow and Geomechanics.** *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 4, n. 3, pp. 164–172, June, 2001.

HERBIN, R., HUBERT, F. **Benchmark on the discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids.** In *5th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Aussois, France, 2008.

HONÓRIO, H. T. **Análise de métodos segregados e acoplados de solução de escoamentos incompressíveis utilizando malhas não-estruturadas híbridas.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2014.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method.** Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1987.

HURTADO, F. S. V. **Uma formulação de volumes finitos baseada em elementos para simulação do deslocamento bifásico imiscível em meios porosos.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2005.

HURTADO, F. S. V. **Formulação tridimensional de volumes finitos para simulação de reservatórios de petróleo com malhas não-estruturadas híbridas.** Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2011.

HURTADO, F. S. V., MALISKA, C. R., DA SILVA, A. F. C., CORDAZZO, J. **An element-based finite volume formulation for reservoir simulation.** In *CILANCE, XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Guarapari, Brazil, 2005.

HURTADO, F. S. V., MALISKA, C. R., DA SILVA, A. F. C., CORDAZZO, J. **A quadrilateral element-based finite volume formulation for the simulation of complex reservoir.** In *Proceedings of the X Latin America and Caribbean Petroleum Engineering Conference, LACPEC*, Buenos Aires, Argentina, 2007.

KIM, J., TCHELEPI, H. A., JUANES, R. **Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: fixed-stress and fixed-strain splits.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, pp. 1591–1606, January, 2011.

KLAUSEN, R. A., RUSSEL, T. F. **Relationships among some locally conservative discretization methods Which handle discontinuous coefficients.** *Computational Geosciences*, v. 8, n. 4, pp. 341–377, December, 2004.

LI, P., CHALATURNYK, R. J., TAN, T. B. **Coupled reservoir geomechanical simulations for the SAGD process.** *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 45, n. 1, pp. 33–40, January, 2006.

MAINGUY, M., LONGUEMARE, P. **Coupling Fluid Flow and Rock Mechanics: Formulations of the Partial Coupling Between Reservoir and Geomechanical Simulators.** *Oil & Gas Science and Technology*, v. 57, n. 4, pp. 355–367, August, 2002.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**, segunda edição. Editora LTC S. A., 2004.

MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., DONATTI, C. N., AMBRUS, J. **Especificação e planejamento da biblioteca EFVLib**. Relatório técnico SINMEC/SIGER I-02, Parte 2, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., DONATTI, C. N., PESCADOR JR., A. V. B. **Desenvolvimento e implementação da biblioteca EFVLib**. Relatório técnico SINMEC/SIGER I-03, Parte 1, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., DONATTI, C. N., PESCADOR JR., A. V. B. **Desenvolvimento e implementação da biblioteca EFVLib (continuação)**. Relatório técnico SINMEC/SIGER I-04, Parte 1, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., DONATTI, C. N., PESCADOR JR., A. V. B., RIBEIRO, G. G. **Manual de classes da biblioteca EFVLib**. Relatório técnico SINMEC/SIGER I-06, Parte 1, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.

MALVERN, E. L. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1969.

MANDEL, J. **Consolidation des sols (Étude Mathématique)**. *Géotechnique*, v. 3, n. 7, pp. 287–299, September, 1953.

MATTAX, C. C., DALTON, R. L. **Reservoir Simulation**, vol. 13. SPE Monograph Series, Society of Petroleum Engineers, 1990.

MENDES, R. **Análise do acoplamento pressão-velocidade nas equações**

de Navier-Stokes utilizando o método dos volumes finitos baseado em elementos e solução acoplada. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2007.

MIKELIĆ, A., WANG, B., WHEELER, M. F. **Numerical convergence study of iterative coupling for coupled flow and geomechanics.** *Computational Geosciences*, v. 18, n. 3, pp. 287–299, August, 2014.

NORDBOTTEN, J. M. **Stable cell-centered finite volume method discretization for Biot equations.** *Journal on Numerical Analysis*, v. 54, n. 2, pp. 942–968, March, 2016.

PAN, F., SEPEHRNOORI, K., CHIN, L. **Development of a Coupled Geomechanics Model for a Parallel Compositional Reservoir Simulator.** *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, November, 2007, 109867-MS.

PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of numerical reservoir simulation.** Elsevier Scientific Publishing Company, New York, USA, 1977.

PEDROSA, O. A., AZIZ, K. **Use of a hybrid grid in reservoir simulation.** *SPE Reservoir Engineering*, v. November 1986, pp. 611–621, 1986.

PEREIRA, L. C., GUIMARÃES, L. J. N., HOROWITZ, B., SÁNCHEZ, M. **Coupled Hydro-mechanical fault reactivation analysis incorporating evidence theory for uncertainty quantification.** *computer and Geotechnics*, v. 56, 2014.

PHILLIPS, P. J., WHEELER, M. F. **A coupling of mixed and continuous Galerkin finite element methods for poroelasticity I: the continuous in time case.** *Computational Geosciences*, v. 11, pp. 131–144, March, 2007.

PHILLIPS, P. J., WHEELER, M. F. **A coupling of mixed and continuous**

Galerkin finite element method for poroelasticity II: the discrete-in-time case. *Computational Geosciences*, v. 11, pp. 145–158, March, 2007.

RAGHAVAN, R., SCORER, J., MILLER, F. **An Investigation by Numerical Methods of the Effect of Pressure-Dependent Rock and Fluid Properties on Well Flow Tests.** *SPE Journal*, v. 12, n. 3, pp. 267–275, June, 1972, 2617-PA.

RAW, M. **A new control-volume based finite element procedure for the numerical solution of the fluid flow and scalar transport equations.** Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1985.

RICE, J. R., CLEARY, M. P. **Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media With Compressible Constituents.** *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 14, n. 2, pp. 227–241, May, 1976.

ROZON, B. J. **A generalized finite volume discretization method for reservoir simulation.** In *SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Paper SPE 18414, Houston, USA, 6–8 February, 1989.

SAAD, Y. **Iterative method for sparse linear systems**, 2nd edition. PWS Publishing Company, Boston, 2000.

SCHIFFMAN, R. L., CHEN, A. T. E., JORDAN, J. C. **An analysis of consolidation theories.** *Journal of the Soil Mechanics & Foundation Division*, v. 95, pp. 295–312, 1969.

SETTARI, A., MOURITS, F. **A coupled reservoir and geomechanical simulation system.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 219–226, 1998.

SETTARI, A., WALTERS, D. **Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compactation.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 334–342, 2001.

SHAW, G., STONE, T. **Finite Volume Methods for Coupled Stress/Fluid Flow in a Commercial Reservoir Simulator.** *Society of Petroleum Engineers*, February, 2005.

SOUZA, J. A. **Implementação de um método de volumes finitos com sistema de coordenadas locais para solução acoplada das equações de Navier-Stokes.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2000.

TEATINI, P., CASTELLETTO, N., FERRONATO, M., GAMBOLATI, G., JANNA, C., CAIRO, E., MARZORATI, D., COLOMBO, D., FERRETTI, A., BAGLIANI, A., BOTTAZZI, F. **Geomechanical response to seasonal gas storage in depleted reservoir: A case study in the Po River basin, Italy.** *Journal of Geophysical Research*, v. 116, 2011.

TERZAGHI, K. **Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungsercheinungen.** *Sitzungsber. Akad. Wissen. Wien Math. Naturwis*, v. 132, pp. 105–124, 1923.

TERZAGHI, K. **Theoretical Soil Mechanics.** Wiley and Sons, New York, 1943.

THOMAS, L., CHIN, L., PIERSON, R., SYLTE, J. **Coupled Geomechanics and Reservoir Simulation.** *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, October, 2002, 9 pages.

THOMAS, L., CHIN, L., PIERSON, R., SYLTE, J. **Coupled Geomechanics and Reservoir Simulation.** *SPE Journal*, v. 8, n. 4, pp. 350–358, December, 2003.

TONELLI, R. **Estratégias para o tratamento do acoplamento escoamento/Geomecânica utilizando volumes finitos.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. Orien-

tador: Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D., 2016.

TRAN, D., SETTARI, A., NGHIEM, L. **New iterative coupling between a reservoir simulator and a geomechanics module.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 362–369, 2004.

TRAN, D., NGHIEM, L., BUCHANAN, L. **Improved iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation.** *Society of Petroleum Engineers*, 2005.

VERRUIJT, A. **Theory and problems of poroelasticity.** Delft University of Technology, 2013.

WANG, H. F. **Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology.** Princeton University Press, 2000.

WHEELER, M. F., XUE, G., YOTOV, I. **A family of multipoint flux mixed finite element methods for elliptic problems on general grids.** *Computer Science*, v. 4, pp. 918–927, 2011.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. **The finite element method – Volume 1: The basis**, fifth edition. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2000.

A

Aspectos geométricos do EbFVM

No capítulo 3 do presente trabalho foi apresentado o método dos volumes finitos baseado em elementos, onde foram apresentadas as entidades geométricas fundamentais da malha, procedimento de discretização e aproximações numéricas. Assim, neste apêndice estão informações complementares sobre a malha não estruturada utilizada pelo EbFVM. Primeiramente, apresenta-se a especificação desse tipo de malha e na sequência é apresentado o procedimento de transformação de coordenadas locais utilizado no interior de cada tipo de elemento suportado pela malha. Esse procedimento é empregado nas aproximações numéricas, do gradiente e de integrais, utilizadas pelo EbFVM.

A.1 Especificação de uma malha não estruturada

A geração de uma malha não estruturada, que represente de forma discreta um determinado domínio físico, é um procedimento bastante

complexo. Essa tarefa, normalmente, é realizada por softwares especializados, que utilizam-se de algoritmos específicos que garantam os requisitos necessários para uma determinada formulação numérica. Como resultado dessa geração obtém-se um conjunto de dados que indica a localização espacial das entidades geométricas bem como a relação entre elas.

A especificação de uma malha não estruturada normalmente é realizada através de dois conjuntos de dados. O primeiro deles é aquele que determina a localização espacial dos nós em um sistema de coordenadas, normalmente cartesianas. Um exemplo de especificação das coordenadas dos nós em uma malha bidimensional que apresenta 4 nós pode ser visualizado na tabela A.1. É importante notar que nessa tabela é especificado também um sistema de identificação dos nós, convencionalmente denominado de numeração global.

Tabela A.1 – Exemplo de tabela de coordenadas.

Nó	<i>x</i>	<i>y</i>
1	1,204	0,354
2	2,401	1,526
3	2,759	2,006
4	3,200	2,581

Fonte: Elaborada pelo autor.

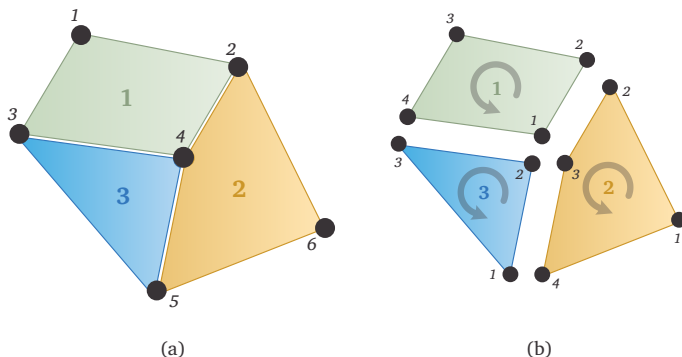
Para definir uma malha de elementos é necessária como informação adicional a tabela de conectividade. Nessa tabela, para cada elemento são especificados os nós que o formam, identificados pela numeração global. A tabela A.2 exemplifica uma tabela de conectividades para uma malha de três elementos, a qual é mostrada na figura A.1(a), utilizando a numeração global dos nós. Deve-se observar que a ordem de especificação dos nós na tabela de conectividades define implicitamente outro esquema de numeração, denominado numeração local. Nesse esquema de numeração, cada nó é identificado por um número entre 1 e 4 para elementos quadrangulares e entre 1 e 3 para elementos triangulares, conforme mostrado na figura A.1(b). Nessa figura é indicada também a definição de uma ordenação local única, no sentido anti-horário, para especificação dos nós na tabela de conectividades.

Tabela A.2 – Tabela de conectividades.

Elemento	1º nó	2º nó	3º nó	4º nó
1	4	2	1	3
2	6	2	4	5
3	5	4	3	

Fonte: Elaborada pelo autor.

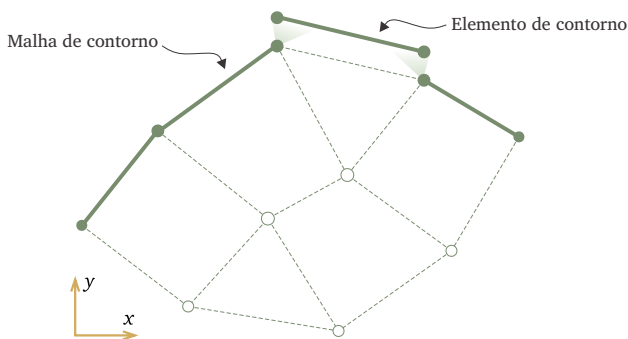
Figura A.1 – Definição da topologia de uma malha. (a) Numeração global dos nós e elementos. (b) Numeração local dos nós em cada elemento.



Fonte: Adaptado de Hurtado (2005).

A.2 Especificação de uma malha de contorno

Em problemas físicos que envolvem equações diferenciais, necessita-se especificar as condições de contorno, caso contrário não seria possível a obtenção da solução particular do problema. Para a adição dessas condições de contorno no sistema de equações discretas, pode ser necessária uma representação discreta do contorno, ou seja, uma malha de contorno. Na figura A.2 pode-se visualizar um exemplo de malha de contorno, onde há um elemento de contorno em destaque. Como a malha considerada é bidimensional, a malha de contorno passa a ser uma malha unidimensional formada por segmentos de retas, que são os elementos de contorno.

Figura A.2 – Exemplo de uma malha de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um elemento de contorno, como pode ser observado na figura A.2, é um segmento de reta limitado por dois nós. Dessa forma, a especificação da tabela de conectividades para uma malha de contorno torna-se direta, sendo necessário informar os nós que delimitam os elementos de contorno. Na tabela A.3 está um exemplo de tabela de conectividades para um contorno formado por três elementos. Nota-se os nós de cada elemento são identificados pela sua numeração global, definida pela tabela de coordenadas dos nós. Observe-se que, na tabela de conectividades da malha de contorno é definida também uma numeração local para os elementos desse contorno.

Tabela A.3 – Exemplo de uma tabela de conectividades para malhas de contorno.

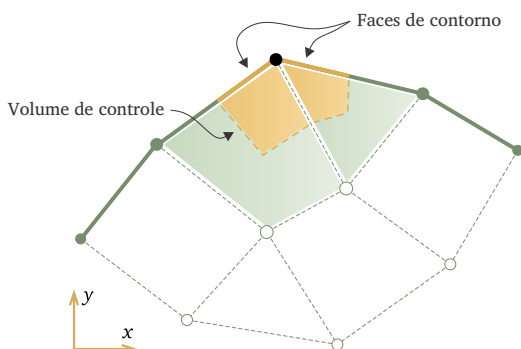
Elemento	1^o nó	2^o nó
1	1	3
2	3	7
3	7	5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da mesma forma que os elementos bidimensionais são divididos em subelementos delimitados por faces, o elemento linear também é dividido. Entretanto, a divisão do elemento de contorno define faces de contorno, que são responsáveis por fechar a superfície de controle do volume

adjacente ao contorno. Essa divisão é realizada no ponto médio do segmento de reta que define o elemento. Na figura A.3 é possível ver um volume de controle adjacente ao contorno, delimitado por um conjunto de faces no interior do domínio e duas faces de contorno. É importante notar nessa figura que o nó associado ao volume de controle adjacente ao contorno está sobre a superfície de controle desse volume, diferentemente dos volumes internos ao domínio, onde os nós estão sempre localizados no interior dos volumes.

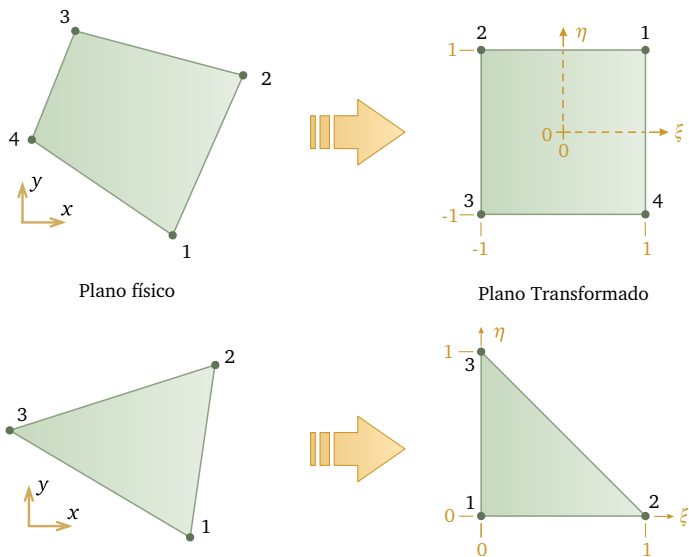
Figura A.3 – Volume de controle adjacente ao contorno.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A.3 Transformação de coordenadas

Uma das principais vantagens em trabalhar com malhas não estruturadas é sua capacidade de adaptação a domínios de geometria complexa. A fim de sistematizar o processo de discretização faz-se o uso da estratégia denominada *mapeamento* (Hughes, 1987; Zienkiewicz & Taylor, 2000). Nesta técnica, realiza-se uma transformação do elemento, levando-o do espaço físico para o espaço denominado *transformado*. No plano transformado, o elemento possui uma forma regular de dimensões e topologia fixas. Neste plano, a realização dos cálculos geométricos torna-se mais simples, devido à forma regular que os elementos possuem. A figura A.4 ilustra a transformação de coordenadas nos elementos triangular e quadrangular.

Figura A.4 – Transformação de coordenadas dos elementos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma maneira conveniente de expressar a transformação de coordenadas em um elemento é através das funções de forma, denotadas como N_l , onde l é o índice local de um nó pertencente ao conjunto \mathcal{N}^e . As funções de forma são contínuas e deriváveis das coordenadas ξ e η . As propriedades básicas das funções de forma são:

1. Variam no intervalo de $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$;
2. No ponto coincidente com o nó de índice local l a função N_l adquire valor 1, enquanto todas as outras se anulam;
3. Em um ponto qualquer do elemento, os valores das funções de forma constituem uma *partição da unidade* (Zienkiewicz & Taylor, 2000), ou seja, $\sum_{l \in \mathcal{N}^e} N_l(\xi, \eta) = 1$.

O número de funções de forma em um dado elemento é igual ao número de nós que este possui. Neste trabalho, considera-se dois tipos de elementos bidimensionais: quadrangulares, cujas funções de forma

são

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

e triangulares, com funções de forma dadas por,

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \\ N_2(\xi, \eta) = \xi, \\ N_3(\xi, \eta) = \eta. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Além desses elementos, é considerado também um elemento unidimensional¹ de contorno, cujas funções de forma são

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \xi, \\ N_2(\xi) = 1 - \xi. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Com auxílio das funções de forma, as equações de transformação de coordenadas locais para globais, para qualquer ponto no interior do elemento ou no contorno podem ser expressas como

$$\begin{cases} x = \sum_{p \in \mathcal{N}^e} N_p(\xi, \eta) x_p, \\ y = \sum_{p \in \mathcal{N}^e} N_p(\xi, \eta) y_p, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

onde x_p e y_p são as coordenadas cartesianas do nó p e N_p a função de forma associada ao mesmo.

A.4 Matriz jacobiana

Durante o procedimento de discretização, com utilização de coordenadas locais, surge de forma natural a chamada *matriz jacobiana*, defi-

¹Por ser um elemento unidimensional, o elemento de contorno necessita de apenas uma coordenada (ξ) no plano transformado.

nida como

$$\mathbf{J}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \partial_{\xi} x & \partial_{\eta} x \\ \partial_{\xi} y & \partial_{\eta} y \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

onde as derivadas das coordenadas globais em relação as coordenadas locais podem ser obtidas diretamente derivando as equações (A.4).

Uma vez substituídas as derivadas das funções na equação (A.5), aplicada a um elemento arbitrário e , a expressão resultante pode ser escrita como

$$\mathbf{J}^e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{N_n(e)} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{N_n(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi} N_1 & \partial_{\eta} N_1 \\ \partial_{\xi} N_2 & \partial_{\eta} N_2 \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{\xi} N_{N_n(e)} & \partial_{\eta} N_{N_n(e)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

onde $\partial_{\xi} N_p$ e $\partial_{\eta} N_p$ são as derivadas da função de forma associada ao nó p com relação as coordenadas locais e $N_n(e)$ o número de nós do elemento e . A segunda matriz do produto será denotada daqui em diante como \mathbf{D}^e . Essa matriz que contém as derivadas das funções de forma, aparece em diversas expressões advindas da discretização.

B

Método dos elementos finitos

No presente trabalho, o MEF foi utilizado na discretização do modelo estrutural geomecânico, apresentado no capítulo 2. Como este método é amplamente empregado na discretização de modelos estruturais, optou-se em utilizá-lo como uma metodologia de comparação com a discretização do modelo geomecânico pelo EbFVM. Inicialmente, nas duas primeiras seções deste apêndice, serão apresentadas ferramentas matemáticas necessárias para a discretização através do método dos elementos finitos. Primeiro a notação matricial, onde o caráter simétrico dos tensores é aproveitado para a apresentação das equações do modelo estrutural em uma forma mais conveniente. E em seguida a quadratura de Gauss, utilizada na aproximação de integrais volumétricas inerentes ao procedimento de discretização do método. Finalmente, os fundamentos teóricos e o processo de discretização do método de elementos finitos serão apresentados.

B.1 Forma matricial

Usualmente, nos desenvolvimentos teóricos emprega-se a forma vetorial das equações de equilíbrio. Entretanto, quando se trabalha com o método de elementos finitos, utiliza-se a forma matricial dos operadores e tensores, com a notação de Voigt, onde faz-se uso da propriedade de simetria dos tensores. Naturalmente, esta forma de apresentar as equações auxilia no procedimento de discretização desse método. Assim, o operador nabla, tensor tensão efetiva e tensor identidade podem ser reescritos como

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo esta nova forma na equação de equilíbrio, dada pela equação (2.5), encontra-se

$$\nabla^T (\boldsymbol{\sigma}' - \alpha P \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Efetuando os produtos entre matrizes, recupera-se facilmente as equações de equilíbrio expandidas na equação (2.7).

É conveniente realizar esse tipo de transformação para a relação cinemática, entre deslocamentos e deformações. Assim tem-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}, \quad (\text{B.3})$$

onde o tensor de deslocamentos $\boldsymbol{\varepsilon}$ na forma matricial torna-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T. \quad (\text{B.4})$$

É importante notar que os vetores de deslocamento \mathbf{u} e de aceleração da gravidade \mathbf{g} permanecem inalterados nesta notação.

Finalmente, a relação constitutiva para o modelo considerado, dada pela equação (2.9), também pode ser reescrita na notação matricial. Assim, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{B.5})$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva expressa por

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\mu_l + \lambda_l & \lambda_l & 0 \\ \lambda_l & 2\mu_l + \lambda_l & 0 \\ 0 & 0 & \mu_l \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

É importante salientar que a matriz constitutiva \mathbf{D} é o mesmo tensor de quarta ordem \check{D} com todas as simplificações inerentes ao modelo considerado, onde sobram apenas 5 componentes diferentes de zero, dependentes apenas dos coeficientes de Lamé.

B.2 Quadratura de Gauss

No EbFVM a aproximação do gradiente é o ponto chave na discretização e por isso exige um esforço maior em determiná-lo de forma mais consistente. Entretanto, as integrais volumétricas e de superfície não exigem tal nível de precisão, de forma que a aproximação pela regra do ponto médio é suficiente. Por outro lado, no MEF as integrais volumétricas que estão associadas aos elementos são de extrema importância para o método, a ponto de interferirem na qualidade da solução. Assim, pode-se afirmar que a quadratura de Gauss é a alternativa ideal para essa aproximação, pois dependendo do número de pontos de integração utilizado, no cálculo da integral, pode-se garantir a solução exata para um polinômio de determinada ordem.

No MEF, diferentemente do EbFVM, a porção elementar discreta do domínio é o próprio elemento. Por essa razão, as integrais volumétricas surgem associadas à esses entes geométricos. Assim, a integral volumétrica em um domínio bidimensional para uma função qualquer $F(x, y)$ é dada por

$$I = \int_V F(x, y) dV^{xy}, \quad (\text{B.7})$$

onde dV^{xy} é o diferencial de volume no plano físico definido pelas direções coordenadas x e y . Entretanto, no âmbito do método de elementos finitos é mais conveniente realizar essa integração no plano transfor-

mado¹. Dessa forma, realizando a transformação de coordenadas locais tem-se que

$$I = \int_V |\mathbf{J}(\xi, \eta)| F(\xi, \eta) dV^{\xi\eta}. \quad (\text{B.8})$$

Note que o determinante da matriz jacobiana \mathbf{J} é o fator de escala entre o diferencial de volume do plano transformado e no plano físico (Zienkiewicz & Taylor, 2000). Além disso, a própria função F passa a ser função das coordenadas locais no plano transformado.

Então, realizando a aproximação da integral pela quadratura de Gauss tem-se

$$I \approx \Delta V^{\xi\eta} \sum_{i=1}^{n_p} |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_i)| F(\xi_i, \eta_i) w_i. \quad (\text{B.9})$$

onde n_p é o número de pontos de integração, ou pontos de Gauss, onde a função F e a jacobiana \mathbf{J} são avaliadas e w_i é o peso associado a cada ponto de Gauss. $\Delta V^{\xi\eta}$ é o volume do elemento no plano transformado.

A quantidade de pontos de integração usada na equação (B.9) define a precisão da aproximação da integral volumétrica. Durante o processo de montagem do sistema linear através do MEE, o cálculo dessa integral volumétrica é realizado pelo menos uma vez para cada elemento da malha. Logo, deve-se determinar o número de pontos de integração que tenha equilíbrio entre precisão e eficiência. Ou seja, deve-se escolher um número mínimo de pontos de integração de modo que a precisão não seja comprometida.

Logo, escolheu-se usar 3 pontos de integração para a aproximação das integrais no triângulo e as coordenadas dos pontos estão na tabela B.1. Com esse número de pontos, garante-se a solução exata da integração numérica para um polinômio de segunda ordem (Hughes, 1987; Zienkiewicz & Taylor, 2000).

Para o elemento quadrangular foram usados quatro pontos de integração, listados na tabela B.2, o que garante uma solução exata para um polinômio de ordem igual a 3 (Hughes, 1987). Algumas integrais de superfície exigem uma aproximação em elementos de linhas, assim, os pontos que serão utilizados estão listados na tabela B.3. No elemento de

¹ Conforme já explicado na seção A.3, através da técnica de *mapeamento* realiza-se uma transformação de coordenadas do plano físico para o plano transformado, onde os elementos possuem uma forma regular e mesma topologia.

Tabela B.1 – Pontos de Gauss para o elemento triangular.

Ponto	ξ	η	Peso(w_i)
1	1/6	1/6	1/3
2	4/6	1/6	1/3
3	1/6	4/6	1/3

Fonte: Hughes (1987).

linha uma aproximação com dois pontos garante uma solução exata para polinômios de grau 3 (Hughes, 1987).

Tabela B.2 – Pontos de gauss para o elemento quadrangular.

Ponto	ξ	η	Peso(w_i)
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1/4
2	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1/4
3	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1/4
4	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1/4

Fonte: Hughes (1987).

Tabela B.3 – Pontos de gauss para o elemento linear de fronteira.

Ponto	ξ	Peso(w_i)
1	$-1/\sqrt{3}$	1/2
2	$+1/\sqrt{3}$	1/2

Fonte: Hughes (1987).

Vale lembrar que o volume nos elementos bidimensionais é a própria área, enquanto no elemento de linha, ou unidimensional, o volume é o comprimento do mesmo. As dimensões dos elementos no plano transformado são conhecidas, logo o volume $\Delta V^{\xi\eta}$ é igual a 2 para o elemento linear, 1/2 para o elemento triangular e 4 para o elemento quadrangular. Obviamente, esses valores dependem de como são definidas as coordenadas dos vértices dos elementos, que no presente trabalho são as definidas na figura A.4 para os elementos quadrangulares e triangulares. Para o elemento linear definiu-se que as posições dos vértices são $\xi = \pm 1$.

B.3 Conceitos básicos

O MEF tem sua origem no método de Galerkin, que por sua vez tem sua origem no método dos resíduos ponderados. Logo, os conceitos fundamentais do processo de discretização pelo MEF passa por esses métodos, que serão apresentados na sequência.

B.3.1 Método dos resíduos ponderados

Uma maneira de apresentar uma equação diferencial de forma bastante geral é

$$L(u) = f, \quad (\text{B.10})$$

onde u é a função incógnita, $L(\cdot)$ um operador diferencial e f o termo fonte. O operador $L(\cdot)$ representa todas as operações possíveis de serem aplicadas a u de forma a reproduzir qualquer equação diferencial com incógnita u . Essa forma é também bastante conveniente para o entendimento do método dos resíduos ponderados, nesse método define-se o resíduo da equação diferencial como sendo

$$r = L(u) - f, \quad (\text{B.11})$$

onde esse será nulo somente se a solução exata \tilde{u} for substituída na equação.

O método dos resíduos ponderados consiste em obter uma solução aproximada da função incógnita que seja uma combinação linear de um conjunto de funções conhecidas. Esse conjunto de funções é chamado de base de funções teste, e são escolhidos de tal forma que o resíduo da função incógnita seja o mínimo. Assim, a solução numérica teria a forma

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(\mathbf{x}), \quad (\text{B.12})$$

onde \mathbf{x} é o vetor posição, $\psi_i(\mathbf{x})$ são as funções analíticas conhecidas que formam a base de funções teste e a_i são os coeficientes, que devem ser obtidos de forma a minimizar o resíduo r . A escolha das funções teste não deve ser arbitrária, e deve respeitar os seguintes requisitos (Zienkiewicz & Taylor, 2000):

1. Devem respeitar as condições de contorno;
2. Devem ser linearmente independentes;
3. Devem ser contínuas ao longo do domínio de cálculo.

Na verdade, apenas as funções precisam ser contínuas no domínio de cálculo, nenhuma de suas derivadas precisa ser contínua².

Uma vez definida a base de funções teste, a forma de determinar os coeficiente a_i por esse método é impondo que a média dos resíduos ponderados, através de funções peso w_j , é igual a zero no domínio de cálculo Ω . Assim, tem-se que

$$\int_{\Omega} w_j(\mathbf{x}) r(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad (\text{B.13})$$

conhecida como forma fraca (Zienkiewicz & Taylor, 2000), ou integral, da equação diferencial que se deseja resolver. A equação (B.13) na verdade é um conjunto de equações independentes de tamanho igual ao número de funções peso w_j . Como necessita-se determinar n coeficientes a_i , o número de funções peso w_j deve ser também igual a n .

O ponto chave desse método é a escolha das funções peso w_j , que pode ser de forma arbitrária. Essa escolha dará origem a diferentes métodos numéricos derivados do método dos resíduos ponderados. O método de Galerkin é um desses métodos derivados e dará origem ao MEF. Outro método bastante importante derivado do método dos resíduos ponderados é o denominado método dos subdomínios, que dá subsídios para a definição da classe de métodos de volumes finitos.

B.3.2 Método de Galerkin e elementos finitos

Utiliza-se o método de Galerkin quando as funções peso escolhidas são as próprias funções teste utilizadas na aproximação da função incógnita u , ou seja, (Zienkiewicz & Taylor, 2000)

$$w_j(\mathbf{x}) = \psi_i(\mathbf{x}). \quad (\text{B.14})$$

²Matematicamente, diz-se que essas funções precisam ser C_0 contínuas (Zienkiewicz & Taylor, 2000).

De fato, no método de elementos finitos define-se como funções peso as próprias funções teste. Contudo, essa escolha se baseia na malha computacional de elementos que subdividem o domínio de cálculo Ω . Nessa metodologia define-se o número de funções teste, $\psi_i(\mathbf{x})$, igual ao número de nós da malha e que seja igual a 1 no nó i e zero nos outros nós.

O ponto importante do MEF é a forma como cada uma das funções teste são construídas. Essa construção é realizada pela união das funções de forma³ definidas em cada elemento que compartilha o nó i , ou seja,

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_i} N_i^e(\mathbf{x}), \quad (\text{B.15})$$

onde \mathcal{E}_i é o conjunto de elementos que compartilham o nó i ⁴. Dentre as variações da classe de métodos de elementos finitos, esse descrito aqui é conhecido como *elementos finitos padrão*, por ser a primeira variação a ser definida. Uma descrição detalhada do MEF pode ser encontrada em Hughes (1987) e Zienkiewicz & Taylor (2000).

B.4 Discretização do modelo geomecânico

A discretização do modelo geomecânico é realizada na equação de equilíbrio de forças na forma matricial, conforme já comentado no início deste apêndice. Nessa notação, a propriedade de simetria dos tensores é utilizada para diminuir o número de componentes. Assim, a equação de equilíbrio de forças na matriz porosa, em sua forma matricial, é

$$\nabla^T (\boldsymbol{\sigma}' - \alpha P \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Essa equação é a mesma equação (B.2), repetida aqui por conveniência.

A equação (B.16) é formada por duas equações diferenciais parciais, uma para cada direção coordenada. Por essa razão, o método dos resíduos ponderados requer uma função peso para cada equação. Assim,

³As funções de forma definidas para cada elemento considerado no presente trabalho já foram apresentadas na seção 3.2.

⁴O conjunto de elementos que compartilham um nó i , \mathcal{E}_i , é definido na figura 3.5 da seção 3.1 como \mathcal{E}_p . Ao longo do presente trabalho sempre utilizou-se do símbolo p para definir um nó qualquer da malha computacional, mas para manter uma coerência com a simbologia utilizada para o MEF, optou-se por manter o símbolo i para os nós.

pode-se definir um vetor de funções peso na forma

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w^x \\ w^y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

onde w^x e w^y são as funções peso correspondentes as direções coordenadas x e y . Dessa forma é possível chegar a uma formulação fraca, como a equação (B.13), na forma vetorial, dada por

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T [\nabla^T (\boldsymbol{\sigma}' - \alpha P \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g}] d\Omega = 0. \quad (\text{B.18})$$

Realizando algumas manipulações algébricas, utilizando junto o teorema da divergência, encontra-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma}' d\Omega &= \int_{\Omega} [\mathbf{w}^T (\rho \mathbf{g}) + (\nabla \mathbf{w})^T \alpha P \mathbf{I}] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T (\mathbf{t} - \alpha P \mathbf{n}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

onde Γ é a superfície de controle do domínio de cálculo Ω , \mathbf{n} o vetor unitário normal a superfície de controle Γ e \mathbf{t} é o vetor tensão definido como $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

Continuando a discretização, define-se a base de funções teste, exigido pelo método de Galerkin, sendo n funções para cada uma das duas equações de equilíbrio. Assim, tem-se

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\psi}^y \end{pmatrix}_{2n \times 3}, \quad (\text{B.20})$$

onde $\boldsymbol{\psi}^x$ e $\boldsymbol{\psi}^y$ são os vetores formados por cada uma das bases de funções teste correspondentes a cada direção coordenada. Assim, têm-se os vetores formados pelas n funções teste na forma

$$\boldsymbol{\psi}^x = \begin{pmatrix} \psi_1^x \\ \vdots \\ \psi_n^x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\psi}^y = \begin{pmatrix} \psi_1^y \\ \vdots \\ \psi_n^y \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Essa forma matricial da base de funções teste, mostrada na equação (B.20),

é conveniente pelo fato de que também existirão n coeficientes que ponderarão essas funções. Assim, pode-se definir um vetor de coeficientes

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

onde \mathbf{u}_h e \mathbf{v}_h são vetores de coeficientes associados às equações de equilíbrio, com n coeficientes cada um, onde

$$\mathbf{u}_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_h = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

A característica principal do método de Galerkin é a utilização das funções teste também como funções peso na forma fraca da equação de equilíbrio de força, equação (B.19). Logo, o vetor de coeficientes das funções peso terá a mesma estrutura vetorial dos coeficientes da função incógnita \mathbf{u} , sendo

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}^x \\ \mathbf{W}^y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

onde os vetores \mathbf{W}^x e \mathbf{W}^y são definidos como

$$\mathbf{W}^x = \begin{pmatrix} W_1^x \\ \vdots \\ W_n^x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}^y = \begin{pmatrix} W_1^y \\ \vdots \\ W_n^y \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Assim, o vetor função incógnita $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e o vetor função peso $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ são obtidos em qualquer posição \mathbf{x} no domínio de cálculo Ω através de

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{U} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{W}. \quad (\text{B.26})$$

Vale lembrar que $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, já que os coeficientes são valores escalares constantes.

Uma vez definidas as funções incógnita e peso na forma apresentada na equação (B.26), pode-se então substituí-las na forma fraca da equação de equilíbrio de forças, equação (B.19). Contudo, alguns termos dependentes das derivadas das funções teste estão na equação, por isso defini-

se a matriz de derivadas como sendo

$$\mathbf{B} = \nabla \boldsymbol{\psi}^T. \quad (\text{B.27})$$

Logo, as derivadas do vetor função peso pode ser expresso na forma

$$\nabla \mathbf{w} = \mathbf{B} \mathbf{W} \quad \therefore \quad (\nabla \mathbf{w})^T = \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T. \quad (\text{B.28})$$

Além disso, da equação cinemática e da relação constitutiva, equações (B.3) e (B.5), têm-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} = \nabla \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{U} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{U}. \quad (\text{B.29})$$

Finalmente, substituindo as equações (B.26), (B.28) e (B.29) na equação (B.19) obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T (\mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{U}) d\Omega &= \int_{\Omega} [\mathbf{W}^T \boldsymbol{\psi} (\rho \mathbf{g}) + \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T (\alpha P \mathbf{I})] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\psi} (\mathbf{t} - \alpha P \mathbf{n}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Como os vetores \mathbf{W} e \mathbf{U} são constantes, podem ser retirados das integrais, obtendo-se

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \left\{ \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right] \mathbf{U} - \int_{\Omega} [\boldsymbol{\psi} (\rho \mathbf{g}) + \mathbf{B}^T (\alpha P \mathbf{I})] d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi} (\mathbf{t} - \alpha P \mathbf{n}) d\Gamma \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

E ainda, definindo a matriz, conhecida como de rigidez,

$$\mathbb{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{B.32})$$

e o vetor independente

$$\mathbb{F} = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\psi} (\rho \mathbf{g}) + \alpha \mathbf{B}^T P \mathbf{I}] d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi} (\mathbf{t} - \alpha P \mathbf{n}) d\Gamma, \quad (\text{B.33})$$

chega-se em

$$\mathbf{W}^T (\mathbb{K} \mathbf{U} - \mathbb{F}) = 0. \quad (\text{B.34})$$

Considerando que as funções peso são arbitrárias e diferentes de zero, pode-se dizer que a igualdade apresentada na equação anterior somente poderá ser satisfeita se o valor entre parenteses seja igual a zero. Assim, o sistema linear

$$\mathbb{K} \mathbf{U} = \mathbb{F} \quad (\text{B.35})$$

será a solução aproximada do modelo geomecânico, através do método de Galerkin. É importante notar que, como as funções teste não foram definidas, logo o sistema linear anterior esta associado ao método de Galerkin geral. Para que o método de elementos finitos, MEF, seja utilizado, basta que as funções teste, $\boldsymbol{\psi}$, sejam escolhidas na forma da equação (B.15), ou seja, união das funções de forma associadas a um nó em de cada elemento que o compartilha.

A construção das funções teste como sendo a união de funções de forma dos elementos estabelece uma das principais características do MEF na construções do sistema linear da equação (B.35), onde a matriz de rigidez \mathbb{K} e o vetor independente \mathbb{F} também podem ser obtidas através da união de parcelas associadas aos elementos. Isso se traduz matematicamente em

$$\mathbb{K} = \bigcup_{e \in \mathcal{M}^h} \mathbb{K}^e \quad \text{e} \quad \mathbb{F} = \bigcup_{e \in \mathcal{M}^h} \mathbb{F}^e, \quad (\text{B.36})$$

onde \mathcal{M}^h é a malha computacional, a matriz de rigidez associada a um elemento e é

$$\mathbb{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e d\Omega^e \quad (\text{B.37})$$

e o vetor independente associado é

$$\mathbb{F}^e = \int_{\Omega^e} [\mathbf{N}^e \mathbf{b}^e + \alpha (\mathbf{B}^e)^T P^e \mathbf{I}] d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^e (\mathbf{t}^e - \alpha P^e \mathbf{n}) d\Gamma^e. \quad (\text{B.38})$$

O vetor conhecido como de forças de corpo é dado por

$$\mathbf{b}^e = (\rho \mathbf{g})^e \quad (\text{B.39})$$

e a matriz de funções de forma será

$$\mathbb{N}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^e \end{pmatrix}_{2N_n(e) \times 3} \quad e \quad \mathbf{N}^e = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{N_n(e)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

Conforme já mostrado no capítulo 3, $N_n(e)$ é o número de nós associado ao elemento genérico e . Note nas equações (B.37) e (B.38) que as funções teste foram substituídas pelas funções de forma associadas a cada elemento da malha computacional. Outrossim, a mesma função de forma foi utilizada para as equações de equilíbrio de forças em ambas direções.

A matriz de derivadas em cada elemento é

$$\mathbf{B}^e = \nabla(\mathbf{N}^e)^T. \quad (\text{B.41})$$

Além disso, o valor de pressão associado a um elemento será

$$P^e = (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{P}^e, \quad (\text{B.42})$$

o vetor tensão será

$$\mathbf{t}^e = (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e \quad (\text{B.43})$$

e o vetor forças de corpo igual a

$$\mathbf{b}^e = (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b}^e, \quad (\text{B.44})$$

onde \mathbf{P}^e , \mathbf{t}^e e \mathbf{b}^e são vetores que armazenam os valores de pressão, vetor tensão e forças de corpo de todos os nós associados ao elemento e . Portanto, o vetor \mathbf{P}^e tem dimensão igual a $N_n(e)$, enquanto os vetores \mathbf{t}^e e \mathbf{b}^e têm dimensão $2N_n(e)$, pois esses possuem duas componentes associadas a cada nó.

Apesar das integrais das equações (B.37) e (B.38) poderem ser determinadas de forma exata para elementos triangulares, essa premissa não é válida para os elementos quadrangulares. Visando uniformizar o algoritmo de cômputo dessa integrais para qualquer tipo de elemento, optou-se por determiná-las todas de forma numérica através da quadratura de

Gauss, expressa pela equação (B.9). Logo, tem-se

$$\mathbb{K}^e \approx \Delta V^{\xi\eta} \sum_{p=1}^{n_p} (\mathbf{B}_p^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}_p^e |\mathbf{J}_p| w_p \quad (\text{B.45})$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^e = \Delta V^{\xi\eta} \sum_{p=1}^{n_p} \left(\mathbf{N}_p^e (\mathbf{N}_p^e)^T \mathbf{b}^e + \alpha (\mathbf{B}_p^e)^T P_p^e \mathbf{I} \right) |\mathbf{J}_p| w_p \\ + \Delta \mathbf{S}^{\xi\eta} \sum_{q=1}^{n_q} \mathbf{N}_q^e \left((\mathbf{N}_q^e)^T \mathbf{t}^e - \alpha P_q^e \mathbf{n} \right) |\mathbf{J}_q| w_q, \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

onde $\Delta V^{\xi\eta}$ é o volume do elemento e no espaço transformado, $\Delta \mathbf{S}^{\xi\eta}$ é a área de uma das arestas do elemento e, p um ponto de Gauss associado a um elemento volumétrico, triangular ou quadrangular, e q um ponto de Gauss associado a um elemento linear de fronteira. Vale lembrar que o último termo da equação (B.46) será nulo nos elementos internos, pois são cancelados entre dois volumes que compartilham uma aresta. Logo, esse termo existirá apenas nas arestas que fazem parte do contorno, e possuem um elemento linear associado.

É importante notar que, as condições de contorno de tensão já são consideradas através do último termo da equação (B.46), onde este está associado ao vetor tensão discreto \mathbf{t}^e e o valor de pressão da fronteira. Essa formulação, onde há um termo de pressão associado à fronteira, é conhecida como *total stress formulation* (Gambolati *et al.*, 2001), e foi escolhida por ser a formulação que se equipara com a discretização do EbFVM, método que será comparado. Essa escolha permite que a comparação seja justa entre os métodos, de forma a comparar formulações concordantes, embora sejam em métodos diferentes.

Soluções analíticas

Neste apêndice tem-se como objetivo apresentar as soluções analíticas relativas aos problemas utilizados na validação da metodologia. As equações são demonstradas de modo direto, isto é, sem o detalhamento quanto à obtenção das mesmas.

C.1 Problema de Terzaghi

Para o problema de Terzaghi são apresentadas as soluções analíticas para a pressão e o deslocamento vertical, onde ambas as variáveis se apresentam como funções do tempo e do espaço (sendo este último representado pela coordenada y na coluna, considerando a unidimensionalidade do problema). As soluções foram desenvolvidas considerando a origem do sistema de coordenadas no topo da coluna, com o eixo y posicionado em direção à base da mesma. As informações que seguem foram retiradas de Wang (2000).

Considera-se uma coluna de altura H , sobre a qual é aplicada uma carga $-\sigma_0$. A pressão na condição de equilíbrio inicial ($t = 0^+$), após

aplicação instantânea da carga, pode ser calculada através de

$$p_0 = \gamma \sigma_0, \quad (C.1)$$

onde γ denomina-se eficiência do carregamento, e é calculado por

$$\gamma = \frac{B(1 + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)}, \quad (C.2)$$

onde B é o coeficiente de Skempton. Este coeficiente é medido em uma condição não drenada, ou seja, depende de características físicas da matriz porosa e do fluido. Segundo Wang (2000), fisicamente, o coeficiente é a medida de como a tensão aplicada em um meio poroso é distribuída entre o fluido e a matriz porosa.

Já a solução para a pressão, então, é

$$p(y, t) = \frac{4\gamma\sigma_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \exp\left[\frac{-(2j+1)^2 \pi^2 c t}{4H^2}\right] \sin\left[\frac{(2j+1)\pi y}{2H}\right], \quad (C.3)$$

onde c , denominado como coeficiente de consolidação ou difusividade hidráulica uniaxial, é dado por

$$c = \frac{3k_{ii}\gamma K(1 + \nu)}{\mu\alpha(1 - \nu)}. \quad (C.4)$$

O módulo de compressão volumétrica drenado K é uma característica exclusiva da matriz porosa e representa a variação da deformação volumétrica da matriz porosa em função da variação da carga aplicada (Wang, 2000).

O deslocamento vertical, na condição de equilíbrio inicial ($t = 0^+$), pode ser calculado por

$$v_0(y, 0^+) = \frac{\sigma_0(1 + \nu_u)(H - y)}{3K_u(1 - \nu_u)}, \quad (C.5)$$

onde K_u é o módulo de compressão volumétrica não drenado (*undrained*). É importante salientar que este módulo tem a mesma definição que K , com a diferença de que sua medição é realizada sem a retirada do fluido, ou seja, uma característica dependente do conjunto fluido e matriz porosa.

A solução para o deslocamento vertical, então, é

$$v(y, t) = v_0 + \frac{\gamma \sigma_0 \alpha (1 + \nu)}{3K(1 - \nu)} \left\{ (H - y) - \frac{8H}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j + 1)^2} \exp \left[\frac{-(2j + 1)^2 \pi^2 c t}{4H^2} \right] \cos \left[\frac{(2j + 1) \pi y}{2H} \right] \right\}. \quad (C.6)$$

Uma propriedade recorrente nas expressões apresentadas anteriormente é o ν_u . Essa propriedade é conhecida como coeficiente de Poisson não drenado, pois é medido nessa condição. Obviamente, esse coeficiente de Poisson é referente ao conjunto fluido-matriz porosa e tem uma relação com o coeficiente de Poisson da rocha porosa (ν).

As definições matemáticas e interpretações físicas de todas as propriedades e módulos citados neste apêndice podem ser encontradas em detalhes nos trabalhos de Dal Pizzol (2014) e Tonelli (2016). Outrossim, ambos trabalhos basearam suas deduções no livro de Wang (2000), que é dedicado ao fenômeno da poroelasticidade.

C.2 Problema de Terzaghi com duas camadas

No problema de Terzaghi com uma coluna formada por duas camadas de materiais diferentes há apenas solução para a pressão do fluido, e esta foi obtida por Verruijt (2013). Nesse trabalho o autor considerou uma coluna com dois materiais de compressibilidades e permeabilidades diferentes. A origem do sistema de coordenadas localiza-se na interface entre os diferentes materiais. Assim, utilizou-se o índice 1 para referir-se à propriedades do material poroso da camada inferior e 2 para o material da camada superior.

A solução da camada inferior, ou para $y < 0$, é

$$\frac{p(y, t)}{p_0} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(A_j) \cos(A_j y/h_1) \exp(-A_j^2 t/t_1)}{R_j} - \frac{\sin(A_j) \sin(A_j y/h_1) \exp(-A_j^2 t/t_1)}{R_j} \right\}, \quad (C.7)$$

por outro lado a solução para a camada superior, ou $y > 0$ é

$$\frac{p(y, t)}{p_0} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(A_j) \cos(\beta A_j y / h_2) \exp(-A_j^2 t / t_2)}{R_j} - \frac{\omega \sin(A_j) \sin(\beta A_j y / h_2) \exp(-A_j^2 t / t_2)}{R_j} \right\}, \quad (C.8)$$

onde

$$R_j = A_j [(1 - \omega\beta) \cos(\beta A_j) \sin(A_j) + (\omega + \beta) \sin(\beta A_j) \cos(A_j)], \quad (C.9)$$

ω é uma relação de compressibilidades e permeabilidades do meio poroso e β é uma constante dependente dos tempos de consolidação

$$t_1 = \frac{h_1^2}{c_1} \quad (C.10)$$

e

$$t_2 = \frac{h_2^2}{c_2} \quad (C.11)$$

na forma

$$\beta = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}. \quad (C.12)$$

C.3 Problema de Mandel

Para o problema de Mandel são apresentadas as soluções analíticas para a pressão, tensão vertical, deslocamento vertical e deslocamento horizontal. As quatro soluções definem as variáveis como funções do tempo e do espaço, sendo que, no caso na pressão, da tensão vertical e do deslocamento horizontal, tem-se uma variação apenas ao longo do eixo x da amostra, enquanto no caso do deslocamento vertical, ao longo do eixo y . Em outras palavras, apesar deste ser um problema bidimensional, tem-se um comportamento unidimensional para as quatro variáveis.

As informações que seguem foram retiradas de Abousleiman *et al.* (1996), sendo a simbologia adaptada para a utilizada neste trabalho. Um desenho esquemático do problema pode ser encontrado na figura 5.31.

As expressões que definem a solução analítica para cada variável são: para a pressão,

$$p(x, t) = \frac{2FB(1 + \nu_u)}{3L} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \left[\cos\left(\frac{A_j x}{L}\right) - \cos(A_j) \right] \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right\}, \quad (C.13)$$

para a tensão vertical,

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, t) = & -\frac{2F(\nu_u - \nu)}{L(1 - \nu)} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \\ & \left. \cos\left(\frac{A_j x}{L}\right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] - \frac{F}{L} + \\ & + \frac{2F}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right], \end{aligned} \quad (C.14)$$

para o deslocamento horizontal,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left\{ \frac{F\nu}{2GL} - \frac{F\nu_u}{GL} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \right. \\ & \left. \left. \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] \right\} x + \frac{F}{G} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \\ & \left. \sin\left(\frac{A_j x}{L}\right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] \end{aligned} \quad (C.15)$$

e para o deslocamento vertical,

$$v(y, t) = \left\{ \frac{F(1 - \nu_u)}{GL} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] - \frac{F(1 - \nu)}{2GL} \right\} y, \quad (C.16)$$

onde A_j representa as raízes da equação

$$\frac{\tan(A_j)}{A_j} = \frac{1 - \nu}{\nu_u - \nu}, \quad (\text{C.17})$$

F é a força aplicada na fronteira superior do domínio e L a largura do domínio retangular.

Número de iterações

Neste apêndice estão dispostos os números de iterações realizadas pela metodologia em cada um dos problemas resolvidos. Primeiro serão apresentados aqueles referentes ao problema de Terzaghi e na sequência os referentes ao problema de Mandel. No problema de Mandel, há ainda o procedimento iterativo na fronteira, cujo número de iterações também será informado.

D.1 Problema de Terzaghi

Na simulação do problema de Terzaghi dois pontos importantes foram constatados. O primeiro é que todas as malhas de um mesmo grupo mantiveram o mesmo número de iterações. O segundo é que apesar de o número de iterações ser sempre igual a 19 para o primeiro nível de tempo, após 10 níveis de tempo esse número diminuiu para um valor e permaneceu constante ao longo de todo o transiente. Assim, optou-se em informar apenas esse número de iterações que permaneceu constante para cada grupo de malhas, variando o passo de tempo. Logo, nas tabelas D.1 e D.2 podem ser observados o número de iterações que permaneceu

constante ao longo do transiente para os tipos de malhas de quadriláteros e triangulares, respectivamente.

Tabela D.1 – Número de iterações nas malhas de quadriláteros. Problema de Terzaghi.

Δt (s)	Nº de Iterações
1	16
0.5	15
0.25	14
0.1	13
0.05	12
0.025	11
0.01	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela D.2 – Número de iterações nas malhas de triângulos. Problema de Terzaghi.

Δt (s)	Nº de Iterações
1	16
0.5	15
0.25	14
0.1	13
0.05	11
0.025	10
0.01	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas malhas híbridas o número de iterações no primeiro nível de tempo variou de acordo com o passo de tempo empregado. Assim, na tabela D.3 pode-se observar o número de iterações inicial, relativo ao primeiro nível de tempo, e o número de iterações que permaneceu constante ao longo do transiente do problema.

Tabela D.3 – Número de iterações nas malhas híbridas. Problema de Terzaghi.

Δt (s)	Nº It. Inicial	Nº de Iterações
1	19	16
0.5	19	15
0.25	19	14
0.1	21	13
0.05	25	11
0.025	28	10
0.01	30	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

D.2 Problema de Mandel

O problema de Mandel, como mostrado no capítulo 5, possui um procedimento iterativo para atualização da condição de contorno na fronteira. Dentro desse ciclo iterativo está o procedimento iterativo de acoplamento entre os fenômenos físicos. Assim, nas tabelas seguintes, serão denotados por **Nº It_b** o número de iterações na condição de contorno da fronteira, **Nº It_i** o número de iterações de acoplamento inicial (Na primeira iteração da fronteira) e **Nº It_f** o número de iterações de acoplamento final (Na última iteração de fronteira). A tabela D.4 mostra esses números de iteração para a malha de quadriláteros, a tabela D.5 para a malha de triângulos e a tabela D.6 para a malha híbrida.

Tabela D.4 – Número de iterações nas malhas de quadriláteros. Problema de Mandel.

Δt (s)	Nº It _b	Nº It _i	Nº It _f
1	9	17	3
0.5	8	15	4
0.25	7	14	5
0.1	6	12	4

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante saber que, assim como no problema de Terzaghi, os primeiros níveis de tempo tiveram um número de iterações maior que

Tabela D.5 – Número de iterações nas malhas de triangulares. Problema de Mandel.

Δt (s)	Nº It _b	Nº It _i	Nº It _f
1	9	17	3
0.5	8	16	3
0.25	8	15	3
0.1	6	14	4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela D.6 – Número de iterações nas malhas híbridas. Problema de Mandel.

Δt (s)	Nº It _b	Nº It _i	Nº It _f
1	7	22	3
0.5	6	20	4
0.25	6	19	2
0.1	4	17	4

Fonte: Elaborada pelo autor.

o apresentado nas tabelas. No entanto, mais de 90% do transiente do problema de Mandel os números de iteração se mantiveram constantes e iguais aos valores listados nas tabelas.