

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Riciêri Tonelli

**ESTRATÉGIAS PARA TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO
ESCOAMENTO/GEOMECÂNICA UTILIZANDO VOLUMES FINITOS**

Florianópolis

2016

Riciêri Tonelli

**ESTRATÉGIAS PARA TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO
ESCOAMENTO/GEOMECÂNICA UTILIZANDO VOLUMES FINITOS**

Dissertação submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
para a obtenção do grau de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Clovis R. Maliska

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Tonelli, Riciêri
Estratégias para tratamento do acoplamento
escoamento/geomecânica utilizando volumes finitos / Riciêri
Tonelli ; orientador, Clovis R. Maliska - Florianópolis,
SC, 2016.
166 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Poroelasticidade. 3.
Acoplamento escoamento/geomecânica. 4. Método dos volumes
finitos. 5. Arranjo desencontrado. I. Maliska, Clovis R..
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Riciêri Tonelli

**ESTRATÉGIAS PARA TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO
ESCOAMENTO/GEOMECÂNICA UTILIZANDO VOLUMES FINITOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 07 de Março 2016.

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.Eng., Coordenador do Curso

Clovis R. Maliska, Ph.D., Orientador

BANCA EXAMINADORA

Antônio Fábio C. da Silva, Dr.Eng.

Eduardo A. Fancello, Dr.Eng.

Emilio E. Paladino, Dr.Eng.

*A Alice e Gerônimo Tonelli, por todo o
amor e carinho.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor Maliska, não apenas pela indispensável orientação, mas também pelo zelo com que passa sua experiência e sabedoria aos alunos objetivando despertar nos mesmos a curiosidade e o carinho que possui pelo conhecimento.

Aos funcionários, colegas e ex-colegas de laboratório pela prestatividade, companheirismo e empatia nos momentos de dificuldade. Devo a vocês grande parte do conhecimento adquirido durante o período de desenvolvimento deste trabalho.

Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina por me proporcionar as condições necessárias para a realização do curso de mestrado.

À empresa Petrobras pelo financiamento deste trabalho de pesquisa através de uma bolsa de estudos.

À minha noiva Kathiely, a qual já há nove anos me inspira pela sua força e persistência na corrida atrás de nossos sonhos.

Aos meus pais, Alice e Gerônimo Tonelli, e ao meu irmão, Giuzépe Tonelli, por todo o apoio e incentivo dados às minhas decisões.

Aos amigos Renan Galante e Daniel Plucenio pela recepção nesta outrora desconhecida Florianópolis e pela forte amizade nascida de nosso obstinado grupo de estudos.

*“Não são as respostas que movem o mundo,
são as perguntas.”*

Canal Futura

SUMÁRIO

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvii
Resumo	xxi
Abstract	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Motivação	3
1.3 Revisão bibliográfica	4
1.4 Objetivos	8
1.5 Organização do trabalho	9
2 Teoria da poroelasticidade	11
2.1 Teoria da consolidação de Biot	12
2.1.1 Condições de equilíbrio do campo de tensões	12
2.1.2 Equações governantes da poroelasticidade	16
2.2 Extensão da teoria da poroelasticidade por Rice & Cleary (1976)	17
2.2.1 Comportamento drenado	17
2.2.2 Comportamento não drenado	18
2.2.3 Definição de novas propriedades para o meio poroso	19
2.3 Formulação micromecânica	20
2.3.1 Resposta volumétrica de um meio poroso ideal	22
3 Modelo matemático	25
3.1 Modelo geomecânico	25

3.2	Modelo de escoamento	28
3.3	Não-linearidades	30
4	Métodos de acoplamento entre o escoamento e a geomecânica	33
4.1	Parâmetros de acoplamento	33
4.2	Métodos de acoplamento	34
4.2.1	Solução segregada/uma direção	36
4.2.2	Solução segregada/ambas as direções	39
4.2.3	Solução simultânea	41
5	Formulação numérica	45
5.1	Discretização do domínio	46
5.2	Discretização das equações	47
5.2.1	Modelo de escoamento	47
5.2.1.1	Solução segregada	50
5.2.1.2	Solução simultânea	51
5.2.2	Modelo geomecânico	52
5.2.2.1	Solução segregada	55
5.2.2.2	Solução simultânea	57
5.2.3	Não linearidades	58
5.3	Condições de contorno	58
5.3.1	Modelo de escoamento	59
5.3.1.1	Pressão prescrita (condição de Dirichlet)	59
5.3.1.2	Fluxo prescrito (condição de Neumann)	60
5.3.2	Modelo geomecânico	61
5.3.2.1	Deslocamento prescrito (condição de Dirichlet)	61
5.3.2.2	Tensão prescrita (condição de Neumann)	63
5.4	Critério de convergência	65
6	Resultados	67
6.1	Problema de Terzaghi	68
6.1.1	Acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo	73
6.1.1.1	Solução do problema	73
6.1.1.2	Análise de erros e da taxa de convergência	75
6.1.1.3	Análise da não-linearidade	88
6.1.2	Acoplamento segregado/uma direção	90

6.1.2.1	Solução do problema	92
6.1.2.2	Análise de erros e da taxa de convergência	92
6.1.3	Comparação entre os métodos de acoplamento	95
6.2	Problema de Mandel	103
6.2.1	Acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo	112
6.2.1.1	Solução do problema	113
6.2.1.2	Análise de erros e da taxa de convergência	118
6.2.2	Acoplamentos segregado/uma direção	130
6.2.2.1	Solução do problema	131
6.2.2.2	Análise de erros e da taxa de convergência	133
6.2.3	Comparação entre os métodos de acoplamento	137
7	Conclusões	145
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	148
	Referências Bibliográficas	149
A	Correlacionamento entre propriedades poroelásticas	159
A.1	Propriedades poroelásticas para o conjunto fluido-estrutura	160
A.2	Propriedades poroelásticas para o conjunto fluido-estrutura e micromecânicas	160
A.3	Propriedades poroelásticas para um meio poroso ideal	161
B	Soluções analíticas	163
B.1	Problema de Terzaghi	163
B.2	Problema de Mandel	164

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Representação esquemática do meio poroso.....	2
Figura 2.1	Tensor tensão. O primeiro subscrito refere-se à direção da normal à face, o segundo refere-se à direção da força.	13
Figura 2.2	Desenho esquemático representando o comportamento drenado de um meio poroso.....	18
Figura 2.3	Desenho esquemático representando o comportamento não drenado de um meio poroso.	19
Figura 2.4	Desenho esquemático representando a pressão p' . P_c representa a pressão de confinamento e p a pressão de poro.....	21
Figura 4.1	Esquema representando a interação entre o escoamento de um fluido e a geomecânica em um reservatório deformável.	34
Figura 4.2	Fluxograma do método segregado/uma direção.	37
Figura 4.3	Fluxograma do método segregado/ambas as direções. ..	40
Figura 4.4	Fluxograma do método simultâneo.....	42
Figura 5.1	Posicionamento das variáveis sobre a malha computacional.	47
Figura 5.2	Volume de controle para a pressão e seus vizinhos.....	48
Figura 5.3	Volume de controle para a pressão com os deslocamentos devidamente posicionados sobre suas faces.	50
Figura 5.4	Volume de controle para a componente u do deslocamento e seus vizinhos.	53

Figura 5.5	Volume de controle para a componente u do deslocamento com a pressão devidamente posicionada sobre suas faces.....	54
Figura 5.6	Volume de controle para a componente v do deslocamento e seus vizinhos.....	55
Figura 5.7	Volumes de controle para a pressão localizados na fronteira esquerda do domínio. (a) Pressão prescrita. (b) Fluxo prescrita.....	59
Figura 5.8	Volumes de controle para a componente u do deslocamento localizados na fronteira esquerda e na fronteira inferior do domínio. (a) Deslocamento prescrita. (b) Tensão normal prescrita. (c) Tensão de cisalhamento prescrita.....	62
Figura 6.1	Diagrama esquemático do problema de Terzaghi com as condições de contorno. (a) Problema para a condição de equilíbrio em $t = 0^+$. (b) Problema transiente.....	70
Figura 6.2	Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 5×25 volumes.....	72
Figura 6.3	Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 5×25 volumes.....	72
Figura 6.4	Acoplamento segregado/ambas as direções: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 13×65 volumes.....	74
Figura 6.5	Acoplamento simultâneo: perfis de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 13×65 volumes.....	74
Figura 6.6	Comparação entre as soluções numéricas e a analítica da pressão na base da coluna. Utilizados $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 13×65 volumes.....	75
Figura 6.7	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do	

	erro da pressão no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.	77
Figura 6.8	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.	78
Figura 6.9	Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.	79
Figura 6.10	Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.	79
Figura 6.11	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.	81
Figura 6.12	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.	82
Figura 6.13	Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.	82
Figura 6.14	Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.	83
Figura 6.15	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão vs. tempo. Utilizada uma malha com 13×65 volumes.	84
Figura 6.16	Acoplamento segregado/ambas as direções: erro da pressão ao longo da coluna. Utilizados $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.	84
Figura 6.17	Acoplamento segregado/ambas as direções: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 2×10 volumes.	86
Figura 6.18	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical vs. tempo. Utilizada uma malha com 13×65 volumes.	87

Figura 6.19	Perfis de porosidade ao longo da coluna. Utilizados $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.....	88
Figura 6.20	Porosidade na base da coluna vs. tempo. Utilizados $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.....	89
Figura 6.21	Acoplamento segregado/ambas as direções: perfis de pressão obtidos utilizando porosidade atualizada e porosidade constante. Utilizados $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.	89
Figura 6.22	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão vs. tempo. Porosidade atualizada vs. porosidade constante. Utilizada uma malha com 13×65 volumes.	90
Figura 6.23	Acoplamento segregado/uma direção: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.	93
Figura 6.24	Acoplamento segregado/uma direção: perfis de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.	93
Figura 6.25	Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da pressão no tempo de $100s$ vs. comprimento característico da malha.....	94
Figura 6.26	Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da pressão no tempo de $100s$ vs. tamanho do passo de tempo.	94
Figura 6.27	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de $100s$ vs. comprimento característico da malha.....	96
Figura 6.28	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de $100s$ vs. comprimento característico da malha.	96
Figura 6.29	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de $100s$ vs. tamanho do passo de tempo.....	97

Figura 6.30	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.....	98
Figura 6.31	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão vs. tempo. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 13×65 volumes.	99
Figura 6.32	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical vs. tempo. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 13×65 volumes.	99
Figura 6.33	Comparação entre os métodos de acoplamento: tempo de CPU vs. número de volumes da malha. Utilizado $\Delta t = 0,5s$	101
Figura 6.34	Diagrama esquemático do problema de Mandel com as condições de contorno. (a) Problema de Mandel. (b) Problema para a condição de equilíbrio em $t = 0^+$. (b) Problema transiente.	104
Figura 6.35	Problema de Mandel. Volume de controle adjacente à fronteira superior do domínio sobre o qual é realizada a discretização da equação de equilíbrio na direção y	107
Figura 6.36	Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de tensão vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0 s$ e uma malha com 13×13 volumes.....	110
Figura 6.37	Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 1,0 s$ e uma malha com 13×13 volumes.	110
Figura 6.38	Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0 s$ e uma malha com 13×13 volumes.	111
Figura 6.39	Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de deslocamento horizontal obtidos utilizando $\Delta t = 1,0 s$ e uma malha com 13×13 volumes.....	111
Figura 6.40	Comparação entre as soluções numéricas e a analítica da pressão na fronteira esquerda do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	114

Figura 6.41	Perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	114
Figura 6.42	Comparação entre as soluções numéricas e a analítica da tensão vertical nas fronteiras esquerda e direita do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	115
Figura 6.43	Perfis de tensão vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	115
Figura 6.44	Comparação entre as soluções numéricas e a analítica do deslocamento vertical na fronteira superior do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	116
Figura 6.45	Perfis de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	117
Figura 6.46	Comparação entre as soluções numéricas e a analítica do deslocamento horizontal na fronteira direita do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	117
Figura 6.47	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	118
Figura 6.48	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	120
Figura 6.49	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	120
Figura 6.50	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	121
Figura 6.51	Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	121

Figura 6.52	Acoplamento simultâneo: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	122
Figura 6.53	Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	122
Figura 6.54	Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	123
Figura 6.55	Pontos de maior precisão para o cálculo da função $u(x)$ e de seu gradiente em um problema unidimensional utilizando o método dos elementos finitos.	124
Figura 6.56	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	125
Figura 6.57	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	126
Figura 6.58	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	126
Figura 6.59	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	127
Figura 6.60	Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	127
Figura 6.61	Acoplamento simultâneo: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	128
Figura 6.62	Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	128
Figura 6.63	Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo	

	de tempo.	129
Figura 6.64	Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão vs. tempo. Utilizada uma malha com 28×28 volumes.	129
Figura 6.65	Comparação entre as soluções numéricas e a analítica do deslocamento horizontal na fronteira direita do domínio. Utilizados $\Delta t = 1000, 0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	130
Figura 6.66	Acoplamento segregado/uma direção: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 1, 0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	131
Figura 6.67	Acoplamento segregado/uma direção: comparação entre as solução numérica e analítica da pressão na fronteira esquerda do domínio. Utilizados $\Delta t = 1, 0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	132
Figura 6.68	Acoplamento segregado/uma direção: comparação entre as solução numérica e analítica da pressão na fronteira esquerda do domínio. Utilizados $\Delta t = 10, 0s$ e uma malha com 28×28 volumes.	132
Figura 6.69	Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da pressão no tempo de $200s$ vs. comprimento característico da malha.	133
Figura 6.70	Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da tensão vertical no tempo de $200s$ vs. comprimento característico da malha.	134
Figura 6.71	Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de $200s$ vs. comprimento característico da malha.	134
Figura 6.72	Acoplamento segregado/uma direção: curvas ajustadas para a norma do erro da pressão no tempo de $200s$ vs. tamanho do passo de tempo.	135
Figura 6.73	Acoplamento segregado/uma direção: curvas ajustadas para a norma do erro da tensão vertical no tempo de $200s$ vs. tamanho do passo de tempo.	136

Figura 6.74	Acoplamento segregado/uma direção: curvas ajustadas para a norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.....	136
Figura 6.75	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.....	138
Figura 6.76	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	138
Figura 6.77	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.	139
Figura 6.78	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.....	139
Figura 6.79	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.....	140
Figura 6.80	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	141
Figura 6.81	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.....	141
Figura 6.82	Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.	142
Figura 6.83	Comparação entre os métodos de acoplamento: tempo de CPU vs. número de volumes da malha. Utilizado $\Delta t = 1,0s$	144

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1	Dados para o problema de Terzaghi.	71
Tabela 6.2	Propriedades referentes a rocha arenito Berea.	71
Tabela 6.3	Malhas utilizadas para a análise do refino de malha (h_p e h_v representam, respectivamente, os comprimentos característicos referentes à pressão e ao deslocamento vertical).	77
Tabela 6.4	Malhas utilizadas para a análise do tempo de CPU em função do número de volumes da malha na simulação do problema de Terzaghi.	100
Tabela 6.5	Dados de entrada utilizados para o problema de Mandel.	109
Tabela 6.6	Malhas utilizadas para a análise do refino de malha (h_p , h_v e h_u representam, respectivamente, os comprimentos característicos referentes à pressão, ao deslocamento vertical e ao deslocamento horizontal).	119
Tabela 6.7	Malhas utilizadas para a análise do tempo de CPU em função do número de volumes da malha na simulação do problema de Mandel.	143

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

c	Coefficiente de consolidação ou difusividade hidráulica uniaxial
g_i	Componente do vetor gravidade na direção i
\mathbf{g}	Vetor gravidade
h_p	Comprimento característico da malha para a pressão
h_u	Comprimento característico da malha para o deslocamento horizontal
h_v	Comprimento característico da malha para o deslocamento vertical
k_{ii}	Componente da diagonal principal do tensor permeabilidade absoluta
\mathbf{k}	Tensor permeabilidade absoluta
p	Pressão de poro
p'	Π - <i>pressure</i>
q	Termo fonte
q_f''	Fluxo de fluido
u	Componente do deslocamento na direção x
v	Componente do deslocamento na direção y
v_i	Componente do vetor velocidade na direção i
\mathbf{v}	Vetor velocidade de Darcy
w	Componente do deslocamento na direção z
B	Coefficiente de Skempton
\mathbf{C}	Matriz constitutiva
E	Módulo de Young ou módulo de elasticidade
G	Módulo de cisalhamento
H	Constante de expansão poroelástica
K	Módulo de compressão volumétrica (drenado)

K_f	Módulo de compressão volumétrica do fluido
K_p	Módulo de compressão volumétrica dos poros
K_s	Módulo de compressão volumétrica dos grãos sólidos
K'_s	Módulo de compressão volumétrica não encamisado
K''_s	Módulo de compressão volumétrica dos poros não encamisado
K_u	Módulo de compressão volumétrica não drenado
P_c	Pressão de confinamento
P_d	Pressão diferencial
Q	Coefficiente de armazenagem específico com fronteiras fixas
R	Coefficiente de armazenagem específico sem restrições de movimento nas fronteiras
V	Volume da amostra
V_f	Volume do fluido
V_p	Volume dos poros interconectados
V_s	Volume combinado entre a matriz sólida e os poros isolados

Símbolos gregos

α	Coefficiente de Biot
δ	Delta de Kronecker
ϵ	Erro
ε	Deformação volumétrica
ε_{ii}	Deformação normal
ε_{ij}	Deformação cisalhante
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação
ζ	Incremento do conteúdo de fluido
λ	Primeiro parâmetro de Lamé
μ	Viscosidade
ν	Coefficiente de Poisson (drenado)
ν_u	Coefficiente de Poisson não drenado
ρ	Densidade do meio poroso
ρ_s	Densidade dos grãos sólidos
ρ_f	Densidade do fluido
$\bar{\sigma}$	Tensão total média ou tensão hidrostática
σ'	Tensão efetiva

σ_{ii}	Tensão normal
σ_{ij}	Tensão cisalhante
σ	Tensor tensão
σ'	Tensor tensão efetiva
ϕ	Porosidade do meio

RESUMO

Um dos grandes desafios da simulação numérica de escoamentos em reservatórios é a forma de considerar como os fenômenos geomecânicos influenciam o escoamento. Este é um problema que envolve fenômenos físicos bastante distintos e que, muitas vezes, necessita de uma solução acoplada entre o escoamento e a geomecânica. O objetivo deste trabalho se encontra, então, no estudo de diferentes formas matemáticas de se tratar o acoplamento entre o escoamento e a geomecânica utilizando o método dos volumes finitos para a solução de ambos os problemas. Estabelecidos os modelos matemáticos e as discretizações dos dois problemas, o trabalho analisa os métodos de acoplamento segregado/uma direção, segregado/ambas as direções e simultâneo, sendo utilizada uma malha cartesiana ortogonal para a discretização do domínio e um arranjo desencontrado para o posicionamento das variáveis na malha. Considera-se a porosidade, neste trabalho, como uma não-linearidade do problema. Dois problemas clássicos de subsidência que apresentam solução analítica, os problemas de Terzaghi e Mandel, são resolvidos para avaliar as diferentes estratégias de acoplamento. Observa-se que determinadas modificações na configuração do método segregado/uma direção, em relação às configurações comumente encontradas na literatura, mostram-se necessárias para sua correta utilização. A comparação entre os procedimentos é feita considerando-se os erros na solução e tempo de CPU consumido na simulação. Conclui-se que o método segregado/uma direção se mostra como o mais rápido dos estudados, apresentando porém, como esperado, maiores erros das soluções e maior sensibilidade ao tamanho do passo de tempo utilizado. O método simultâneo se mostra como o intermediário no quesito tempo de CPU despendido e resulta em soluções muito próximas das analíticas. O método segregado/ambas as direções, por fim, se apresenta como o mais dispendioso dos três e resulta em soluções praticamente coincidentes com as do simultâneo.

ABSTRACT

One of the greatest challenges in petroleum reservoir numerical simulation is how to consider the influence of geomechanical phenomenon in the flow. This is a problem that involves very distinct physical phenomena and often needs a coupled solution between the flow and the geomechanics problems. The goal of this thesis, then, is to study different mathematical methods for dealing with the flow/geomechanics coupling problem while employing the finite volume method to solve both problems. Having been established the mathematical models and the discretization of both problems, the one-way or explicit coupling, iterative coupling and full coupling methods are analyzed. It is used an orthogonal cartesian grid for the domain discretization and a staggered variable arrangement. The porosity is considered as a nonlinearity in this research. Two classical subsidence problems with analytical solutions, Terzaghi's and Mandel's problems, are solved to evaluate the different coupling strategies. Certain changes in the configuration of the one-way coupling, in relation to the ones commonly found in the literature, are needed for its correct usage. The comparisons between the methods are done considering the solution error and the CPU time spent for the simulations. It is concluded that the one-way coupling method is the fastest, but the one that results in the biggest solution errors and the one most affected by the size of the time step used, as expected. The full coupling method stays in the middle concerning the CPU time spent and results in numerical solutions very close to the analytical ones. Finally, the iterative coupling method is the most computationally expensive of the studied and results in solutions almost identical to the ones computed with the full coupling method.

INTRODUÇÃO

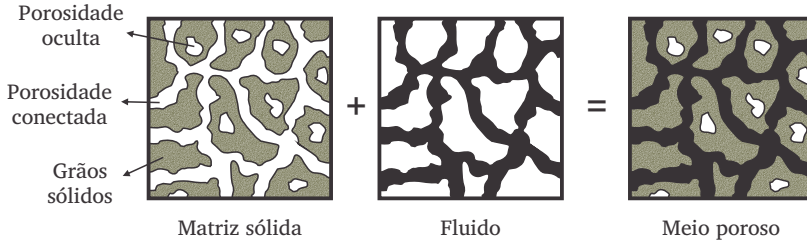
1.1 Considerações iniciais

São vários os problemas na engenharia que envolvem diferentes fenômenos físicos e que, em função disso, acabam por apresentar uma complexidade maior para o entendimento, estabelecimento dos modelos matemáticos e numéricos e suas soluções. Muitas vezes é possível realizar hipóteses que desacoplam os fenômenos, o que facilita a obtenção de uma solução. Por outro lado, tais simplificações podem acarretar em erros não admissíveis e, nesses casos, é necessária a busca por uma solução acoplada que considere a interação entre os vários fenômenos. É dentro dessa classe de problemas que se encontra o da compactação de um meio poroso em um reservatório de petróleo devido à extração do óleo, o qual envolve os fenômenos do escoamento de fluidos e da deformação mecânica das rochas.

A rocha reservatório onde se encontra armazenado o óleo é composta, basicamente, por duas partes: pela matriz sólida, formada por grãos, e pelos poros, preenchidos por fluidos (podendo se encontrar nas fases líquida e/ou gasosa), conforme observado na figura 1.1. Considerando que os reservatórios estão localizados a uma distância considerável abaixo da superfície, há várias camadas de solo localizadas sobre os mesmos, sendo que o peso dessas camadas precisa ser suportado pelo meio poroso do reservatório. Esta carga é suportada parte pela matriz sólida e parte pelo

fluido presente nos poros.

Figura 1.1 – Representação esquemática do meio poroso.



Fonte: adaptado de Falcão (2002).

A rocha reservatório sofre, portanto, os efeitos da pressão nos poros exercida pelo fluido e da carga de sedimentos sobre ela. Terzaghi (1923) estabeleceu o relacionamento entre a tensão e as tensões causados pelos efeitos acima citados, denominado princípio de Terzaghi, por

$$\sigma' = \sigma + p \quad (1.1)$$

onde σ' é a tensão efetiva (referente à matriz sólida), σ a tensão total e p a pressão de poro (nesta equação convencionam-se a tensão de tração como positiva). Por exemplo, com a extração de fluido do reservatório, há uma redução da pressão de poro com conseqüente aumento da tensão efetiva existente sobre a matriz sólida. Com o aumento da tensão efetiva, tem-se a ocorrência de maiores deformações na rocha, o que caracteriza o fenômeno de compactação do meio poroso. A compactação é, portanto, a resposta geomecânica da formação rochosa para a redução da pressão de poro.

Como a gama de rochas que podem constituir um reservatório é variada, algumas mostram-se mais sensíveis do que outras à variação da tensão, assim é possível que grandes deformações venham a ser apresentadas na matriz sólida. Tais deformações causam variações de propriedades como porosidade e permeabilidade, as quais influem diretamente na produtividade do reservatório. Além disso, dependendo das características das camadas de solo acima do reservatório, é possível a ocorrência de subsidência na superfície, com deslocamentos significativos tanto na vertical como na horizontal. Observa-se, com isso, a necessidade da obten-

ção de uma solução acoplada para ambos os problemas, caso contrário é possível que interações físicas importantes deixem de ser corretamente representadas.

1.2 Motivação

Em reservatórios de petróleo este acoplamento é importante quando se busca obter a melhor taxa de aproveitamento na extração do óleo sem danificar a região vizinha aos poços. A não consideração de tal efeito pode acarretar em sérios problemas às companhias petrolíferas, tais como: perda de poços por colapso e cisalhamento de revestimentos, subsidência no leito marinho causada pela compactação do reservatório resultando em danos a plataformas e equipamentos de elevação, alagamentos em regiões costeiras devido à subsidência, ativação de falhas geológicas prejudicando planos de drenagem de reservatórios, exsudações de petróleo no leito marinho, produção de areia, entre outros.

Ao longo dos anos, vários foram os exemplos de prejuízos observados como resultantes da desconsideração (ou consideração de forma demasiadamente simplificada) do efeito de compactação do meio poroso em um reservatório de petróleo. Dentre eles, pode-se citar os danos devido à subsidência nos campos de Wilmington (Allen, 1972), Ekofisk (Santarelli, 1994) e Goose Creek (Pratt & Johnson, 1926), assim como danos aos revestimentos e falhas nos poços nos campos de South Belridge (Fredrich *et al.*, 2000; Hansen *et al.*, 1995) e Orinoco Belt (Rodríguez *et al.*, 1996).

Por outro lado, o efeito de compactação do meio poroso também pode resultar em consequências benéficas quando se tratando da extração de óleo, como o aumento da produtividade decorrente da redução do volume de poros (*compaction drive mechanism*) (Falcão, 2002). Tem-se como exemplo o campo de Valhall (York *et al.*, 1992), onde estima-se que o mecanismo de *compaction drive* é responsável por, aproximadamente, 25% da recuperação total na produção de hidrocarbonetos.

Ainda assim, não é apenas a indústria do petróleo que é afetada pelo problema do acoplamento entre o escoamento em um meio poroso e as tensões e deformações geradas sobre o mesmo. Na área da bioengenharia há diversas estruturas que podem ser consideradas como estruturas porosas, dentre elas cartilagens, ossos, cérebro e coração (Byrne & Preziosi, 2003; Phillips, 2005; Roose *et al.*, 2003; Smillie *et al.*, 2004; Swan *et al.*,

2003). Na área da engenharia de terremotos, segundo Phillips (2005), simulações utilizando modelos poroelásticos são muito úteis na busca de opções para mitigar o fenômeno da liquefação (momento em que a pressão do fluido em um meio poroso saturado torna-se tão grande que supera as forças que mantêm unida a estrutura porosa).

Na área da engenharia ambiental pode-se citar o caso de Veneza, cuja frequência que é atingida por inundações tem aumentando drasticamente nos últimos 60 anos devido a vários motivos, dentre eles a subsidência natural e antropogênica da região (Carbognin *et al.*, 1984; Gambolati & Teatini, 2014). Comerlati *et al.* (2004) utilizaram modelos poroelásticos, por exemplo, para estudar a possibilidade de contornar esse efeito através da injeção de água do mar no subsolo da região. Na mesma área cita-se Kim & Parizek (1997), que utilizaram a teoria da poroelasticidade para analisar o efeito Noordbergum (ou *reverse water-level fluctuation*), e os trabalhos de Hudson *et al.* (2001) e Rutqvist & Tsang (2003), que dão ênfase à importância do acoplamento escoamento/geomecânica no projeto e execução de locais de disposição de resíduos radioativos.

Dada a importância que tais problemas representam para a engenharia e a necessidade de obter soluções numéricas para os mesmos, os estudos de como resolver o acoplamento entre os modelos matemáticos se justificam.

1.3 Revisão bibliográfica

O interesse no problema do acoplamento entre o escoamento de um fluido em um meio poroso e a deformação sofrida pelo mesmo deuse, primeiramente, devido ao problema da consolidação, ou seja, a acomodação do solo devido a uma carga na superfície (Biot, 1941; Terzaghi, 1923). A partir dos primeiros trabalhos desenvolvidos sobre o tema, o conhecimento adquirido em relação ao acoplamento citado vem sendo utilizado para a investigação de vários fenômenos relativos à geomecânica: subsidência em função da extração de fluidos (Dean *et al.*, 2006; Tran *et al.*, 2005), fraturamento hidráulico (Detournay & Cheng, 1991; Ji *et al.*, 2009), variação do campo de tensões em meios porosos (Hu *et al.*, 2013; Rice & Cleary, 1976; Samier *et al.*, 2006), influência das ondas e correntes marinhas sobre o leito marinho (Jeng & Cha, 2003; Yamamoto, 1981; Zhang *et al.*, 2013), dentre outros.

A primeira teoria a considerar a influência da pressão do fluido contido nos poros de uma amostra de solo na deformação desse (primeiramente denominada como teoria da consolidação, mas vindo a receber o nome de teoria da poroelasticidade posteriormente em Geertsma (1966)) foi desenvolvida por Terzaghi (1923), o qual propôs um modelo unidimensional de consolidação. Biot (1941), então, generalizou essa teoria para um caso tridimensional, assim como a expandiu e a reformulou em trabalhos posteriores (Biot, 1955, 1956a,b, 1962) para possibilitar sua utilização em uma gama maior de problemas.

Rice & Cleary (1976) reformularam a teoria da consolidação de Biot conectando os parâmetros poroelásticos anteriormente utilizados a conceitos de mais fácil interpretação nas áreas da mecânica das rochas e do solo. Em especial, deram ênfase a dois casos limite, drenado (*drained*) e não-drenado (*undrained*), de um material poroso preenchido por fluido.

Em função de que, até este momento, as constantes poroelásticas definidas nos trabalhos de Biot (1941) e Rice & Cleary (1976) eram relativas ao conjunto fluido-estrutura como um todo, Detournay & Cheng (1993) reformularam novamente a teoria já desenvolvida buscando, agora, definir tais constantes associadas a cada componente do meio poroso (rocha+fluido). A esta abordagem foi dado o nome de *formulação micromecânica*.

Inúmeros trabalhos vêm sendo produzidos nas últimas décadas com a intenção de considerar corretamente a variação das propriedades do meio em função do estado de tensões da rocha (Dean *et al.*, 2006; Minkoff *et al.*, 2003; Settari & Mourits, 1998; Tran *et al.*, 2004, 2005). Tal prática exige que determinadas metodologias de acoplamento sejam aplicadas, sendo essas classificadas, basicamente, em quatro tipos principais: solução desacoplada ou pseudo-acoplamento (*decoupled* ou *pseudo coupling*), solução segregada/uma direção (*one-way coupling* ou *explicit coupling*), solução segregada/ambas as direções (*iterative coupling*) e solução simultânea (*full coupling*).

No método desacoplado ou pseudo-acoplado, o próprio simulador de reservatório obtém alguns dados aproximados da resposta geomecânica ao escoamento, como compactação e variação das tensões horizontais no meio, através de relações simples entre os parâmetros de acoplamento (Tran *et al.*, 2004). Utilizando essa abordagem, as equações que governam o problema geomecânico não são consideradas pelo simulador

de reservatório (Gutierrez *et al.*, 2001) e os problemas do escoamento de fluidos e de deformação na matriz rochosa são resolvidos de modo desacoplado. Essa técnica, porém, não é sempre adequada, dado que um simples parâmetro escalar (compressibilidade dos poros) não é suficiente para representar corretamente aspectos e comportamentos mais complexos das rochas e do solo. Para isso é necessário utilizar uma relação constitutiva completa para o meio poroso.

As três metodologias restantes foram então desenvolvidas buscando considerar o comportamento da rocha de uma maneira mais completa, onde as equações que governam o problema geomecânico são consideradas. Minkoff *et al.* (1999) e Li *et al.* (2006) utilizaram o método segregado/uma direção para a simulação, respectivamente, da compactação em um reservatório e do processo de recuperação SAGD¹, obtendo bons resultados em seus estudos. Bijelonja (2011); Chin *et al.* (2002); Dal Pizzol (2014); Dal Pizzol & Maliska (2012); Ji *et al.* (2006, 2009); Settari & Mourits (1998); Thomas *et al.* (2003); Tran *et al.* (2004, 2005), entre outros, utilizaram o método segregado/ambas as direções para simular vários problemas de compactação (incluindo desde modelos constitutivos complexos para as rochas, assim como a modelagem de fraturamento hidráulico). Chin *et al.* (2000a,b); Ferronato *et al.* (2010); Yang *et al.* (2014) utilizaram o método simultâneo para problemas de compactação em reservatórios.

Alguns trabalhos foram também desenvolvidos buscando comparar os métodos. Gutierrez & Lewis (1998, 2002) e Gutierrez *et al.* (2001) compararam soluções obtidas a partir dos métodos desacoplado e simultâneo verificando que, no primeiro, aspectos geomecânicos importantes, que impactavam a produtividade do reservatório, eram simplificados. Minkoff *et al.* (2003) compararam os resultados obtidos através do método segregado/uma direção com os de um simulador simultâneo e verificaram boa concordância entre eles. Settari & Walters (1999, 2001) aplicaram as três metodologias para problemas de compactação e concluíram que o método segregado/uma direção, apesar de apresentar a conexão mais fraca dentre os métodos acoplados, apresenta a melhor relação entre precisão e tempo despendido. Dean *et al.* (2006) também compararam as três metodologias acopladas, chegando a resultados semelhantes a partir das três. Maiores detalhes em relação a essas metodologias podem ser

¹Do inglês, Steam Assisted Gravity Drainage

encontrados no capítulo 4 dado que as três são objeto de estudo neste trabalho.

A literatura oferece diversas alternativas para a solução do problema do acoplamento escoamento/geomecânica através do uso de diferentes métodos numéricos e algoritmos. É comum o emprego do método dos elementos finitos (FEM²) para a solução do problema geomecânico e do método das diferenças finitas (FDM³) ou do método dos volumes finitos (FVM⁴) para o escoamento. O método FEM foi sempre a primeira escolha para a solução da mecânica da rocha pois é um método com larga tradição na solução de problemas de mecânica dos sólidos. Ao mesmo tempo, o FVM e o FDM também são métodos tradicionais para a solução de problemas de escoamento de fluidos. Por isso que a mistura de métodos (FEM para geomecânica e FVM para o escoamento) é a alternativa clássica na literatura.

Enquanto alguns trabalhos aplicaram esforços no sentido de acoplar algoritmos de elementos finitos com simuladores de reservatórios comerciais (Li *et al.*, 2006; Settari & Mourits, 1998; Settari & Walters, 2001) ou ainda com algoritmos de diferenças finitas para simulação do escoamento (Chin *et al.*, 2002; Ji *et al.*, 2006, 2009; Thomas *et al.*, 2003), outros trabalharam no sentido de resolver os dois problemas físicos utilizando apenas uma única metodologia numérica, no caso, o FEM (Chin *et al.*, 2000a,b; Gutierrez & Lewis, 1998, 2002; Gutierrez *et al.*, 2001). Algumas tentativas ainda ocorreram no sentido de acoplar algoritmos de elementos finitos mistos para a solução do escoamento a algoritmos de elementos finitos tradicionais para a geomecânica (Ferronato *et al.*, 2010; Gai, 2004; Jha & Juanes, 2007; Minkoff *et al.*, 2003; Yang *et al.*, 2014). No caso dos principais simuladores comerciais de reservatório que possuem o módulo geomecânico, como o STARS e o GEM da *Computer Modelling Group* e o ECLIPSE da *Schlumberger*, a estratégia utilizada é a de resolver os dois problemas separadamente, utilizando o FDM ou o FVM para o modelo de escoamento e o FEM para o modelo geomecânico.

Na última década tem se mostrado que tal problema pode ser eficientemente resolvido utilizando o método dos volumes finitos para os dois problemas (Bijelonja, 2011; Dal Pizzol, 2014; Dal Pizzol & Maliska,

²Do inglês, *Finite Element Method*

³Do inglês, *Finite Difference Method*

⁴Do inglês, *Finite Volume Method*

2012; Shaw & Stone, 2005), com a vantagem de ambas as soluções serem conservativas, o que auxilia na robustez da metodologia. Além disso, esquemas conservativos garantem que nenhuma fonte ou sumidouro de propriedades sejam gerados, o que representaria uma inconsistência física e, consequentemente, seria prejudicial ao método.

Utilizando apenas um método numérico para a solução de ambos os problemas pode-se realizar as simulações utilizando também apenas uma malha, evitando, assim, a necessidade da interpolação de dados entre malhas. Isso é uma vantagem, dado que tal interpolação introduz uma rotina de cálculo adicional que aumenta o tempo computacional necessário para a solução, além de representar uma nova fonte de erros.

1.4 Objetivos

O objetivo deste trabalho é o estudo de diferentes formas matemáticas de tratar o acoplamento entre o escoamento e a geomecânica utilizando o método dos volumes finitos para a solução de ambos os problemas. Para isso, são analisados três métodos de acoplamento distintos, sendo eles o método segregado/uma direção, o segregado/ambas as direções e o simultâneo. Faz-se uso desses para a simulação de dois problemas clássicos de subsidência, de onde são obtidas soluções numéricas que podem ser comparadas entre si e com as analíticas de referência.

Primeiramente deseja-se desenvolver um código computacional em linguagem C++ para a simulação de problemas de poroelasticidade utilizando o método dos volumes finitos. Tal código deve abranger a possibilidade de utilização dos três métodos de acoplamento para as simulações. É adotada uma malha estruturada ortogonal para a discretização do domínio dos problemas, sendo utilizado um arranjo desencontrado para as variáveis sobre a malha.

São realizadas simulações para dois problemas clássicos de subsidência que possuem solução analítica: o problema de Terzaghi (1923) e o problema de Mandel (1953). A partir das soluções numéricas obtidas para cada problema é realizada, primeiramente, uma comparação visual entre essas e as analíticas de referência. Em seguida, são realizadas análises da variação do erro da solução em função dos refinamentos da malha e (dado que os problemas são essencialmente transientes) do passo de tempo utilizados na simulação, buscando verificar a taxa de convergência das

soluções. São realizadas análises também do comportamento do erro ao longo do tempo e alguns resultados apresentados.

São realizadas comparações entre os métodos através dos erros apresentados pelos mesmos em função do refino da malha, do refino do tempo e ao longo do tempo, assim como do tempo de CPU despendido na execução das simulações.

1.5 Organização do trabalho

O presente trabalho encontra-se organizado da seguinte forma:

- no capítulo 1 é realizada uma breve introdução sobre o problema do acoplamento entre o escoamento e a geomecânica, assim como sobre a relevância de tal problema para várias áreas da engenharia. Uma breve revisão bibliográfica sobre a teoria da poroelasticidade e sobre o modo como esse problema é atualmente simulado numericamente também é apresentada. Ao fim, encontram-se expostos os objetivos que deseja-se alcançar neste trabalho.
- no capítulo 2 é realizada uma breve revisão da teoria da poroelasticidade, partindo da teoria da consolidação de Biot (1941), passando pela extensão de tal teoria por Rice & Cleary (1976) e chegando, por fim, à formulação micromecânica desenvolvida por Detournay & Cheng (1993).
- no capítulo 3 são apresentadas as equações utilizadas neste trabalho para a representação do problema do acoplamento entre o escoamento e a geomecânica, juntamente com as considerações realizadas para chegar a tais modelos. Também é apresentada a equação utilizada para a atualização da porosidade, considerada como uma não-linearidade do problema neste trabalho.
- no capítulo 4 realiza-se uma discussão sobre as metodologias utilizadas para a solução do problema do acoplamento escoamento/geomecânica estudadas neste trabalho, isto é, métodos segregado/uma direção, segregado/ambas as direções e simultâneo.
- no capítulo 5 é apresentada a metodologia numérica utilizada para realização das simulações e obtenção da solução. Apresenta-se a

estratégia adotada para a discretização dos problemas, assim como o processo de discretização das equações governantes utilizando o método dos volumes finitos. É apresentado também o tratamento dado às condições de contorno dos problemas, assim como o critério adotado para verificação da convergência dos ciclos iterativos do acoplamento na simulação.

- no capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos a partir da utilização dos três métodos de acoplamento em estudo para dois problemas clássicos de subsidência, isto é, os problemas de Terzaghi (1923) e de Mandel (1953). A partir das simulações executadas, faz-se, em um primeiro momento, a validação dos métodos para, na sequência, realizar a comparação entre os mesmos.
- no capítulo 7 são apresentadas, por fim, as conclusões obtidas a partir do desenvolvimento deste trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO

2

TEORIA DA POROELASTICIDADE

A teoria da poroelasticidade representa, basicamente, a base necessária para a realização de estudos que envolvam o comportamento mecânico de materiais porosos preenchidos por fluido. Primeiramente, é apresentada a teoria da consolidação de Biot (1941), a qual considera o conjunto fluido-estrutura porosa como um meio homogêneo para a caracterização do mesmo. Em seguida é discutida a extensão dessa teoria desenvolvida por Rice & Cleary (1976), na qual são definidos dois comportamentos limite para um meio poroso sob carregamento visando a definição de conceitos de mais fácil interpretação física para esse meio. Finalmente, a formulação micromecânica desenvolvida por Detournay & Cheng (1993) é apresentada, a qual considera as contribuições individuais de cada componente do meio para sua caracterização. Este capítulo possui como objetivo apresentar ao leitor a base necessária para os desenvolvimentos deste trabalho.

A convenção de sinais utilizada neste trabalho define uma tensão de tração, uma deformação volumétrica de expansão e um incremento no conteúdo de fluido (quando fluido é adicionado ao volume de controle) como positivos.

2.1 Teoria da consolidação de Biot

Para o desenvolvimento de seu modelo matemático tridimensional de consolidação, Biot (1941) admitiu as seguintes hipóteses como propriedades do solo:

1. material isotrópico;
2. reversibilidade das relações tensão-deformação;
3. linearidade das relações tensão-deformação;
4. condição de pequenas deformações;
5. fluido incompressível;
6. escoamento do fluido através do meio poroso segundo a lei de Darcy;
7. desconsideração das forças de corpo (p. ex. gravidade).

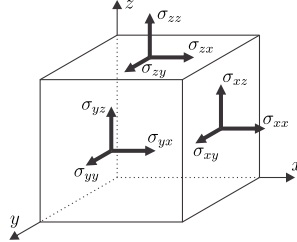
A hipótese 1. foi adotada apenas para fins de simplificação na apresentação do modelo desenvolvido, não excluindo, com isso, a possibilidade de utilização de materiais que não se encaixem nessa classificação. Já as hipóteses 2. e 3. foram adotadas imaginando que os grãos que compõem o solo são unidos através de forças de tensão superficial, tendendo, então, a apresentar uma configuração de mínima energia potencial. Sendo assim, considerando a condição de pequenas deformações, é razoável assumir que, se a configuração em que os grãos se encontram não sofrer uma perturbação muito grande, as hipóteses são válidas.

2.1.1 Condições de equilíbrio do campo de tensões

O volume de controle representativo, relativo ao meio poroso, é mostrado na figura 2.1. Por representativo entende-se que o mesmo é suficientemente grande em relação ao tamanho dos poros de modo que possa ser tratado como homogêneo, mas suficientemente pequeno em relação à escala espacial do problema a ser analisado, de modo que as variações espaciais são computadas. O tensor tensão que age sobre o volume é representado, então, por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Figura 2.1 – Tensor tensão. O primeiro subscrito refere-se à direção da normal à face, o segundo refere-se à direção da força.



Fonte: adaptado de Wang (2000).

A partir das componentes desse tensor, sabe-se que as equações que representam a condição de equilíbrio em um campo de tensões são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Conforme já comentado, as tensões presentes nessas equações são compostas de duas parcelas: uma originada a partir da pressão de poro e outra a partir das tensões existentes sobre o esqueleto poroso (princípio de Terzaghi) (equação 1.1).

Denominando como u , v e w as componentes do deslocamento do meio poroso nas direções x , y e z , respectivamente, e levando em consideração a condição de pequenas deformações, as componentes do tensor de deformação podem ser escritas em função dos deslocamentos da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considerando que as mudanças que ocorrem no solo são reversíveis, as condições macroscópicas do solo devem se apresentar como função das tensões e pressão de poro. Assumindo também que a variação nas deformações seja pequena, pode-se assumir uma relação linear entre as variáveis citadas. Para um material isotrópico, as relações são

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H} & \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H} & \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{2G} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{p}{3H} & \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{2G} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde E é o módulo de Young ou módulo de elasticidade, G o módulo de cisalhamento e ν o coeficiente de Poisson. A correlação entre essas propriedades, para um material isotrópico, é

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.5)$$

Percebe-se que a pressão não exerce influência sobre as deformações cisalhantes devido à isotropia do material. Além disso, H representa uma nova constante física, denominada constante de expansão poroelástica¹ (Wang, 2000).

Manipulando as relações 2.4 para obter expressões para as tensões em função dos deslocamentos e da pressão, chega-se a

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \right) - \alpha p & \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= 2G \left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \right) - \alpha p & \sigma_{xz} &= 2G \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{zz} &= 2G \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \right) - \alpha p & \sigma_{yz} &= 2G \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde ε é a deformação volumétrica

$$\varepsilon = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (2.7)$$

sendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor deformação, e α representa o coeficiente de Biot, dado

¹A interpretação física de H pode ser encontrada em Biot (1941).

por

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \frac{G}{H} \quad (2.8)$$

Esse coeficiente indica, basicamente, a variação do conteúdo de fluido em função da variação na deformação volumétrica do meio para uma condição de pressão de poro constante.

Para descrever completamente a condição macroscópica do solo, Biot (1941) determinou uma variável adicional para considerar a quantidade de fluido nos poros. Assim, denota-se por ζ o que é denominado como *increment of fluid content*², ou incremento do conteúdo de fluido, variável que representa o volume de fluido que adentra o volume de controle normalizado pelo próprio volume do volume de controle. Para ζ , Biot (1941) determinou a seguinte relação

$$\zeta = \frac{\bar{\sigma}}{H} + \frac{p}{R} \quad (2.9)$$

sendo H a mesma constante física utilizada nas relações 2.4 e R uma nova constante física denominada *unconstrained specific storage coefficient*³ (coeficiente de armazenagem específico sem restrições de movimento nas fronteiras, em uma tradução livre). $\bar{\sigma}$ representa a tensão total média (ou tensão hidrostática), dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (2.10)$$

É possível manipular também a relação 2.9 para chegar a

$$\zeta = \alpha \varepsilon + \frac{p}{Q} \quad (2.11)$$

onde

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (2.12)$$

Q é denominado módulo de Biot e pode ser interpretado como a variação do conteúdo de fluido em função da variação da pressão de poro para o caso de uma variação nula da deformação volumétrica.

²Nomenclatura utilizada por Wang (2000) generalizando a variável utilizada nas deduções de Biot (1941).

³A interpretação física de R pode ser encontrada em Biot (1941).

As relações 2.6 e 2.11 representam, então, as relações fundamentais que descrevem as propriedades do solo em relação às deformações e conteúdo de fluido sob a condição de equilíbrio. Elas contém, basicamente, quatro constantes físicas distintas (G , ν , α e Q).

2.1.2 Equações governantes da poroelasticidade

Para obter as equações governantes do problema da poroelasticidade, deve-se substituir as relações constitutivas (obtidas, neste caso, para um material isotrópico) nas equações do equilíbrio de forças (princípio geral). Assim, substituindo as relações 2.6 nas equações 2.2, chega-se a

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para um problema 3D, tem-se, até o momento, apenas três equações para as quatro incógnitas u , v , w e p . Para completar o sistema, é necessária a obtenção de mais uma equação, representada pelo modelo matemático do escoamento. A equação de conservação da massa, junto à lei de Darcy, é a equação requerida.

Considerando, novamente, um volume de controle representativo de um material poroso, denomina-se como v_x o volume de fluido por segundo e por unidade de área (velocidade) que escoar através das faces perpendiculares ao eixo x desse volume. Do mesmo modo, tem-se também v_y e v_z . Segundo a lei de Darcy, tais variáveis encontram-se relacionadas com a pressão do fluido através da relação

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla p \quad (2.14)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade de Darcy, \mathbf{k} o tensor permeabilidade absoluta e μ a viscosidade do fluido.

Assumindo um fluido incompressível, a taxa de variação do conteúdo de fluido em um volume de controle deve levar em consideração, basicamente, a quantidade de fluido que entra e/ou sai desse volume por

segundo através de suas fronteiras, ou seja,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.15)$$

Utilizando, por fim, a relação 2.11 e a equação 2.14 na equação 2.15, chega-se a

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla^2 p - \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.16)$$

Assim, as equações 2.13 e 2.16, constituem o sistema de quatro equações e quatro incógnitas (u , v , w e p), desenvolvido por Biot (1941), para descrever o fenômeno da consolidação (ou, de modo mais geral, o fenômeno da poroelasticidade).

2.2 Extensão da teoria da poroelasticidade por Rice & Cleary (1976)

Observa-se que a teoria da poroelasticidade desenvolvida por Biot (1941) utiliza constantes que são funções do conjunto fluido-estrutura porosa como um todo (ao contrário de considerarem as características de cada componente individualmente) e cuja interpretação física não é tão direta. Além disso, idealiza também o fluido como incompressível. Rice & Cleary (1976), então, estenderam tal teoria para possibilitar uma maior generalização da mesma e facilitar a medição das propriedades de uma amostra em laboratório. Para isso definiram dois comportamentos limite, drenado e não drenado, para a resposta de uma amostra de material poroso preenchida por fluido.

2.2.1 Comportamento drenado

O comportamento drenado (figura 2.2) representa a resposta de um meio poroso a algum estímulo quando $\Delta p = 0$, ou seja, quando a pressão de poro é constante em todos os pontos do fluido. Tal comportamento pode ser observado, por exemplo, quando aplica-se uma determinada carga sobre uma amostra de um material poroso cujas fronteiras são permeáveis e aguarda-se até a pressão de poro entrar em equilíbrio com a pressão ambiente. As constantes elásticas G e ν , utilizadas nas

equações 2.13, por exemplo, são constantes obtidas a partir da resposta drenada do material. Outra importante constante elástica é o módulo de compressão volumétrica drenado K que pode ser obtido através de

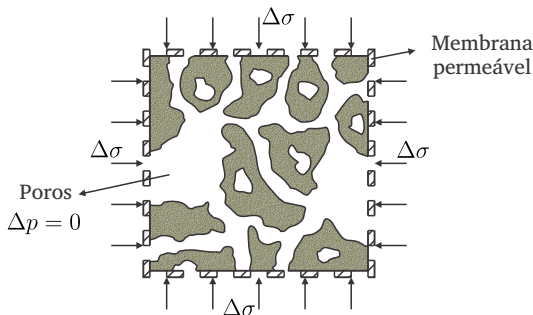
$$K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.17)$$

e cujo significado físico pode ser entendido através de

$$\frac{1}{K} = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right|_{\partial p=0} \quad (2.18)$$

isto é, representa a variação da deformação volumétrica de um meio poroso em função da variação da tensão para o caso de pressão constante (resposta drenada).

Figura 2.2 – Desenho esquemático representando o comportamento drenado de um meio poroso.



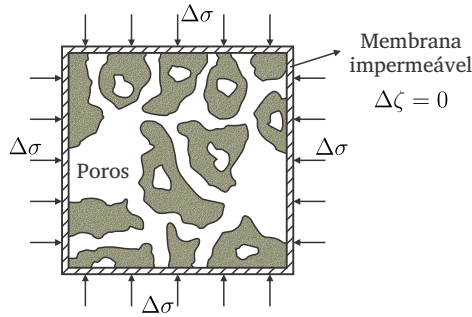
Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

2.2.2 Comportamento não drenado

O comportamento não drenado representa a resposta de um meio poroso quando alterações no estado de tensões de uma amostra porosa são realizadas em uma escala de tempo suficientemente pequena ao ponto de que não ocorra transferência de fluido para dentro ou fora da amostra, mas ainda suficientemente grande para que se possa considerar que o equilíbrio no campo de pressão seja atingido ao longo de toda a estrutura porosa (Rice & Cleary, 1976). Em outras palavras, como observado na

figura 2.3, aplicando determinada carga sobre uma amostra é possível observar o comportamento não drenado da mesma, basicamente, através da impermeabilização de suas fronteiras, impedindo a transferência de fluido entre a amostra e o ambiente ($\Delta\zeta = 0$).

Figura 2.3 – Desenho esquemático representando o comportamento não drenado de um meio poroso.



Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

2.2.3 Definição de novas propriedades para o meio poroso

A partir da definição dos novos conceitos, foi possível a Rice & Cleary (1976) derivar novas constantes para caracterização do meio poroso a partir das constantes poroelásticas anteriormente utilizadas por Biot (1941).

A partir do comportamento não drenado, Rice & Cleary (1976) chegaram ao coeficiente de Skempton (1954) B , definido por

$$B = - \left. \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right|_{\Delta\zeta=0} \quad (2.19)$$

Tal coeficiente representa a variação da pressão de poro em função da variação da tensão para o caso de uma variação nula do conteúdo de fluido (resposta não drenada). É interessante observar que o coeficiente B pode variar de 0 a 1, sendo que $B = 0$ para o caso de um meio poroso saturado por um fluido altamente compressível (como um gás, por exemplo) e $B = 1$ para o caso de meios saturados por fluidos com baixa compressibilidade (como a água).

Rice & Cleary (1976) obtiveram, também, uma expressão para o coeficiente de Poisson não drenado ν_u ⁴, sendo

$$\nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1 - 2\nu)}{3 - \alpha B(1 - 2\nu)} \quad (2.20)$$

Na prática, tal coeficiente assume valores entre $1/2 \geq \nu_u \geq \nu$, sendo o limite superior atingido quando ambos os componentes do meio poroso (fluido e grãos sólidos) são incompressíveis ($B = 1$ e $\alpha = 1$), e o limite inferior quando o fluido apresenta uma alta compressibilidade ($B = 0$). Vale observar, ainda, que o coeficiente de Poisson não drenado apresenta valores maiores que o coeficiente drenado em função de que, basicamente, um aumento na pressão de poro diminui a deformação vertical e aumenta, ao mesmo tempo, a deformação lateral (Wang, 2000).

A partir das constantes físicas já apresentadas, foi possível chegar também a uma relação para o módulo de compressão volumétrica não drenado K_u , dada por

$$K_u = \frac{K}{1 - \alpha B} \quad (2.21)$$

Sendo que α e B apresentam valores menores do que 1, K_u acaba por apresentar um valor maior do que K , isto é, o conjunto fluido-estrutura é mais rígido do que o esqueleto poroso por si só. Isso se dá em função de que, agora, o fluido também suporta parte da compressão a qual, antes, recaía completamente sobre a matriz porosa. A pressão de poro que é induzida no meio se opõe à tensão que a origina (Wang, 2000).

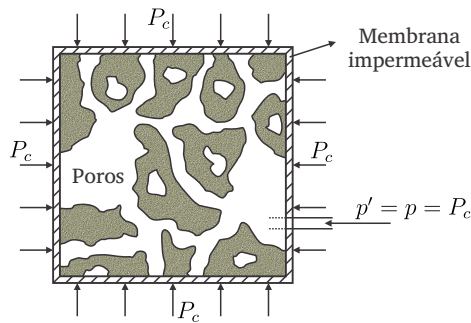
2.3 Formulação micromecânica

A formulação micromecânica desenvolvida por Detournay & Cheng (1993), a partir dos trabalhos de Biot (1941) e Rice & Cleary (1976), apresenta como principal característica a consideração das contribuições individuais de cada componente de um meio poroso na definição das constantes poroelásticas desse meio. Em suma, as constantes já abordadas nesse trabalho, e que antes se apresentavam como função do conjunto fluido-estrutura apenas como um todo, agora podem ser derivadas a partir das características físicas de cada componente individualmente.

⁴O subscripto u , utilizado para indicar constantes físicas relativas à resposta não drenada, advém do termo em inglês *undrained*.

Biot (1941) e Rice & Cleary (1976), em seus trabalhos, decompueram o carregamento agindo sobre o meio poroso, basicamente, em duas componentes: a tensão total σ e a pressão de poro p . Para desenvolvimento de sua nova abordagem, Detournay & Cheng (1993) analisaram a resposta volumétrica do meio poroso utilizando, além da decomposição do carregamento utilizada nos trabalhos anteriores, também uma decomposição em duas diferentes componentes: a tensão efetiva de Terzaghi $\sigma' = \sigma + p$ e a pressão $p' = p = P_c$ (figura 2.4), a qual denominaram como "Pi-pressure", e que corresponde, basicamente, a uma pressão de poro e uma pressão externa à amostra de mesma magnitude⁵.

Figura 2.4 – Desenho esquemático representando a pressão p' . P_c representa a pressão de confinamento e p a pressão de poro.



Fonte: adaptado de Wang (2000).

O desenvolvimento executado por Detournay & Cheng (1993) não é aqui apresentado. É importante citar, no entanto, quatro propriedades muito utilizadas na engenharia de petróleo e que são derivadas a partir de propriedades presentes no trabalho destes autores, sendo elas as compressibilidades da estrutura porosa (c_b ⁶), dos grãos sólidos (c_s), do fluido (c_f) e dos poros (c_p). Essas propriedades são definidas por

$$c_b = \frac{1}{K} = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right|_{p=0} \quad (2.22)$$

⁵As nomenclaturas e convenção de sinais foram adaptadas a partir do trabalho de Detournay & Cheng (1993) para as equivalentes utilizadas no atual trabalho.

⁶O subscrito b advém do termo *bulk*, em inglês.

$$c_s = \frac{1}{K_s} = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p'} \right|_{\sigma'=0} \quad (2.23)$$

$$c_f = \frac{1}{K_f} = -\frac{1}{V_f} \frac{\partial V_f}{\partial p} \quad (2.24)$$

$$c_p = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{V_p} \left. \frac{\partial V_p}{\partial \sigma} \right|_{\partial p=0} \quad (2.25)$$

onde K_s , K_f e K_p são os módulos de compressão volumétrica dos grãos sólidos, do fluido e dos poros e V_f e V_p os volumes de fluido e dos poros. Maiores detalhes destes parâmetros e como são mensurados em laboratório podem ser encontrados em Wang (2000).

É possível definir também várias correlações entre as constantes poroelásticas definidas por Biot (1941) e Rice & Cleary (1976) e as propriedades micromecânicas definidas por Detournay & Cheng (1993). No apêndice A encontram-se presentes algumas das correlações mais úteis e comumente utilizadas.

2.3.1 Resposta volumétrica de um meio poroso ideal

O conceito de um material poroso ideal, basicamente, define um material cuja rede de poros é completamente interconectada (não existem poros isolados) e cuja matriz sólida é constituída de um material microscopicamente homogêneo e isotrópico. Aplicando uma determinada pressão p' sobre uma amostra desse material, submete-se o mesmo a um carregamento denominado por Detournay & Cheng (1993) como "*Π-loading*" (em referência à denominação da pressão p' como *Π-pressure*), ou seja, como a pressão p' é uniforme ao longo de todos os pontos do fluido (internamente aos poros da amostra e externamente à mesma), a tensão resultante corresponde à pressão p ao longo de toda a fase sólida. Com isso, o esqueleto poroso e os grãos sólidos apresentam uma deformação volumétrica uniforme, sem alterações em sua forma ou configuração, ou seja

$$\frac{\Delta V_s}{V_s} = \frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{\Delta V}{V} \quad (2.26)$$

Tal relação demonstra, então, que não ocorre variação na porosidade desse meio ideal quando submetido a um carregamento do tipo sugerido.

Utilizando esse conceito é possível definir correlações específicas para as propriedades poroelásticas de um meio poroso ideal através da simplificação das correlações já existentes para um meio poroso generalizado. Algumas das mais úteis dessas correlações encontram-se no apêndice A.

Para entender o quão aceitável é essa aproximação, deve-se ter em mente que os módulos de compressão volumétrica de grande parte dos minerais dos quais são compostas as rochas são consideravelmente semelhantes. Em função disso, geralmente uma diferença significativa entre os módulos ocorre apenas em função da existência de diferentes quantidades de porosidade isolada entre os materiais (Detournay & Cheng, 1993). Nur & Byerlee (1971) e Zimmerman *et al.* (1986) realizaram experimentos com um granito de baixa porosidade ($\phi \simeq 0,01$) e arenitos, respectivamente, e constataram a validade dessa aproximação em ambos os casos. Com isso em mente, essa aproximação será considerada para o desenvolvimento do modelo matemático utilizado nesse trabalho, dado que é aceitável e conveniente devido às simplificações que proporciona.

MODELO MATEMÁTICO

Para o completo entendimento de um problema que envolve diferentes fenômenos físicos ocorrendo de modo acoplado, é indispensável entender, primeiramente, os modelos matemáticos que representam tais fenômenos. Sendo assim, neste capítulo são apresentadas as equações utilizadas neste trabalho para a representação do problema do acoplamento entre escoamento e geomecânica, juntamente às considerações realizadas para chegar a tal. O objetivo é apresentar os modelos associando-os aos problemas físicos que representam, dado que é de grande importância observar a influência que as propriedades e variáveis envolvidas em cada fenômeno exercem sobre o acoplamento.

3.1 Modelo geomecânico

As equações que constituem o modelo geomecânico, e que governam o campo de tensões presente na matriz porosa, são derivadas, basicamente, da teoria da poroelasticidade de Biot (1941), já discutida no capítulo 2, e do princípio das tensões efetivas de Terzaghi (1923). Para a definição do modelo utilizado neste trabalho, foram adotadas as seguintes hipóteses:

1. material microscopicamente homogêneo e isotrópico;
2. matriz sólida constituída de grãos sólidos compressíveis;

3. reversibilidade das relações tensão-deformação;
4. linearidade das relações tensão-deformação;
5. condição de pequenas deformações;
6. estado plano de deformações;
7. consideração das forças de corpo.

As equações para a condição de equilíbrio de tensões são obtidas, então, a partir das equações 2.2, considerando agora um caso bidimensional e a existência de forças de corpo. Assim, tem-se

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y = 0 \quad (3.2)$$

onde g_x e g_y representam as componentes do vetor gravidade \mathbf{g} nas direções x e y , respectivamente. Além disso, ρ representa a densidade do meio poroso, ou seja, do conjunto fluido-estrutura porosa como um todo, e pode ser calculado por

$$\rho = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s \quad (3.3)$$

em que ρ_f e ρ_s representam, respectivamente, as densidades do fluido e dos grãos sólidos.

As equações constitutivas para as componentes da tensão podem ser obtidas a partir das relações 2.6. Considerando um estado plano de deformações ($\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$), tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \left(\frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \right) - \alpha p \\ \sigma_{yy} &= \lambda \left(\varepsilon_{xx} + \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{yy} \right) - \alpha p \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo λ o primeiro parâmetro de Lamé, dado por

$$\lambda = \frac{2G \nu}{1 - 2\nu} \quad (3.5)$$

O tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$, no caso da teoria da poroelasticidade, pode ser definido como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha p \boldsymbol{\delta} \quad (3.6)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}'$ representa o tensor tensão efetiva e $\boldsymbol{\delta}$ o delta de Kronecker (Wang, 2000)¹. Comparando essa definição com as relações 3.4, fica claro que o primeiro termo do lado direito da igualdade nas relações das componentes normais do tensor tensão equivale, diretamente, à respectiva componente da tensão efetiva, sendo essa a tensão que age sobre o esqueleto poroso definindo o estado de deformações do meio.

Por fim, as deformações de interesse podem ser obtidas a partir das relações 2.3, sendo dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Deve ser observado ainda que, para um estado plano de deformações, a componente normal da tensão na direção z não é nula. Substituindo $\varepsilon_{zz} = 0$ na relação 2.4, e realizando as manipulações necessárias, é possível obter uma equação para σ_{zz} , sendo

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (1 - 2\nu)\alpha p \quad (3.8)$$

Utilizando as relações 3.7 nas equações constitutivas 3.4 e essas, por sua vez, nas equações 3.1 e 3.2, obtém-se

$$G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \rho g_x = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$G \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho g_y = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.10)$$

¹Para um caso onde $\alpha = 1$, ou seja, onde a compressibilidade dos grãos sólidos seja negligenciável, a equação 3.6 resulta na definição de Terzaghi para as tensões efetivas (equação 1.1).

Essas equações representam as equações de equilíbrio em função dos deslocamentos em sua forma diferencial não conservativa, sendo esta a forma sob a qual geralmente são encontradas na literatura. Na discretização das mesmas para o método dos volumes finitos, porém, será utilizada sua forma conservativa². Tem-se então, até o momento, duas equações para as 3 incógnitas u , v e p . Na próxima seção será apresentada a equação que fecha o sistema.

3.2 Modelo de escoamento

A equação do modelo de escoamento que governa o campo de pressão em um meio poroso pode ser deduzida a partir de várias frentes, sendo, neste trabalho, optado pela abordagem utilizada por Biot (1941) e já demonstrada na subseção 2.1.2. Em função disso, nesta seção é apresentada tal dedução apenas de modo resumido, embora seja dada ênfase ao significado físico dos termos oriundos da equação. Para a definição do modelo a ser utilizado, foram adotadas as seguintes hipóteses:

1. escoamento monofásico e bidimensional;
2. meio poroso homogêneo;
3. rocha e fluido isotérmicos;
4. fluido pouco compressível;
5. viscosidade do fluido constante;
6. permeabilidade constante;
7. matriz sólida formada por grãos sólidos compressíveis;
8. consideração da gravidade.

Para obtenção da equação procurada será considerada a descrição macroscópica clássica do escoamento em meios porosos, na qual as grandezas físicas são definidas em toda a região porosa e representam médias volumétricas dos valores microscópicos na região circundante. Considera-se, então, um volume de controle representativo onde, por representativo, entende-se que o mesmo se encaixa na definição já citada na subseção 2.1.1. Assim como observado na equação 2.15, a taxa de variação do

²Mais detalhes na subseção 5.2.2.

conteúdo de fluido em um volume de controle é função, basicamente, da quantidade de fluido que atravessa as faces desse volume por unidade de tempo, além da possível existência de um termo fonte q não considerado na dedução de Biot (1941), ou seja,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} - q \quad (3.11)$$

onde q representa uma taxa de volume de fluido sendo injetada ou removida em determinado ponto por unidade de volume.

O vetor \mathbf{v} , presente na equação 3.11, representa, basicamente, o volume de fluido por unidade de tempo e por unidade de área que escoo através das faces do volume de controle (apresentando, então, unidade de velocidade). Tal vetor, sob o ponto de vista macroscópico, segundo a lei de Darcy e conforme a equação 2.14 (mas agora considerando a gravidade), pode ser definido por

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \quad (3.12)$$

onde o tensor permeabilidade absoluta \mathbf{k} é simétrico e dado por

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

No caso de um material isotrópico, as componentes que se localizam fora da diagonal principal são iguais a zero e $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz}$.

Utilizando as relações 2.11 e 3.12 na equação 3.11, chega-se a

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] + q = -\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.14)$$

Por fim, utilizando a relação A.14, oriunda da formulação micromecânica (seção 2.3), na equação 3.14, e utilizando os conceitos de compressibilidades apresentados na seção 2.3, chega-se a

$$\left[c_f \phi + c_s (\alpha - \phi) \right] \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] + q = -\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.15)$$

Tem-se, então, a equação governante de um escoamento monofásico isotérmico em um meio poroso deformável, dadas as hipóteses de-

finidas no início dessa seção. Fisicamente, demonstra que a deformação volumétrica de uma amostra de um material poroso pode ser obtida a partir da soma de três fatores: a variação dos volumes dos grãos sólidos e do fluido segundo suas compressibilidades (primeiro termo do lado esquerdo da equação 3.15), um balanço do volume de fluido que atravessa as faces do volume de controle (segundo termo) e a possível ocorrência de injeção ou extração de fluido, representada pelo termo fonte (terceiro termo).

Vale frisar, novamente, que é também possível deduzir a equação 3.15 a partir de outras frentes. Um exemplo é a abordagem utilizada por Dal Pizzol (2014), em cujo trabalho utiliza de um paralelo entre o escoamento de fluidos em meios porosos deformáveis e não deformáveis para dedução da equação governante do modelo de escoamento.

Observa-se, então, que a equação 3.15, juntamente às equações 3.9 e 3.10, representam o sistema de três equações e três incógnitas (u , v e p) necessário para a solução do acoplamento escoamento/geomecânica. Atenta-se, no entanto, que neste trabalho a porosidade não é um parâmetro constante ao longo do tempo, ou seja, representa uma não-linearidade do problema. Sendo assim, na próxima seção é apresentada a equação necessária para o fechamento do problema.

3.3 Não-linearidades

Geralmente, são dois os principais parâmetros a serem considerados como não-linearidades em problemas poroelásticos devido à natureza física do acoplamento envolvido, sendo eles a permeabilidade e a porosidade. Como citado nas hipóteses adotadas para a obtenção do modelo do escoamento na seção 3.2, neste trabalho a permeabilidade do meio será considerada como constante. Resta, então, obter uma expressão para atualização da porosidade.

Há várias correlações presentes na literatura (Chin *et al.*, 2000b; Geertsma, 1957; McKee *et al.*, 1988; Rutqvist *et al.*, 2002; Settari & Mourits, 1998; Thomas *et al.*, 2003; Tran *et al.*, 2004; Zimmerman *et al.*, 1986) que possuem como intuito expressar a variação da porosidade ao longo do tempo. Geralmente a variação temporal de tal parâmetro é função da deformação volumétrica, da pressão de poro e/ou das tensões efetivas.

Neste trabalho, será utilizada a correlação desenvolvida por Dal Pizzol (2014) com base no trabalho de Detournay & Cheng (1993), considerando um meio poroso ideal (subseção 2.3.1). Para obtenção de tal correlação, parte-se da relação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1 - \phi) \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{V} \frac{\partial V_s}{\partial t} \quad (3.16)$$

onde observa-se que a variação da porosidade depende, basicamente, da variação do volume total e da variação volumétrica dos grãos sólidos (respectivamente, o primeiro e o segundo termo do lado direito da equação 3.16). A partir dessa relação, realizando as manipulações algébricas necessárias³, chega-se a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\alpha - \phi) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + c_s (\alpha - \phi) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.17)$$

A equação 3.17 é, então, a correlação adotada para a atualização da porosidade ao longo do tempo. Tal correlação, juntamente às equações 3.9, 3.10 e 3.15, constituem, por fim, o modelo matemático completo a ser utilizado para a realização das análises propostas neste trabalho.

³O desenvolvimento completo é apresentado em Dal Pizzol (2014).

MÉTODOS DE ACOPLAMENTO ENTRE O ESCOAMENTO E A GEOMECÂNICA

Quando problemas físicos envolvem mais de um modelo matemático, a decisão de como resolver estes sistemas é importante. As características dos problemas, especialmente as escalas de tempo e espaço de cada um deles, bem como as exigências de engenharia em termos de responsabilidade dos resultados e precisão são determinantes na escolha dos métodos de acoplamento. Uma visão destes métodos é apresentada a seguir.

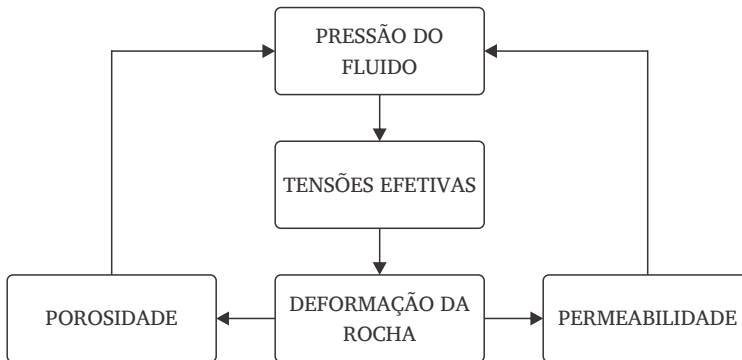
4.1 Parâmetros de acoplamento

Na figura 4.1 é possível observar os principais parâmetros envolvidos no problema do escoamento de fluidos em meios porosos deformáveis e como eles interagem entre si. Uma das principais variáveis na simulação de reservatórios é a pressão, pois é o gradiente dessa variável a força motriz do escoamento. Necessita-se do campo de pressão para prever a movimentação do fluido em um reservatório e, conseqüentemente, sua produtividade. Por outro lado, a pressão também é responsável por su-

portar parte da carga transmitida ao reservatório pelas rochas adjacentes ao mesmo (Gutierrez & Lewis, 1998).

Assim, uma variação na pressão do fluido conseqüentemente significa uma variação nas tensões efetivas agindo sobre a matriz porosa (como demonstrado na equação 3.6), o que resulta em deformações nas rochas. Essas deformações modificam a estrutura dos poros e, conseqüentemente, a porosidade e a permeabilidade da matriz¹. Essas mudanças afetam a condição do escoamento, dado que uma variação da porosidade resulta em uma variação do espaço disponível para o fluido no meio poroso, e a permeabilidade, em termos gerais, define, junto com a viscosidade, a facilidade com que o fluido se desloca nesse meio (como demonstrado pela lei de Darcy na equação 3.12).

Figura 4.1 – Esquema representando a interação entre o escoamento de um fluido e a geomecânica em um reservatório deformável.



Fonte: adaptado de Gutierrez & Lewis (1998).

4.2 Métodos de acoplamento

Segundo Settari & Walters (2001), as equações que descrevem os modelos geomecânico e de escoamento podem ser resolvidas de modo aco-

¹Apesar das análises apresentadas neste trabalho terem sido realizadas considerando a permeabilidade como um parâmetro constante, assim como demonstrado na definição do modelo matemático desenvolvido para o escoamento (seção 3.2), neste capítulo a permeabilidade será abordada como uma não-linearidade do acoplamento para fins de generalização dos métodos de acoplamento apresentados.

plado utilizando, basicamente, quatro tipos de métodos: solução desacoplada ou pseudo-acoplamento (*decoupled* ou *pseudo coupling*), solução segregada/uma direção (*one-way coupling* ou *explicit coupling*), solução segregada/ambas as direções (*two-way coupling* ou *iterative coupling*) e solução simultânea (*full coupling*). Neste trabalho serão analisados apenas os três últimos métodos dessa lista, os quais são apresentados em detalhes nas subseções que seguem. Antes disso, primeiramente é interessante realizar algumas observações quanto ao motivo da distinção dos métodos entre segregado e simultâneo.

A solução realizada de modo segregado apresenta como principal característica a busca pela solução das equações do escoamento e do equilíbrio de forças separadamente para cada incremento de tempo (Settari & Walters, 2001). É essa característica que dá origem à denominação de tal tipo de acoplamento como segregado, pois dois sistemas lineares, um para cada modelo, devem ser resolvidos. Considerando a discretização das equações pelo método dos volumes finitos, é possível observar os sistemas gerados², em sua forma matricial, como

$$[A^p][p] = [B^p] \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} A^{uu} & A^{uv} \\ A^{vu} & A^{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A expressão 4.1 representa o sistema linear obtido a partir do modelo de escoamento e que deve ser resolvido para obtenção do campo de pressão. Esse sistema se constitui de n_v equações e n_v incógnitas, onde n_v representa o número de volumes de controle utilizados para a discretização do domínio do problema. Já a expressão 4.2 representa o sistema obtido a partir do modelo geomecânico e que deve ser resolvido para obtenção do campo de deslocamentos. Esse se constitui, devido à adoção do arranjo desencontrado das variáveis sobre a malha computacional (como demonstrado na seção 5.1), de um sistema de n_f equações e n_f incógnitas, onde n_f representa, agora, o número total de faces dos volumes de controle definidos na malha computacional.

No sistema 4.1, $[A^p]$ representa a matriz de coeficientes das equações, $[p]$ o vetor de valores da variável pressão e $[B^p]$ o vetor de termos

²Maiores detalhes em relação à discretização das equações e à montagem dos sistemas lineares serão discutidos no capítulo 5.

independentes, no qual encontram-se, dentre outros, os termos de deformação volumétrica. Do mesmo modo, no sistema 4.2 o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade, analogamente à matriz $[A^p]$, representa a matriz de coeficientes das equações de equilíbrio; o segundo termo do lado esquerdo, o vetor de valores das variáveis u e v ; e o termo localizado do lado direito, o vetor de termos independentes, no qual encontram-se, dentre outros, os termos de pressão de poro.

Já a solução definida como simultânea apresenta como principal característica o fato de resolver os modelos de escoamento e geomecânico através de um único sistema de equações em cada nível de tempo (Settari & Walters, 2001), considerando, portanto, o acoplamento de forma implícita. Supondo, novamente, a discretização das equações pelo método dos volumes finitos, esse sistema linear pode ser representado, em sua forma matricial, através de

$$\begin{bmatrix} A^{uu} & A^{uv} & A^{up} \\ A^{vu} & A^{vv} & A^{vp} \\ A^{pu} & A^{pv} & A^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \\ B^p \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Tem-se, agora, um sistema com $n_v + n_f$ equações e $n_v + n_f$ incógnitas, onde o primeiro termo localizado do lado esquerdo da igualdade representa a matriz de coeficientes das equações; o segundo termo do lado esquerdo, o vetor solução; e o termo localizado do lado direito, o vetor de termos independentes. Na literatura muitas vezes a palavra segregada é substituída pela palavra explícita e a denominação simultânea como acoplada. Foi escolhido denominar simultânea, e não acoplada, porque uma solução, mesmo segregada/ambas as direções (explícita entre os sistemas lineares), ao final das iterações resolve o problema acoplado, pois os dois modelos matemáticos são resolvidos respeitando-se os acoplamentos.

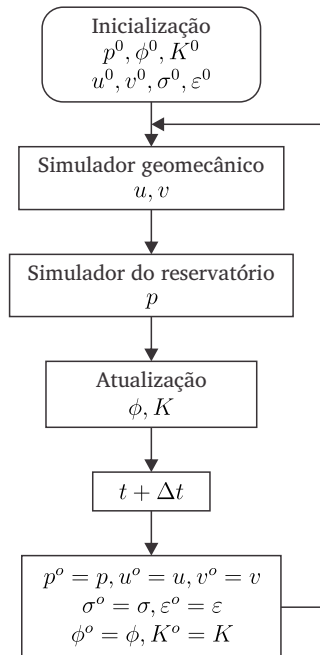
A partir dessas definições iniciais, é possível, agora, especificar em detalhes como se dá o processo de solução através da utilização de cada um dos métodos analisados neste trabalho. Tal detalhamento consta nas subseções seguintes.

4.2.1 Solução segregada/uma direção

Na figura 4.2 é possível observar um fluxograma representando o método de acoplamento segregado/uma direção (*one-way coupling* ou

explicit coupling). A simulação é iniciada definindo as condições iniciais no domínio para a pressão, deslocamentos, tensões, deformações, porosidade e permeabilidade. A partir disso, em cada nível de tempo, o campo de deslocamentos (e, conseqüentemente, o campo de deformações) é obtido através do simulador geomecânico, sendo essa informação passada ao simulador de reservatório, do qual se obtém o campo de pressão. Na seqüência, é realizada a atualização das não-linearidades (no caso deste trabalho, apenas da porosidade) para, então, avançar a simulação para o próximo nível de tempo. Este processo é realizado até o fim da simulação, sendo esse definido pela obtenção do regime permanente ou pelo alcance do período de tempo desejado de simulação, por exemplo.

Figura 4.2 – Fluxograma do método segregado/uma direção.



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se, então, que informações são passadas do simulador geomecânico para o simulador de reservatório, mas os resultados obtidos no segundo não são passados de volta ao primeiro no mesmo nível de tempo.

Isso significa que o campo de pressão, calculado no simulador de reservatório, sofre a influência da variação no campo de deformações, mas os efeitos resultantes da pressão sobre o campo de deformações só serão computados no simulador geomecânico no passo de tempo seguinte. Desse modo é possível esperar erros maiores nesse tipo de simulação do que nas simulações realizadas a partir dos outros métodos de acoplamento estudados.

É importante comentar que na literatura (Dean *et al.*, 2006; Minkoff *et al.*, 1999, 2003; Settari & Walters, 1999; Tran *et al.*, 2004, 2005) geralmente este método é apresentado com as variáveis sendo calculadas em ordem inversa, isto é, calculando primeiramente o campo de pressão e, após, o de deslocamentos, em cada nível de tempo. Isto será brevemente discutido no capítulo 6.

Este tipo de acoplamento pode ser considerado como um caso especial do método segregado/ambas as direções e representa o método cuja conexão entre o escoamento de fluido e as deformações geomecânicas é a mais fraca dentre os analisados neste trabalho. Ainda assim, segundo Tran *et al.* (2005), esse método é uma boa opção para a simulação de reservatórios de gás, por exemplo. Isso se dá pois o campo de pressão em um gás é pouco sensível às deformações do meio, já que sua compressibilidade é alta se comparada às compressibilidades de um fluido no estado líquido ou do sólido. Em outras palavras, as pequenas deformações do meio encontradas nesse tipo de problema exercem pouca influência no campo de pressão do gás.

Tal método de solução é também versátil, dado que permite, por exemplo, a utilização de intervalos de tempo diferentes para a solução de cada problema, isto é, a obtenção do campo de pressão em todos os níveis de tempo enquanto a atualização dos deslocamentos é realizada apenas em níveis de tempo determinados. Nesse caso, a frequência de atualização do modelo geomecânico dependerá, basicamente, da magnitude da variação do volume poroso a cada passo de tempo, ou seja, se essa variação ocorrer lentamente, será possível definir intervalos de tempo maiores entre as atualizações do campo de deformações. Essa estratégia abre a possibilidade de uma maior agilidade na realização da simulação dado que, segundo Dean *et al.* (2006), a maior parcela de tempo computacional é gasta na solução do modelo geomecânico. Em tese é possível conseguir, desse modo, uma diminuição significativa do tempo

computacional necessário para obtenção da solução procurada.

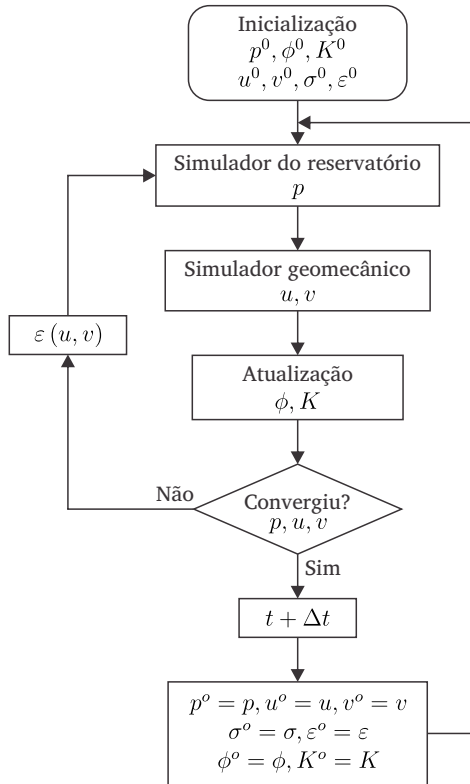
Outra vantagem da utilização deste método é que, através dele, é possível acoplar, com relativa facilidade, simuladores de escoamento em meios porosos e simuladores geomecânicos já existentes (Dean *et al.*, 2006). Tais simuladores geralmente não consideram os efeitos do acoplamento ou, ainda, os consideram de modo simplificado através de uma solução desacoplada ou de um pseudo-acoplamento, como já citado na subseção 1.3. Essa estratégia pode vir a resultar em uma economia de tempo significativa quando se tratando do desenvolvimento do código computacional para implementação do acoplamento.

Deve-se ter em mente que a natureza explícita desta metodologia, porém, impõe restrições ao passo de tempo utilizado. Esse detalhe, se não tratado corretamente, pode resultar em problemas de estabilidade para a simulação. No entanto, segundo Dean *et al.* (2006), para muitos problemas de subsidência, o passo de tempo necessário para a simulação do escoamento é menor que o requisitado pela natureza explícita do método, o que indica que esse ponto geralmente não resultará em fonte de problemas nesse tipo de simulação.

4.2.2 Solução segregada/ambas as direções

Na figura 4.3 é possível observar um fluxograma representando o método segregado/ambas as direções (*two-way coupling* ou *iterative coupling*). Nota-se que esse fluxograma é bastante semelhante ao já apresentado na figura 4.2 para o método segregado/uma direção, com a diferença de que, agora, um ciclo iterativo é executado dentro de cada nível de tempo.

Para dar início à simulação, define-se primeiramente as condições iniciais relativas aos campos de pressão, deslocamentos, porosidade e permeabilidade (além dos campos de tensões e deformações) no domínio do problema. A partir disso, procede-se para o primeiro nível de tempo, onde um ciclo iterativo é iniciado. Calcula-se um novo campo de pressão através do simulador de reservatório, e essa informação é passada ao simulador geomecânico, com o qual obtém-se o campo de deslocamentos (atualizando também os campos de tensões e deformações). Na sequência é realizada a atualização das não-linearidades (no caso do exemplo, da porosidade e da permeabilidade), sendo, então, verificada a convergência

Figura 4.3 – Fluxograma do método segregado/ambas as direções.

Fonte: elaborada pelo autor.

do ciclo iterativo em questão. Não atingido o critério de convergência, realiza-se um novo ciclo iterativo dentro do mesmo nível de tempo.

Esse processo é repetido até o alcance do critério de convergência definido, sendo esse geralmente baseado na variação do campo de pressão (ou de tensões) entre as duas últimas iterações realizadas (Tran *et al.*, 2004) e/ou na definição de um número máximo de iterações a serem realizadas dentro de um mesmo nível de tempo. Atingido o critério para o ciclo iterativo, verifica-se o critério para finalização da simulação. Caso esse não seja atingido, realiza-se o avanço no tempo, dando seguimento ao processo de simulação.

Percebe-se que agora a troca de informações ocorre em ambos os sentidos dentro de um mesmo nível de tempo, ou seja, apesar de ainda

serem resolvidos separadamente dois sistemas lineares, devido ao ciclo iterativo a interação entre as variáveis do acoplamento é mais intensa do que a resultante do método segregado/uma direção. Em virtude disso, recomenda-se o uso do método segregado/ambas as direções para problemas onde os fenômenos do escoamento e da geomecânica encontram-se mais intimamente conectados (Tran *et al.*, 2005). Como exemplo, cita-se o problema da compactação de um reservatório preenchido por um fluido no estado líquido (o qual apresenta compressibilidade cuja ordem de grandeza é semelhante à do componente sólido). Nesse caso, assim como o escoamento do fluido exerce grande influência sobre o campo de tensões da rocha, as deformações resultantes também afetam o campo de pressão de modo mais significativo. Vale observar que, devido à existência do ciclo iterativo dentro de cada nível de tempo, esse método pode vir a resultar em uma solução semelhante à obtida através do método simultâneo caso seja utilizado um critério de convergência suficientemente rigoroso para as iterações (Dean *et al.*, 2006; Settari & Walters, 2001).

Assim como a solução segregada/uma direção, essa técnica também permite que se realize o acoplamento entre um simulador de reservatórios comercial e um módulo geomecânico de modo relativamente simples, devido à sua natureza segregada. No entanto, pode necessitar de um grande número de iterações em cada passo de tempo para problemas mais complexos como, por exemplo, simulações do processo de injeção de vapor auxiliado por drenagem gravitacional (SAGD³) em reservatórios cujas rochas apresentam modelos constitutivos não-lineares (Tran *et al.*, 2005). A consequência disso é o aumento do custo computacional para obtenção da solução (chegando ao ponto de torná-lo proibitivo em determinados casos).

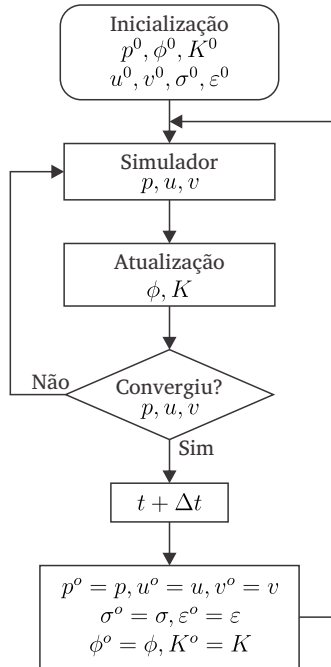
4.2.3 Solução simultânea

Na figura 4.4 é possível observar um fluxograma representando o método simultâneo de solução do acoplamento (*full coupling*). A principal característica desse método é que a solução para ambos os modelos é agora obtida a partir de um único sistema linear (equação 4.3), característica que o diferencia dos métodos já apresentados nas subseções 4.2.1

³Do inglês, *Steam Assisted Gravity Drainage*

e 4.2.2. Segundo Tran *et al.* (2004), por vezes tal método é também denominado como implícito dado que todas as variáveis são resolvidas simultaneamente para uma mesma discretização, isto é, utilizando uma única malha para todo o domínio.

Figura 4.4 – Fluxograma do método simultâneo.



Fonte: elaborada pelo autor.

O início da simulação é realizado através da definição das condições iniciais para as variáveis do acoplamento e para as não-linearidades, processo semelhante ao realizado para os acoplamentos segregados já apresentados. Procede-se, então, para o primeiro nível de tempo, onde um ciclo iterativo é iniciado. Dentro desse ciclo os novos campos de pressão e deslocamentos são calculados através de um único simulador, sendo atualizados também os campos de tensões e deformações. Em seguida, atualiza-se as não-linearidades do problema. Realizados esses passos, verifica-se a convergência de modo semelhante ao realizado no método segregado/ambas as direções (subseção 4.2.2) sendo que, se não atingido

o critério estabelecido, faz-se uma nova iteração. Caso o critério seja atingido, finaliza-se o ciclo iterativo e verifica-se o critério para finalização da simulação. Caso não seja finalizada, ocorre o avanço no tempo e dá-se continuidade ao processo de simulação.

Percebe-se que, apesar dos campos de pressão e deslocamentos serem obtidos a partir de um único sistema linear, um ciclo iterativo ainda é necessário em cada passo de tempo devido à necessidade de atualização das não-linearidades do problema. Essa característica dá ao método certa versatilidade ao ponto que, caso as não-linearidades apresentem variações relativamente pequenas ao longo da simulação, é possível realizar a atualização dessas apenas uma vez a cada nível de tempo ou, ainda, apenas em níveis de tempo determinados, diminuindo o tempo computacional necessário para obtenção da solução. Diz-se, então, que a atualização das não-linearidades pode ser realizada de modo explícito, onde os campos de pressão e deslocamentos apenas sentiriam os efeitos da variação da porosidade e da permeabilidade, por exemplo, no passo de tempo seguinte. Por outro lado, assim como no método segregado/uma direção, essa característica explícita pode incidir em restrições ao passo de tempo utilizado na simulação, as quais, se não consideradas corretamente, podem resultar em problemas de estabilidade e precisão.

Dos métodos apresentados, o simultâneo é o que resulta na interação mais intensa entre as variáveis do acoplamento. Agora obtém-se a solução para as equações de ambos os modelos simultaneamente, isto é, considerando os fenômenos físicos interagindo de modo implícito, e não mais separadamente a partir de dois sistemas lineares, onde as informações de um fenômeno são passadas ao outro apenas como termos fonte. Assim, esse método é o mais estável dentre os expostos, o que resulta em menores chances de divergência da solução quando utilizados passos de tempo maiores para a simulação.

Por outro lado, a solução simultânea irá exigir um maior esforço por parte dos métodos de solução de sistemas lineares, visto que o sistema de equações resultante do método simultâneo apresenta maiores dimensões e, em geral, é mais mal condicionado do que aqueles obtidos pelos métodos segregados. Esse problema se torna mais evidente ao se resolver problemas de grande escala ou quando os problemas em questão incluem modelos de escoamento e/ou geomecânico de maior complexidade (Dean *et al.*, 2006).

FORMULAÇÃO NUMÉRICA

A simulação numérica possui como principal objetivo, basicamente, possibilitar a obtenção de uma solução aproximada para problemas complexos a partir dos quais, na grande maioria das vezes, não é possível a obtenção de uma solução analítica. Para isso são utilizados métodos numéricos a fim de discretizar as equações diferenciais parciais governantes dos fenômenos físicos em equações algébricas. Define-se, então, um sistema linear utilizando essas equações discretizadas e, a partir da solução desse, obtém-se uma solução aproximada para o problema em questão.

Neste trabalho optou-se pela realização das simulações utilizando o método dos volumes finitos (FVM) para a solução de ambos os problemas (escoamento e geomecânica). Tal método, dentro da classificação dos métodos numéricos, se apresenta como um método conservativo, ou seja, satisfaz a conservação das propriedades em nível de volumes elementares. A obtenção das equações aproximadas se dá através da integração das mesmas, em sua forma conservativa (divergente), no espaço e no tempo sobre o volume elementar, o que resulta, basicamente, no balanço da propriedade em tal volume (Maliska, 2004). Realizando a discretização das equações para todos os volumes que constituem o domínio discreto, obtém-se um número equivalente de equações algébricas e, portanto, o sistema de equações a ser resolvido para obtenção da solução numérica. Vale observar que o número de sistemas a ser resolvido, no caso do problema abordado neste trabalho, será função do método de acoplamento

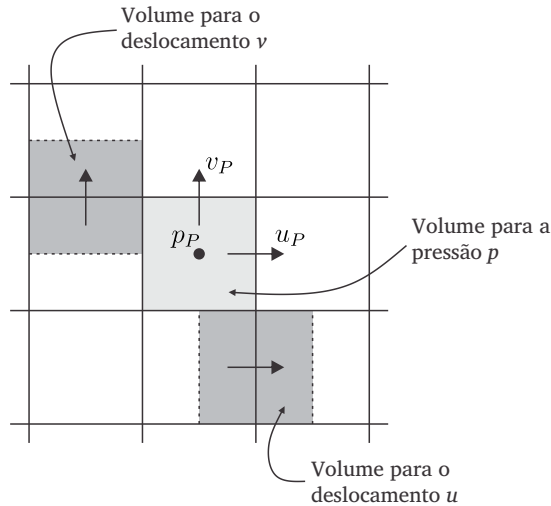
utilizado entre as variáveis (maiores detalhes na seção 4.2).

Neste capítulo é demonstrada então, primeiramente, a estratégia adotada para a discretização do domínio relativo aos problemas estudados, juntamente ao modo como as variáveis são posicionadas sobre a malha computacional. Em seguida é apresentada a discretização das equações dos modelos matemáticos apresentados no capítulo 3, assim como da equação para atualização da porosidade. O processo de discretização das equações é apresentado brevemente neste trabalho, podendo ser encontrado com mais detalhes em Dal Pizzol (2014). Na sequência, demonstra-se o modo como são tratadas as condições de contorno para os problemas estudados para, por fim, apresentar o critério adotado para determinação da convergência da solução numérica.

5.1 Discretização do domínio

Para discretização do domínio de solução será utilizada uma malha estruturada ortogonal, sendo que as análises realizadas a partir da mesma podem ser estendidas também para malhas não-estruturadas. A opção pela utilização de tal malha se deu em função da conveniência na implementação e no desenvolvimento do código computacional para as simulações.

Em relação ao posicionamento das variáveis sobre a malha, será utilizado o arranjo desencontrado, o qual pode ser observado na figura 5.1. Percebe-se que a pressão fica localizada ao centro dos volumes de controle, enquanto os deslocamentos localizam-se sobre as faces. Isso torna necessário calcular as variáveis em diferentes volumes de controle. Por outro lado, tal posicionamento ainda é vantajoso ao passo que evita a necessidade de interpolação das variáveis para o acoplamento (o que pode ser observado ao longo da discretização das equações governantes na seção 5.2 e é demonstrado em detalhes em Dal Pizzol (2014)). Pode-se inferir, com isso, que esse arranjo é fisicamente consistente quando utilizado para os problemas acoplados em questão, o que decorre em maior estabilidade para a simulação (Maliska, 2004).

Figura 5.1 – Posicionamento das variáveis sobre a malha computacional.

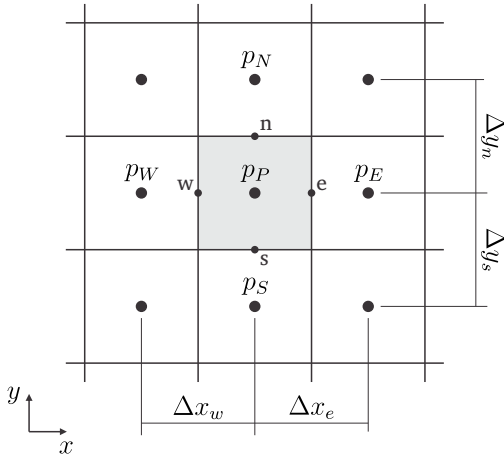
Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

5.2 Discretização das equações

5.2.1 Modelo de escoamento

Para obtenção da equação governante do modelo de escoamento (equação 3.15) em sua forma aproximada, considera-se, primeiramente, o volume de controle genérico para a pressão presente na figura 5.2. A discretização da equação se faz integrando-a no tempo (entre os instantes t e $t + \Delta t$) e no espaço (considerando apenas as direções x e y para o caso bidimensional) sobre esse volume, ou seja

$$\int_w^e \int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \left\{ [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right] + q \right\} dt dy dx = \int_w^e \int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \left(-\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dt dy dx \quad (5.1)$$

Figura 5.2 – Volume de controle para a pressão e seus vizinhos.

Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

Expandindo os operadores gradiente e divergente, considerando que o vetor gravidade \mathbf{g} possui apenas uma componente não nula na direção y (g_y) e que, pela adoção da hipótese de um meio isotrópico, todas as componentes do tensor permeabilidade \mathbf{k} (expressão 3.13) localizadas fora da diagonal principal são nulas e $k_{xx} = k_{yy}$, realizada a integração obtém-se

$$\begin{aligned}
 & [c_f \phi^\theta + c_s (\alpha - \phi^\theta)] (p_P - p_P^o) \Delta x \Delta y + \\
 & - \left[\frac{k_{xx}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_e - \frac{k_{xx}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_w \right] \Delta y \Delta t + \\
 & - \left[\frac{k_{yy}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_f g_y \right) \Big|_n - \frac{k_{yy}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_f g_y \right) \Big|_s \right] \Delta x \Delta t + \\
 & + q \Delta x \Delta y \Delta t = -\alpha (\varepsilon - \varepsilon^o) \Delta x \Delta y
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde adota-se o sobrescrito o^1 para indicar uma variável a ser obtida no nível de tempo anterior ao qual se encontra a simulação. Para as variáveis a serem avaliadas no nível de tempo atual não são utilizados sobrescritos.

O sobrescrito θ denota as variáveis que devem ser interpoladas no tempo. Dependendo da função de interpolação escolhida para esse fim,

¹Referente ao termo *old*, em inglês.

é possível obter uma formulação explícita, implícita ou totalmente implícita². Neste trabalho optou-se pela utilização da formulação totalmente implícita, o que significa, em termos práticos, que todas as variáveis possuindo o sobrescrito θ serão avaliadas no nível de tempo atual. Utilizando a porosidade como exemplo, $\phi^\theta = \phi$.

Percebe-se, na equação 5.2, que é necessário avaliar a derivada da variável p nas interfaces entre os volumes de controle (indicadas pelos subscritos minúsculos e , w , n e s). Tendo em mente que os termos a serem interpolados derivam de termos elípticos da equação, optou-se pela utilização de funções de interpolação de diferenças centrais (CDS³) para esse fim⁴. Essas funções não são aqui apresentadas, podendo ser encontradas em Dal Pizzol (2014).

É necessário também obter uma expressão para calcular numericamente a deformação volumétrica em função dos deslocamentos. Utilizando as expressões 2.7 e 3.7, e considerando um caso bidimensional, essa deformação pode ser obtida através de

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.3)$$

Observando, novamente, que a deformação volumétrica encontra-se localizada no centro do volume de controle para a pressão, é possível aproximar as derivadas da expressão 5.3 a partir do volume de controle presente na figura 5.2, o qual é demonstrado na figura 5.3 com os deslocamentos localizados sobre suas faces. Com isso, obtém-se

$$\varepsilon = \frac{u_p - u_w}{\Delta x} + \frac{v_p - v_s}{\Delta y} \quad (5.4)$$

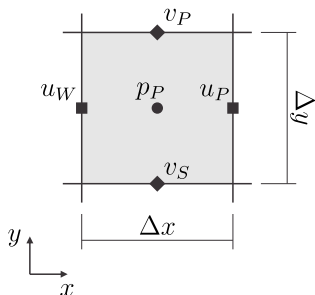
A partir da equação 5.2 é possível então definir as equações aproximadas, em sua forma final, para obtenção do campo de pressão no caso dos métodos simultâneo e segregados de acoplamento, o que é apresentado nas subseções que seguem.

²Maiores detalhes em relação ao assunto podem ser encontrados em Maliska (2004).

³Do inglês, *Central Differencing Scheme*.

⁴Maiores detalhes em relação ao assunto podem ser encontrados em Maliska (2004).

Figura 5.3 – Volume de controle para a pressão com os deslocamentos devidamente posicionados sobre suas faces.



Fonte: elaborada pelo autor.

5.2.1.1 Solução segregada

Para os métodos segregados de acoplamento, a equação do modelo de escoamento em sua forma discreta é

$$A_p^p p_p = A_e^p p_e + A_w^p p_w + A_n^p p_n + A_s^p p_s + B_p^p \quad (5.5)$$

onde

$$A_e^p = \frac{k_{xx}}{\mu \Delta x} \Big|_e \Delta y \quad (5.6)$$

$$A_w^p = \frac{k_{xx}}{\mu \Delta x} \Big|_w \Delta y \quad (5.7)$$

$$A_n^p = \frac{k_{yy}}{\mu \Delta y} \Big|_n \Delta x \quad (5.8)$$

$$A_s^p = \frac{k_{yy}}{\mu \Delta y} \Big|_s \Delta x \quad (5.9)$$

$$B_p^p = [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} p_p^o + \left(\frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_s - \frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_n \right) + \quad (5.10)$$

$$-q \Delta x \Delta y - \alpha (\varepsilon - \varepsilon^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$A_p^p = A_e^p + A_w^p + A_n^p + A_s^p + [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (5.11)$$

O sobrescrito p presente nos coeficientes indica que os mesmos referem-se à equação utilizada para o cálculo da pressão.

Nota-se que, dado que nos métodos segregados os campos de pressão e de deslocamentos são obtidos separadamente através de simuladores distintos, a deformação volumétrica ε , derivada do simulador geomecânico, é conhecida no momento da simulação do escoamento. Em função disso é armazenada no termo independente da equação (expressão 5.10).

Como já comentado na seção 4.2, e observando novamente que a pressão encontra-se armazenada no centro das células definidas pela malha computacional, o sistema linear a ser resolvido para obtenção do campo de pressão será constituído de uma quantidade de equação e incógnitas igual à quantidade de volumes de controle definidos na discretização do domínio do problema.

5.2.1.2 Solução simultânea

No acoplamento simultâneo, todas as variáveis do problema são resolvidas implicitamente através de um único sistema linear. Com isso em mente, a equação para o modelo de escoamento, em sua forma aproximada, é

$$\begin{aligned} A_p^{pp} p_p = & A_e^{pp} p_e + A_w^{pp} p_w + A_n^{pp} p_n + A_s^{pp} p_s + \\ & + A_p^{pu} u_p + A_w^{pu} u_w + A_p^{pv} v_p + A_s^{pv} v_s + B_p^p \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde os coeficientes A_e^{pp} , A_w^{pp} , A_n^{pp} , A_s^{pp} e A_p^{pp} são iguais aos já apresentados nas equações 5.6 a 5.9 e 5.11, respectivamente, e

$$A_p^{pu} = -\frac{\alpha \Delta y}{\Delta t} \quad (5.13)$$

$$A_w^{pu} = \frac{\alpha \Delta y}{\Delta t} \quad (5.14)$$

$$A_p^{pv} = -\frac{\alpha \Delta x}{\Delta t} \quad (5.15)$$

$$A_s^{pv} = \frac{\alpha \Delta x}{\Delta t} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} B_p^p = & \left[c_f \phi + c_s (\alpha - \phi) \right] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} p_p^o + \left(\frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_s - \frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_n \right) + \\ & - q \Delta x \Delta y - \left(A_p^{pu} u_p^o + A_w^{pu} u_w^o + A_p^{pv} v_p^o + A_s^{pv} v_s^o \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

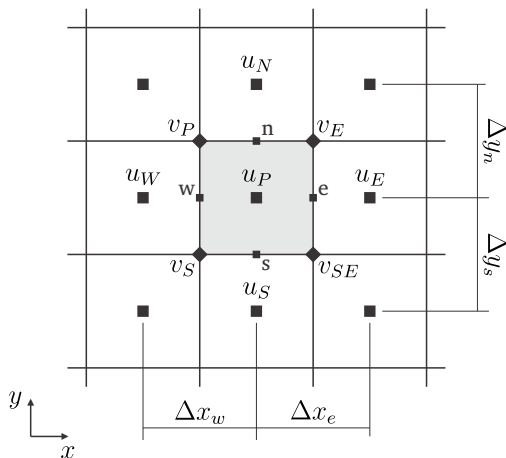
Em função de que todas as variáveis são resolvidas a partir de um único sistema linear, faz-se uso, agora, de duas letras no sobrescrito dos coeficientes visando uma melhor organização dos mesmos: a primeira indica a equação na qual o coeficiente se encontra (neste caso, todos os coeficientes possuem o sobrescrito iniciando com a letra p , o que indica que referem-se à equação para o cálculo do campo de pressão) e a segunda qual variável o coeficiente multiplica na equação em questão. Percebe-se que agora os deslocamentos aparecem de modo implícito na equação discretizada (equação 5.12).

5.2.2 Modelo geomecânico

Para discretização das equações governantes do modelo geomecânico (equações 3.9 e 3.10), parte-se do princípio de que, para o método dos volumes finitos, é necessário que a integração das equações sobre determinado volume de controle seja realizada utilizando sua forma conservativa (ou divergente), isto é, a forma em que, na equação diferencial, os fluxos estejam posicionados dentro das derivadas. Tal cuidado é necessário pois, integrando a equação desse modo, garante-se que na primeira integração os fluxos apareçam nas fronteiras do volume elementar (Maliska, 2004). Isso equivale, portanto, à realização de um balanço sobre o volume, fato que incide em uma das principais características do método dos volumes finitos, ou seja, seu caráter conservativo. As equações a serem integradas, então, são as próprias equações que definem a condição de equilíbrio de tensões (equações 3.1 e 3.2). Para uma análise detalhada frente às discrepâncias resultantes da integração das equações do modelo geomecânico em sua forma não-conservativa pode-se consultar Dal Pizzol (2014).

Para obtenção da forma aproximada da equação 3.1, considera-se, primeiramente, o volume de controle genérico presente na figura 5.4 para a componente u do deslocamento (componente do deslocamento na direção x). Devido à adoção do arranjo desencontrado para o posicionamento das variáveis sobre a malha computacional, tal volume encontra-se localizado sobre a interface vertical entre dois volumes de controle para a pressão. As componentes v do deslocamento (componentes do deslocamento na direção y) encontram-se posicionadas sobre os vértices desse volume.

Figura 5.4 – Volume de controle para a componente u do deslocamento e seus vizinhos.



Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

Considerando que o vetor gravidade \mathbf{g} possui apenas uma componente não nula na direção y ($g_x = 0$), integrando a equação 3.1 no espaço (apenas nas direção x e y para o caso bidimensional) sobre o volume de controle genérico considerado, obtém-se

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right] dy dx = 0 \quad (5.18)$$

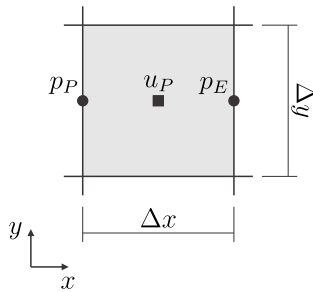
Realizando as integrações e utilizando as equações constitutivas (equações 3.4) e as relações cinemáticas (relações 3.7) para avaliação das tensões em função das deformações e , na sequência, das deformações em função dos deslocamentos, chega-se a

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e \Delta y + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_e \Delta y - \alpha p \Big|_e \Delta y + \\ & - \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w \Delta y - \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w \Delta y + \alpha p \Big|_w \Delta y + \\ & + G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n \Delta x + G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_n \Delta x - G \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s \Delta x - G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_s \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

É necessário avaliar, agora, as derivadas das variáveis nas faces do volume de controle em questão (as quais são indicadas pelos subscritos minúsculos e , w , n e s). Observando que os termos a serem avaliados derivam de termos de natureza elíptica, são novamente utilizadas funções de interpolação de diferenças centrais para a aproximação das derivadas. Essas funções não são aqui apresentadas, mas podem ser encontradas em Dal Pizzol (2014).

É necessário também avaliar a pressão nas faces e e w do volume. Devido à adoção do arranjo desencontrado, tais dados podem ser facilmente obtidos observando que a pressão se encontra armazenada justamente sobre as faces onde é necessária (o que pode ser observado na figura 5.5).

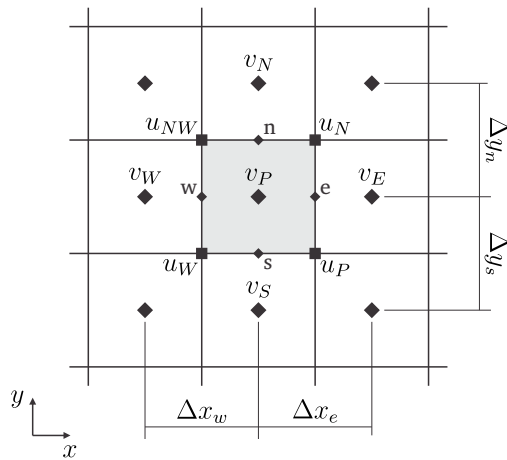
Figura 5.5 – Volume de controle para a componente u do deslocamento com a pressão devidamente posicionada sobre suas faces.



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da equação 5.19, é possível, então, definir a forma aproximada da equação 3.1 para o cálculo da componente u do deslocamento, o que será demonstrado adiante. O processo de discretização da segunda equação que constitui o modelo geomecânico, isto é, da equação de equilíbrio na direção y (equação 3.2), é realizado de modo muito semelhante ao já apresentado para a equação de equilíbrio na direção x . A diferença básica se encontra no fato de que agora integra-se a equação sobre o volume de controle genérico para a componente v do deslocamento presente na figura 5.6, o qual encontra-se posicionado sobre a interface horizontal entre dois volumes de controle para a pressão. Esse processo não é demonstrado neste trabalho, mas pode ser encontrado em detalhes em Dal Pizzol (2014).

Figura 5.6 – Volume de controle para a componente v do deslocamento e seus vizinhos.



Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

A seguir são apresentadas as equações para o cálculo das componentes u e v do deslocamento, em sua forma aproximada, para os casos do método simultâneo e dos métodos segregados de acoplamento.

5.2.2.1 Solução segregada

Para os métodos de acoplamento segregados, a equação para a componente u do deslocamento, em sua forma aproximada, é

$$A_p^{uu} u_p = A_e^{uu} u_e + A_w^{uu} u_w + A_n^{uu} u_n + A_s^{uu} u_s + A_p^{uv} v_p + A_e^{uv} v_e + A_s^{uv} v_s + A_{se}^{uv} v_{se} + B_p^u \quad (5.20)$$

onde

$$A_e^{uu} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu \Delta x} \Big|_e \Delta y \quad (5.21)$$

$$A_w^{uu} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu \Delta x} \Big|_w \Delta y \quad (5.22)$$

$$A_n^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_n \Delta x \quad (5.23)$$

$$A_s^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_s \Delta x \quad (5.24)$$

$$A_p^{uu} = A_e^{uu} + A_w^{uu} + A_n^{uu} + A_s^{uu} \quad (5.25)$$

$$A_p^{uv} = -\lambda|_w - G|_n \quad (5.26)$$

$$A_e^{uv} = \lambda|_e + G|_n \quad (5.27)$$

$$A_s^{uv} = \lambda|_w + G|_s \quad (5.28)$$

$$A_{se}^{uv} = -\lambda|_e - G|_s \quad (5.29)$$

$$B_p^u = \alpha|_w p_P \Delta y - \alpha|_e p_E \Delta y \quad (5.30)$$

Já a equação discretizada para a componente v do deslocamento é

$$\begin{aligned} A_p^{vv} v_P &= A_e^{vv} v_E + A_w^{vv} v_W + A_n^{vv} v_N + A_s^{vv} v_S + \\ &+ A_p^{vu} u_P + A_w^{vu} u_W + A_n^{vu} u_N + A_{nw}^{vu} u_{NW} + B_p^v \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde

$$A_e^{vv} = \frac{G}{\Delta x} \Big|_e \Delta y \quad (5.32)$$

$$A_w^{vv} = \frac{G}{\Delta x} \Big|_w \Delta y \quad (5.33)$$

$$A_n^{vv} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu \Delta y} \Big|_n \Delta x \quad (5.34)$$

$$A_s^{vv} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu \Delta y} \Big|_s \Delta x \quad (5.35)$$

$$A_p^{vv} = A_e^{vv} + A_w^{vv} + A_n^{vv} + A_s^{vv} \quad (5.36)$$

$$A_p^{vu} = -\lambda|_s - G|_e \quad (5.37)$$

$$A_w^{vu} = \lambda|_s + G|_w \quad (5.38)$$

$$A_n^{vu} = \lambda|_n + G|_e \quad (5.39)$$

$$A_{se}^{vu} = -\lambda|_n - G|_w \quad (5.40)$$

$$B_p^v = \alpha|_s p_P \Delta x - \alpha|_n p_N \Delta x + \rho g_y \Delta x \Delta y \quad (5.41)$$

Em relação ao tamanho do sistema linear, a adoção do arranjo desencontrado resulta no posicionamento das variáveis do deslocamento sobre as faces dos volumes de controle para a pressão, os quais são de-

finidos pelas células da malha. O sistema linear será constituído então, basicamente, de um número de equações e incógnitas igual ao número total de faces resultantes da discretização do domínio.

Pelo fato de que nos métodos segregados de acoplamento as soluções para os campos de pressão e de deslocamentos são obtidas separadamente, no momento da construção do sistema linear para a solução do problema geomecânico o campo de pressão já é conhecido. Assim, percebe-se que as informações relativas ao campo de pressão são tratadas nas equações discretizadas como termos fonte, sendo armazenadas nos termos independentes das mesmas (equações 5.30 e 5.41).

5.2.2.2 Solução simultânea

Para o acoplamento simultâneo, as equações de equilíbrio em sua forma aproximada são muito semelhantes às já apresentadas para os métodos segregados de acoplamento, sendo a única diferença o modo como a pressão é tratada. Observando que na utilização desse método de acoplamento calcula-se todas as variáveis do problema implicitamente, isto é, utilizando um único sistema linear, é necessário também considerar a pressão como uma variável nas equações aproximadas. Com isso em mente, a partir da equação 5.20, a equação discretizada para a componente u do deslocamento agora se apresenta

$$\begin{aligned} A_p^{uu} u_P &= A_e^{uu} u_E + A_w^{uu} u_W + A_n^{uu} u_N + A_s^{uu} u_S + \\ &+ A_p^{uv} v_P + A_e^{uv} v_E + A_s^{uv} v_S + A_{se}^{uv} v_{SE} + \\ &+ A_p^{up} p_P + A_e^{up} p_E + B_p^u \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde os coeficientes dos deslocamentos são iguais aos já apresentados nas equações 5.21 a 5.29 e

$$A_p^{up} = \alpha|_w \Delta y \quad (5.43)$$

$$A_e^{up} = -\alpha|_e \Delta y \quad (5.44)$$

$$B_p^u = 0 \quad (5.45)$$

Do mesmo modo, a partir da equação 5.31, a equação discretizada

para a componente v do deslocamento agora é

$$\begin{aligned} A_p^{vv} v_P &= A_e^{vv} v_E + A_w^{vv} v_W + A_n^{vv} v_N + A_s^{vv} v_S + \\ &+ A_p^{vu} u_P + A_w^{vu} u_W + A_n^{vu} u_N + A_{nw}^{vu} u_{NW} + \\ &+ A_p^{vp} p_P + A_n^{vp} p_N + B_p^v \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde os coeficientes dos deslocamentos são iguais aos já apresentados nas equações 5.32 a 5.40 e

$$A_p^{vp} = \alpha|_s \Delta x \quad (5.47)$$

$$A_n^{vp} = -\alpha|_n \Delta x \quad (5.48)$$

$$B_p^v = \rho g_y \Delta x \Delta y \quad (5.49)$$

5.2.3 Não linearidades

Considerando que a porosidade, neste trabalho, é tratada como uma não-linearidade do problema e tem de ser atualizada ao longo do processo de solução, é necessário obter também uma equação aproximada para a realização dessa atualização. Sendo tal propriedade posicionada no centro das células da malha, isto é, no centro dos volumes de controle para a pressão, integrando a equação 3.17 no tempo (entre os instantes t e $t + \Delta t$) tem-se

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[(\alpha - \phi) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + c_s (\alpha - \phi) \frac{\partial p}{\partial t} \right] dt \quad (5.50)$$

o que, realizadas as integrações, resulta em

$$\phi = \phi^o + (\alpha - \phi^o)(\varepsilon - \varepsilon^o) + c_s (\alpha - \phi^o)(p - p^o) \quad (5.51)$$

5.3 Condições de contorno

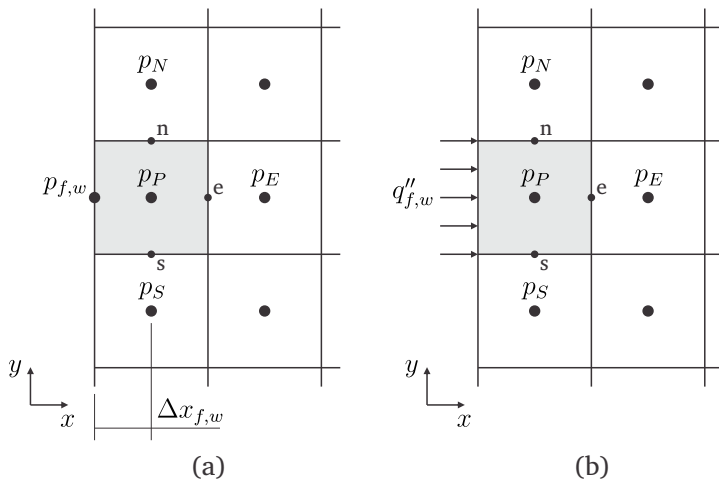
Abaixo são apresentados os tratamentos dados às condições de contorno para os modelos de escoamento e geomecânico considerados neste trabalho. Em vista de tornar o texto mais sucinto, serão utilizadas como

exemplos apenas as equações aproximadas relativas aos métodos segregados de acoplamento. As equações utilizadas para o método simultâneo podem facilmente ser obtidas de modo análogo se utilizadas as mesmas estratégias que as aqui apresentadas.

5.3.1 Modelo de escoamento

Para as condições de contorno relativas ao problema do escoamento será utilizado como exemplo o volume de controle para a pressão presente na figura 5.7, o qual se encontra adjacente à fronteira esquerda do domínio discreto. Observa-se que o tratamento dado às condições de contorno nesta subseção é genérico ao ponto de que pode ser utilizado em qualquer uma das fronteiras do domínio.

Figura 5.7 – Volumes de controle para a pressão localizados na fronteira esquerda do domínio. (a) Pressão prescrita. (b) Fluxo prescrito.



Fonte: elaborada pelo autor.

5.3.1.1 Pressão prescrita (condição de Dirichlet)

Para a condição de pressão prescrita (condição de contorno de Dirichlet) representada na figura 5.7(a), durante a discretização mostra-se necessário definir uma função de interpolação que utilize a pressão p_P

e a pressão conhecida na fronteira $p_{f,w}$ para a avaliação da derivada no local. Assim, tem-se

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_w = \frac{p_P - p_{f,w}}{\Delta x_{f,w}} \quad (5.52)$$

Utilizando a função 5.52 na equação 5.2, e reorganizando os termos da equação resultante, chega-se a

$$A_p^p p_P = A_e^p p_E + A_n^p p_N + A_s^p p_S + B_p^p \quad (5.53)$$

onde os coeficientes A_e^p , A_n^p , A_s^p são iguais aos já apresentados nas equações 5.6, 5.8 e 5.9, e

$$B_p^p = [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} p_P^o + \left(\frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_s - \frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_n \right) + \quad (5.54)$$

$$-q \Delta x \Delta y - \alpha (\varepsilon - \varepsilon^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \frac{k_{xx}}{\mu} \Big|_w \frac{\Delta y}{\Delta x_{f,w}} p_{f,w}$$

$$A_p^p = A_e^p + A_n^p + A_s^p + [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \frac{k_{xx}}{\mu} \Big|_w \frac{\Delta y}{\Delta x_{f,w}} \quad (5.55)$$

Dado que a pressão na fronteira é prescrita, nota-se que o termo da equação que antes se referia à variável p_w agora é conhecido e encontra-se armazenado no termo independente B_p^p (último termo da equação 5.54), sendo que a contribuição relativa ao fluxo na face w do volume ainda consta também no coeficiente A_p^p (último termo da equação 5.55).

5.3.1.2 Fluxo prescrito (condição de Neumann)

A condição de fluxo prescrito (condição de contorno de Neumann), representada na figura 5.7(b), pode ser considerada como a condição de contorno "natural" do método dos volumes finitos, dado que na discretização das equações tem-se justamente o aparecimento dos fluxos nas faces do volume de controle. Considerando que o fluxo $q''_{f,w}$ pode ser definido como

$$q''_{f,w} = - \frac{k_{xx}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_w \quad (5.56)$$

e utilizando essa informação na equação 5.2, após organização dos termos a equação na forma aproximada para o volume de controle em ques-

tão se torna

$$A_p^p p_p = A_e^p p_E + A_n^p p_N + A_s^p p_S + B_p^p \quad (5.57)$$

onde os coeficientes A_e^p , A_n^p , A_s^p são iguais aos já apresentados nas equações 5.6, 5.8 e 5.9, e

$$B_p^p = [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} p_p^o + \left(\frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_s - \frac{k_{yy}}{\mu} \rho_f g_y \Big|_n \right) + \quad (5.58)$$

$$-q \Delta x \Delta y - \alpha (\varepsilon - \varepsilon^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + q''_{f,w} \Delta y$$

$$A_p^p = A_e^p + A_n^p + A_s^p + [c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (5.59)$$

Como o fluxo prescrito na face w é conhecido, tal informação se encontra agora armazenada completamente no termo independente B_p^p da equação discretizada (último termo da equação 5.58).

5.3.2 Modelo geomecânico

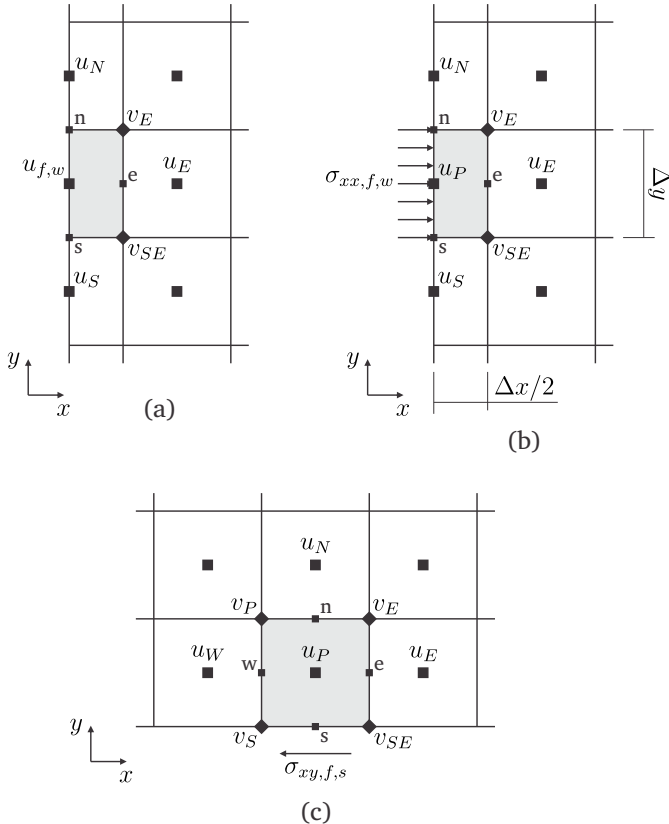
Para definição do tratamento dado às condições de contorno relativas ao problema da geomecânica serão utilizados como exemplo os volumes de controle para a componente u do deslocamento presentes na figura 5.8. Percebe-se que, devido à adoção do arranjo desencontrado para o posicionamento das variáveis sobre a malha, tem-se nas fronteiras esquerda (figuras 5.8(a) e (b)) e direita do domínio o aparecimento de meios volumes de controle para a variável u . De maneira semelhante, para a componente v do deslocamento, a adoção do arranjo desencontrado também resulta no aparecimento de meios volumes de controle nas fronteiras superior e inferior do domínio.

Os métodos de tratamento para as condições de contorno nesta subseção são genéricos ao ponto de que podem ser estendidos para todas as fronteiras do domínio e podem ser utilizados tanto para a equação de equilíbrio na direção x (equação 3.1), quanto para a respectiva equação na direção y (equação 3.2).

5.3.2.1 Deslocamento prescrito (condição de Dirichlet)

Observa-se da figura 5.8(a) que, devido à adoção do arranjo desencontrado para o posicionamento das variáveis sobre a malha, tem-se o

Figura 5.8 – Volumes de controle para a componente u do deslocamento localizados na fronteira esquerda e na fronteira inferior do domínio. (a) Deslocamento prescrito. (b) Tensão normal prescrita. (c) Tensão de cisalhamento prescrita.



Fonte: elaborada pelo autor.

posicionamento da componente u do deslocamento justamente sobre a fronteira esquerda do domínio. Desse modo, a condição de contorno de deslocamento prescrito (condição de Dirichlet) pode ser facilmente considerada utilizando, para o meio volume de controle adjacente à fronteira, a equação

$$A_p^{uu} u_P = B_p^u \quad (5.60)$$

onde

$$A_p^{uu} = 1 \quad (5.61)$$

$$B_p^u = u_{f,w} \quad (5.62)$$

sendo $u_{f,w}$ o valor conhecido a ser prescrito.

5.3.2.2 Tensão prescrita (condição de Neumann)

A condição de tensão prescrita para o modelo geomecânico, assim como a condição de fluxo prescrito para o modelo de escoamento, pode ser considerada como a condição de contorno "natural" do método dos volumes finitos.

Para demonstração do tratamento adotado no caso da condição de tensão normal prescrita (figura 5.8(b)), considera-se a tensão

$$\sigma_{xx}|_w = -\sigma_{xx,f,w} \quad (5.63)$$

agindo sobre a face w do meio volume de controle para a componente u do deslocamento. O sinal negativo é utilizado em função da convenção de sinais adotada neste trabalho. Utilizando esta informação na equação 5.18, tem-se

$$[\sigma_{xx}|_e + \sigma_{xx,f,w}] \Delta y + [\sigma_{xy}|_n - \sigma_{xy}|_s] \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (5.64)$$

Utilizando as equações constitutivas (equações 3.4) e as relações cinemáticas (relações 3.7) na equação 5.64, e realizando as manipulações necessárias, chega-se à equação aproximada

$$A_p^{uu} u_P = A_e^{uu} u_E + A_n^{uu} u_N + A_s^{uu} u_S + A_e^{uv} v_E + A_{se}^{uv} v_{SE} + B_p^u \quad (5.65)$$

onde

$$A_e^{uu} = \lambda \frac{1-\nu}{\nu \Delta x} \Big|_e \Delta y \quad (5.66)$$

$$A_n^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_n \frac{\Delta x}{2} \quad (5.67)$$

$$A_s^{uu} = \frac{G}{\Delta y} \Big|_s \frac{\Delta x}{2} \quad (5.68)$$

$$A_p^{uu} = A_e^{uu} + A_n^{uu} + A_s^{uu} \quad (5.69)$$

$$A_e^{uv} = \lambda|_e \quad (5.70)$$

$$A_{se}^{uv} = -\lambda|_e \quad (5.71)$$

$$B_p^u = -\alpha|_e p_E \Delta y + \sigma_{xx,f,w} \Delta y \quad (5.72)$$

Percebe-se que as informações referentes ao fluxo (à tensão, neste caso) na face w encontram-se agora armazenadas por inteiro no termo independente da equação (expressão 5.72) sob a forma de uma tensão conhecida.

Para demonstração do tratamento adotado no caso da prescrição de uma tensão de cisalhamento será utilizado como exemplo o volume de controle para a componente u do deslocamento representado na figura 5.8(c), o qual se encontra adjacente à fronteira inferior do domínio. Sobre a face s desse volume, encontra-se prescrita uma tensão

$$\sigma_{xy} \Big|_s = \sigma_{xy,f,s} \quad (5.73)$$

Utilizando esta informação na equação 5.18 e realizando as manipulações necessárias chega-se a

$$\begin{aligned} A_p^{uu} u_P &= A_e^{uu} u_E + A_w^{uu} u_W + A_n^{uu} u_N + \\ &+ A_p^{uv} v_P + A_e^{uv} v_E + A_s^{uv} v_S + A_{se}^{uv} v_{SE} + B_p^u \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde os coeficientes A_e^{uu} , A_w^{uu} , A_n^{uu} , A_p^{uv} e A_e^{uv} são iguais aos já apresentados nas expressões 5.21 a 5.23, 5.26 e 5.27, respectivamente, e

$$A_p^{uu} = A_e^{uu} + A_w^{uu} + A_n^{uu} \quad (5.75)$$

$$A_s^{uv} = \lambda|_w \quad (5.76)$$

$$A_{se}^{uv} = -\lambda|_e \quad (5.77)$$

$$B_p^u = \alpha|_w p_P \Delta y - \alpha|_e p_E \Delta y - \sigma_{xy,f,s} \Delta x \quad (5.78)$$

Dado que o fluxo na face s é conhecido, essa informação encontra-se armazenada no termo independente da equação (expressão 5.78) sob a forma da tensão prescrita.

5.4 Critério de convergência

Dos métodos de acoplamento a serem analisados neste trabalho (apresentados na seção 4.2), percebe-se que é necessário definir critérios para verificação da convergência da solução. Em outras palavras, para um ciclo iterativo, por exemplo, tem-se que definir um método para quantificar o grau de variação da solução a cada iteração. Sendo essa variação tão sutil ao ponto de ser menor do que um erro admissível previamente definido, ocorre a finalização do ciclo e dá-se seguimento à simulação.

Para o ciclo iterativo executado em cada passo de tempo será adotado o critério sugerido por Maliska (2004) utilizando o campo de pressão como referência, o qual se apresenta

$$\left\| \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{p_{\max}^{k+1} - p_{\min}^{k+1}} \right\|_{\infty} \leq \epsilon \quad (5.79)$$

Neste, i varia de 1 a n , sendo n o número de volumes de controle para a pressão presentes na malha, e ϵ representa o erro admissível para o qual, no caso das simulações executadas neste trabalho, adotou-se um valor de 10^{-7} , salvo especificado contrário.

Verifica-se que tal critério utiliza como referencial a faixa de variação da função no domínio, isto é, o módulo da diferença entre os valores máximo e mínimo do campo (de pressão, neste caso). Tal estratégia evita que se mantenha um programa em execução quando as informações importantes, do ponto de vista físico, já não mais apresentem variação⁵.

⁵Maiores detalhes são encontrados em Maliska (2004).

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir da utilização dos três métodos de acoplamento em estudo, isto é, métodos segregado/uma direção, segregado/ambas as direções e simultâneo, para a simulação de dois problemas clássicos de subsidência. Em ambos os casos existem soluções analíticas conhecidas para determinados campos de variáveis (as quais podem ser encontradas no apêndice B), sendo possível validar os métodos comparando-se as soluções numéricas obtidas com as analíticas de referência.

São apresentados, primeiramente, os resultados do problema 1D transiente de Terzaghi (1923). Neste problema, uma carga é aplicada na face superior de uma coluna de determinado material poroso preenchida por um fluido, sem permitir a saída do fluido até atingir o equilíbrio. Em seguida, a face superior é aberta e simula-se o processo de decaimento da pressão de poro ao longo do tempo.

Em segundo lugar tem-se o problema 2D transiente de Mandel (1953). Neste tem-se novamente a aplicação de uma carga sobre uma amostra de determinado material poroso preenchida por um fluido, sendo, porém, que a diminuição da pressão se dá agora através das fronteiras laterais da amostra. Esse problema é muito utilizado como *benchmark* para a validação de códigos numéricos na área da poroelasticidade dado o comportamento não-monotônico esperado para a pressão de poro ao longo do regime transiente de solução.

Para ambos os problemas, primeiramente realiza-se uma discussão

sobre o comportamento físico esperado para a solução do regime transiente. Na sequência, são apresentados os resultados obtidos a partir, primeiramente, da utilização dos métodos segregado/ambas as direções e simultâneo e, em seguida, do método segregado/uma direção, sendo realizada uma comparação entre os métodos ao final de cada seção.

As simulações numéricas foram realizadas com base em códigos computacionais desenvolvidos pelo autor e implementados em linguagem C++, sendo a solução dos sistemas lineares obtida com auxílio de *solvers* da biblioteca *PETSc* (Balay *et al.*, 2015). Os sistemas lineares foram resolvidos utilizando o método *BiCGSTAB*¹ (Van der Vorst, 1992) com pré-condicionamento *SSOR*², sendo adotada uma tolerância de 10^{-12} para a solução dos mesmos.

6.1 Problema de Terzaghi

O problema de Terzaghi (Terzaghi, 1923) é um problema unidimensional transiente clássico de subsidência. Consta, basicamente, de uma coluna de determinado material poroso, preenchida por um fluido, submetida instantaneamente em um tempo $t = 0^+$ a uma tensão σ_0 em sua fronteira superior. O êmbolo responsável pela compressão da coluna é impermeável até atingir o equilíbrio. Após, torna-se permeável, o que permite o fluxo de fluido através da fronteira superior da amostra. As outras fronteiras são impermeáveis. Para garantir que a deformação da coluna ocorra apenas em uma única direção (caracterizando o problema como unidimensional), as paredes do invólucro dentro do qual encontra-se a amostra de material são rígidas, e não criam restrições ao movimento da coluna na direção vertical (não há atrito entre a coluna e as paredes do invólucro).

A simulação numérica desse problema é executada em duas etapas, cujos diagramas esquemáticos, juntamente com as condições de contorno, encontram-se na figura 6.1. A primeira etapa, representada na figura 6.1(a), refere-se à obtenção do estado de equilíbrio de forças alcançado pela amostra no momento da aplicação instantânea da tensão σ_0 sobre ela. Nesta etapa, conforme já citado anteriormente, a fronteira superior do domínio é impermeável, impedindo o escoamento de fluido

¹ *Biconjugate Gradient Stabilized.*

² *Symmetric Successive Over Relaxation.*

através dela. O avanço da solução é feito em apenas um nível de tempo, sendo esse avanço no tempo utilizado apenas como um artifício para obtenção do estado de equilíbrio inicial do problema, não representando um avanço real no tempo. É importante frisar que a condição de equilíbrio não depende do tempo e nem do tamanho do intervalo de tempo fictício empregado. Isso ocorre pois as equações de equilíbrio (3.1 e 3.2) independem do tempo e não ocorre o aparecimento de um gradiente de pressão espacial, ou seja, não há escoamento de fluido, pois todas as fronteiras são impermeáveis.

É importante observar que, para este caso em específico, não é viável utilizar o critério 5.79 para verificação da convergência do ciclo iterativo. Este critério utiliza como referência a faixa de variação da pressão no domínio, e, no problema em análise, o que se espera na condição de equilíbrio inicial é justamente um campo uniforme de pressão³. Assim, nesse caso, utiliza-se como critério

$$\left\| \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{p_i^{k+1}} \right\|_{\infty} \leq \epsilon \quad (6.1)$$

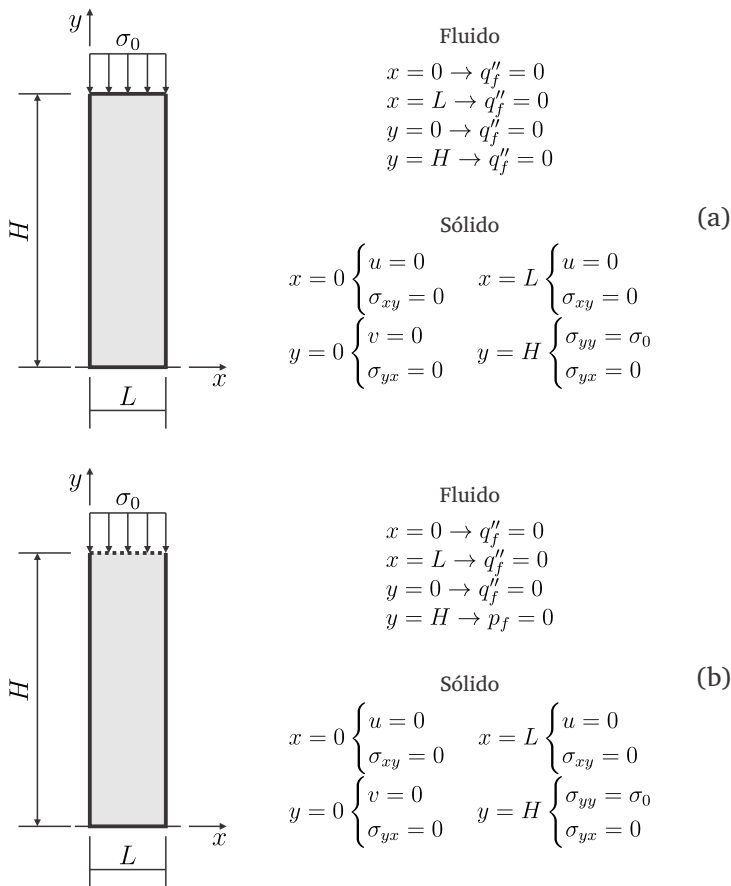
onde i varia de 1 a n , sendo n o número de volumes de controle para a pressão presentes na malha. O erro, agora, é relativo a pressão calculada em cada ponto na última iteração, o que viabiliza a utilização de tal critério para o problema em questão. Para finalização do ciclo iterativo, nesse caso, definiu-se um erro admissível para a pressão de $\epsilon < 10^{-12}$.

Da simulação realizada na primeira etapa obtém-se campos de pressão e tensão efetiva uniformes atuando sobre a matriz porosa. As tensões efetivas criam um campo de deformações no domínio. Como as paredes do invólucro são rígidas, neste caso o campo de deformações se constituirá de deformações nulas na direção horizontal (isto é, $\epsilon_{xx} = 0$) e não nulas na direção vertical.

Calculadas as variáveis para a condição de equilíbrio atingida no instante de aplicação da carga σ_0 , ou seja, no instante $t = 0^+$, dá-se início à segunda etapa da simulação do problema, o problema transiente, com as condições mostradas na figura 6.1(b). Utilizando os campos de variáveis obtidos na primeira etapa da simulação como condição inicial para a segunda e prescrevendo uma pressão igual a zero na fronteira superior

³Neste problema desconsidera-se a ação da gravidade.

Figura 6.1 – Diagrama esquemático do problema de Terzaghi com as condições de contorno. (a) Problema para a condição de equilíbrio em $t = 0^+$. (b) Problema transiente.



Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

do domínio (permitindo que o fluido passe a escoar para fora do domínio através de tal fronteira), realiza-se o avanço da solução. Fisicamente, a pressão vai decaindo ao longo do tempo até atingir uma pressão uniforme ao longo da coluna, igual a pressão imposta na face superior (observa-se que os efeitos gravitacionais não estão sendo considerados).

As propriedades do fluido e da matriz porosa utilizadas nas análises realizadas para o problema de Terzaghi são apresentadas na tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Dados para o problema de Terzaghi.

Dado de entrada	Valor	Unidade
Altura da coluna	5,0	<i>m</i>
Largura da coluna	1,0	<i>m</i>
Tensão no topo da coluna	$1,0 \times 10^6$	<i>Pa</i>
Compressibilidade dos grãos sólidos	$2,777778 \times 10^{-11}$	<i>Pa</i> ⁻¹
Compressibilidade do fluido	$3,030303 \times 10^{-10}$	<i>Pa</i> ⁻¹
Primeiro parâmetro de Lamé	$4,0 \times 10^9$	<i>Pa</i>
Coefficiente de Poisson	0,2	-
Coefficiente de Biot	0,777778	-
Porosidade de referência	0,19	-
Permeabilidade absoluta	$1,0 \times 10^{-15}$	<i>m</i> ²
Viscosidade do fluido	0,001	<i>Pa.s</i>

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 6.2 – Propriedades referentes a rocha arenito Berea.

Propriedade	Valor	Unidade
Módulo de compressão volumétrica da matriz porosa	$8,0 \times 10^9$	<i>Pa</i>
Módulo de compressão volumétrica dos grãos sólidos	$3,6 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>
Módulo de compressão volumétrica do fluido	$3,3 \times 10^9$	<i>Pa</i>
Módulo de cisalhamento	$6,0 \times 10^9$	<i>Pa</i>

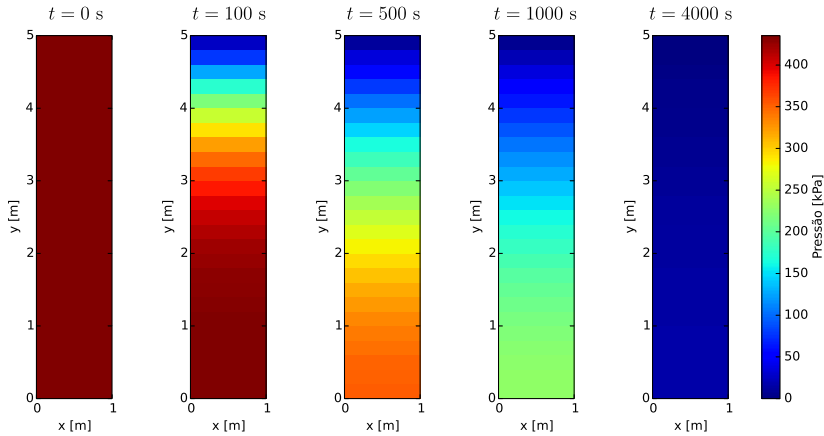
Fonte: Detournay & Cheng (1993).

Estas propriedades foram calculadas⁴ a partir das propriedades encontradas na tabela 6.2, as quais foram retiradas de Detournay & Cheng (1993) e referem-se a uma rocha arenito Berea. Na tabela 6.1 também podem ser encontrados os dados da geometria do domínio e as condições de contorno utilizadas para as simulações.

Com o objetivo de inicialmente apenas mostrar o comportamento

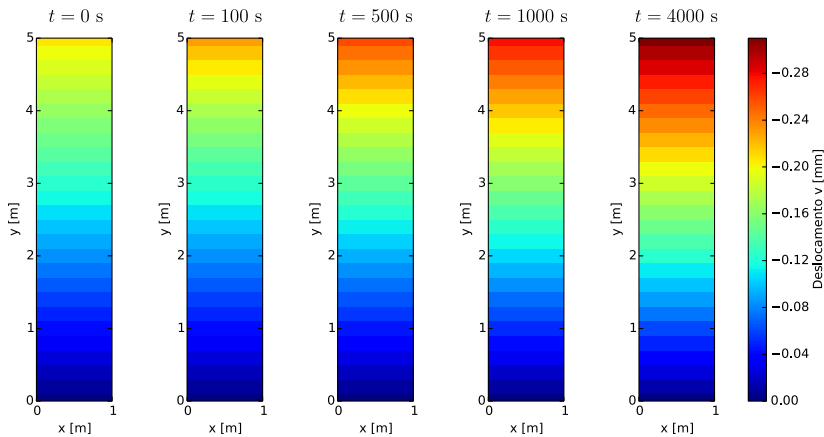
⁴Utilizou-se das correlações para um meio poroso ideal presentes no apêndice A.3.

Figura 6.2 – Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 5×25 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.3 – Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 0,1$ s e uma malha com 5×25 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

do problema de Terzaghi, nas figuras 6.2 e 6.3 são mostrados, respectivamente, os campos de pressão e deslocamento vertical obtidos para vários níveis de tempo utilizando o acoplamento segregado/ambas as direções,

um passo de tempo de 0,1 segundos e uma malha com 5×25 volumes. Nota-se que o comportamento unidimensional esperado para a solução foi corretamente calculado através do problema bidimensional simulado, pois a pressão e o deslocamento vertical variam com o tempo apenas ao longo do eixo y , sendo constantes ao longo do eixo x . Além disso, da simulação resultaram deslocamentos horizontais cuja maior ordem foi de $10^{-17} m$, isto é, deslocamentos praticamente nulos (se comparados à ordem de grandeza dos deslocamentos verticais encontrados), resultantes do processo iterativo de solução do sistema linear.

Fisicamente o que se observa é que, em $t = 0$, logo após a aplicação instantânea da carga sobre a coluna, isto é, atingida a condição de equilíbrio inicial, o campo de pressão é constante ao longo de todo o domínio. Nesta situação a matriz porosa e a pressão do poro sustentam a carga aplicada. Com a abertura da fronteira superior do meio existe uma saída de fluido, e a pressão da coluna passa a decrescer. Neste problema, para em torno de $t = 4000$ segundos, praticamente não existe mais sobrepressão em pontos da coluna.

Ao mesmo tempo em que o fluido deixa a coluna, maior se torna a parcela da carga que a matriz porosa tem que suportar, o que resulta, conseqüentemente, em maiores deslocamentos e deformações sobre a matriz. Para $t \rightarrow \infty$, o sistema atingirá uma nova condição de equilíbrio onde (lembrando que o problema desconsidera a ação da gravidade) a pressão será nula ao longo de todo o campo e a matriz porosa suportará sozinha a carga aplicada sobre a coluna, isto é, $\sigma' = \sigma$.

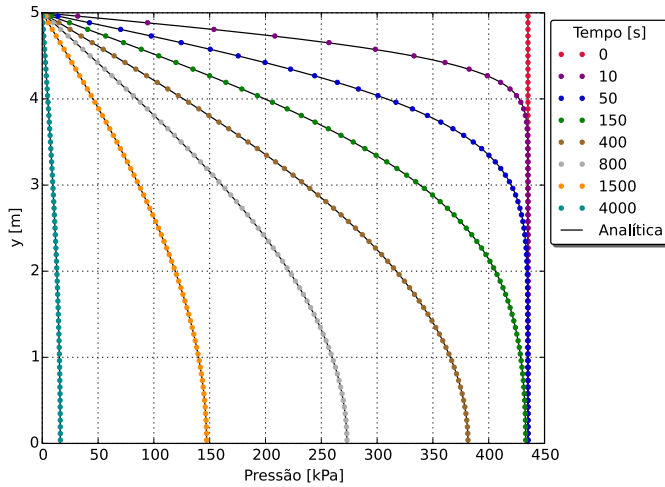
Nas seções que seguem o problema de Terzaghi é resolvido empregando as diferentes estratégias de tratamento do acoplamento.

6.1.1 Acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo

6.1.1.1 Solução do problema

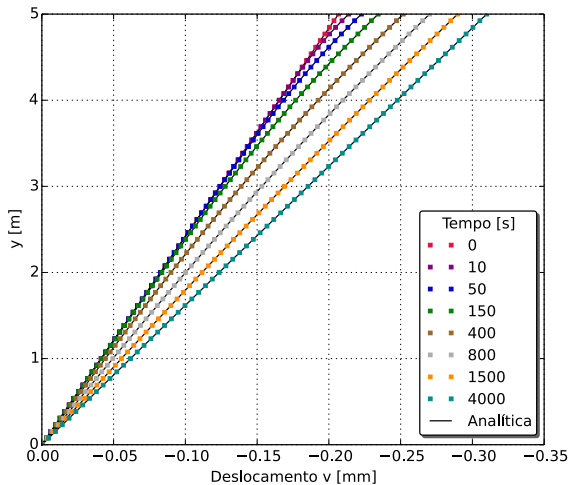
A figura 6.4 mostra, para a distribuição de pressão com o tempo, a comparação da solução analítica com a solução empregando o acoplamento segregado/ambas as direções, onde pode-se constatar que a solução numérica foi bem calculada. Como as comparações com a solução analítica são boas, não existe a preocupação de refinar a malha, pois, logicamente, a malha está adequada. A figura 6.5 compara a solução analítica com a solução numérica simultânea para o deslocamento ao longo da

Figura 6.4 – Acoplamento segregado/ambas as direções: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

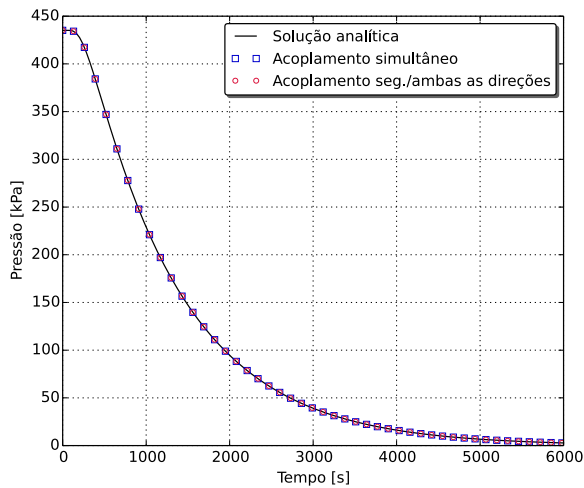
Figura 6.5 – Acoplamento simultâneo: perfis de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

coluna. A figura 6.6 fecha as comparações mostrando os resultados das duas estratégias de acoplamento, segregada/ambas as direções e simultânea, comparadas com a solução analítica para o transiente da pressão na base da coluna. Comparação semelhante foi feita para o deslocamento no topo da coluna, mas não é aqui apresentada. Estas figuras indicam que as implementações dos dois códigos estão corretas.

Figura 6.6 – Comparação entre as soluções numéricas e a analítica da pressão na base da coluna. Utilizados $\Delta t = 0,1 s$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

6.1.1.2 Análise de erros e da taxa de convergência

Até o momento tem-se comparações que comprovam a correta implementação dos códigos e a exatidão dos resultados obtidos, mas ainda não se tem a ordem de convergência dos métodos, ou seja, como as soluções convergem em função do refino espacial e temporal do problema. Ao longo das análises deve ser lembrado que a porosidade é considerada constante na solução analítica, enquanto nas soluções numéricas deste trabalho pode variar ao longo do tempo. Neste caso, entretanto, a porosidade tem uma variação muito pequena (o que é discutido na subseção 6.1.1.3), não modificando os resultados.

Na figura 6.7 pode ser observado, em um gráfico log-log, o comportamento do erro do campo de pressão (obtido para o tempo de 100s) em função do comprimento característico da malha, utilizando diferentes passos de tempo para a metodologia segregada/ambas as direções. O erro é calculado segundo a equação

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\Phi_{i,\text{analit}} - \Phi_{i,\text{num}})^2 \Delta A_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Phi_{i,\text{analit}}^2 \Delta A_i}} \quad (6.2)$$

onde Φ representa uma variável genérica para a qual se está avaliando o erro (pressão, neste caso), n o número de volumes de controle para a variável presentes na malha e ΔA_i a área referente a cada volume de controle i^5 . Esta equação representa a norma 2 do erro referente ao campo de uma variável como um todo, ou, em outras palavras, um erro "médio" para o campo.

O comprimento característico da malha é calculado a partir de

$$h = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta A_i}}{n} \quad (6.3)$$

e representa, basicamente, um parâmetro para avaliação do grau de refino da malha. Quanto menor o comprimento característico, maior a quantidade de células presentes na malha e, conseqüentemente, maior a quantidade de variáveis sendo calculadas ao longo do domínio. Vale lembrar que o arranjo desconstruído adotado para as variáveis sobre a malha tem meios volumes para os deslocamentos nas regiões de fronteira (subseção 5.3.2) e quantidades diferentes de volumes de controle para a pressão e para os deslocamento. Assim, os comprimentos característicos referentes a cada uma dessas variáveis para uma mesma malha serão levemente distintos. A diferença diminui, logicamente, com o refino da malha. As características das malhas utilizadas nas figuras 6.7 a 6.10 encontram-se na tabela 6.3.

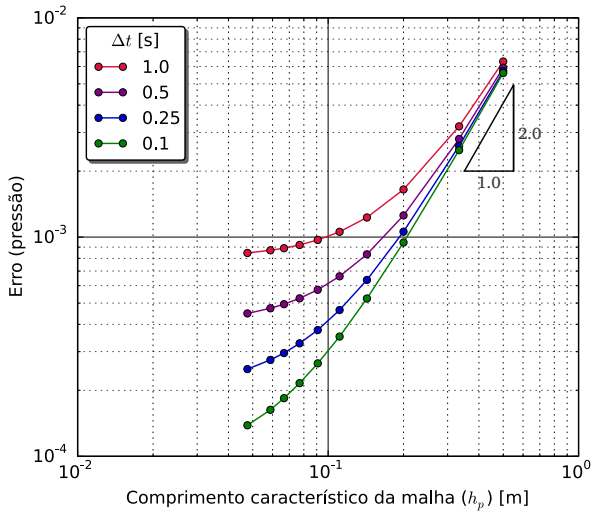
⁵Utiliza-se a área do volume de controle para ponderação do erro, neste caso, em função de que estão sendo resolvidos problemas bidimensionais. No caso de problemas com três dimensões, utilizar-se-ia o volume.

Tabela 6.3 – Malhas utilizadas para a análise do refino de malha (h_p e h_v representam, respectivamente, os comprimentos característicos referentes à pressão e ao deslocamento vertical).

	nx	ny	h_p	h_v
Malha 01	2	10	0,5	0,47337
Malha 02	3	15	0,333333	0,32113
Malha 03	5	25	0,2	0,19549
Malha 04	7	35	0,14286	0,14053
Malha 05	9	45	0,111111	0,1097
Malha 06	11	55	0,09091	0,08996
Malha 07	13	65	0,07692	0,07624
Malha 08	15	75	0,06667	0,06615
Malha 09	17	85	0,05882	0,05842
Malha 10	21	105	0,04762	0,04736

Fonte: elaborada pelo autor.

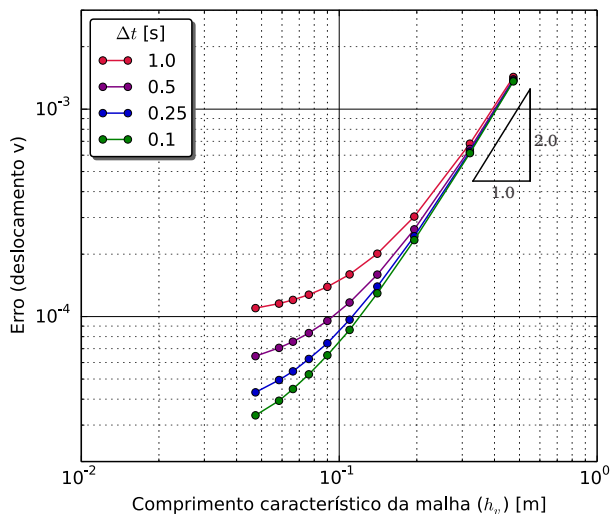
Figura 6.7 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.



O que se percebe na figura 6.7 é que, assim como esperado, o erro tende a diminuir à medida que o comprimento característico da malha torna-se menor, isto é, a solução numérica tende a se aproximar da analítica com o refino da malha. Porém, conforme h diminui, passa a ser observada uma horizontalização nos perfis de erro.

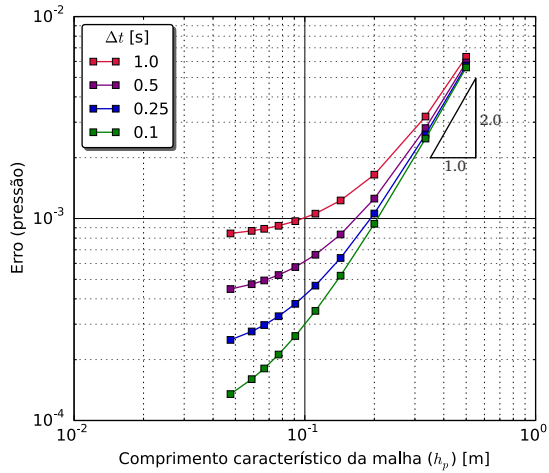
Para entender este comportamento é necessário atentar para o fato de que o problema que está sendo analisado é transiente e, portanto, função do tempo e do espaço. Logo, na figura 6.7 a solução tem erros provenientes de duas fontes, isto é, da discretização do problema no espaço e da discretização no tempo. O perfil do erro vai tendendo a uma reta quando os refinamentos no tempo e no espaço são feitos, conforme pode ser visto na figura. Resultados semelhantes foram obtidos por Ferronato *et al.* (2010), que também analisaram problemas transientes. A variação do erro com o refino da malha apresentou um comportamento semelhante no caso do campo de deslocamento vertical obtido através do acoplamento segregado/ambas as direções (figura 6.8) e dos campos de pressão e deslocamento vertical obtidos através do método simultâneo (figuras 6.9 e 6.10).

Figura 6.8 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.



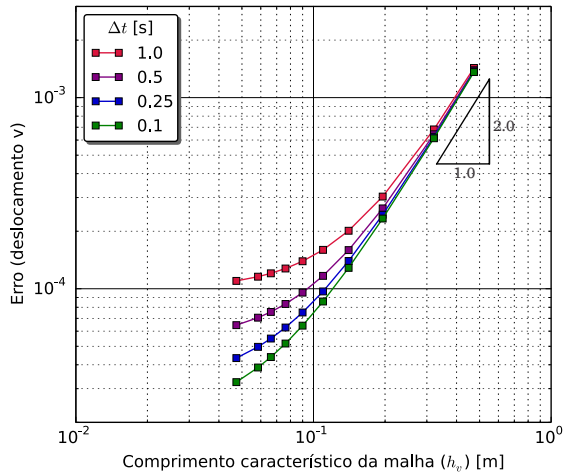
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.9 – Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.10 – Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

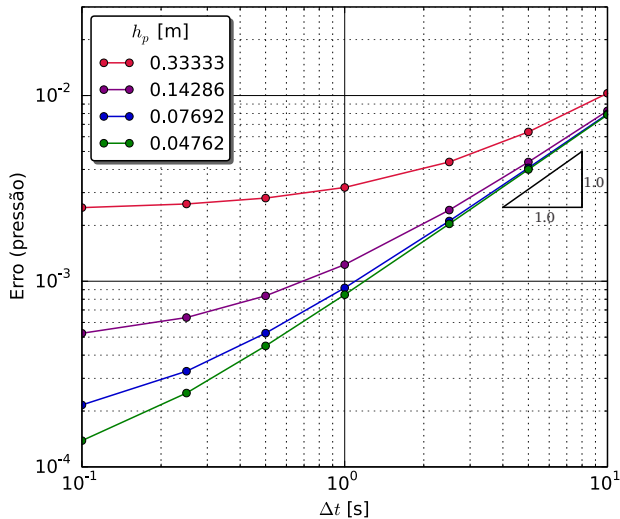
Dado que as funções utilizadas para a aproximação das derivadas das variáveis nas faces do volume de controle durante a discretização das equações (seção 5.2) são funções de interpolação com precisão de segunda ordem (Maliska, 2004), espera-se uma diminuição do erro com o refino da malha também de segunda ordem⁶. O que se observa nas figuras 6.7 a 6.10 é que, em todos os casos, inicialmente o erro diminui à taxa esperada, porém a convergência se deteriora à medida que malhas mais refinadas são utilizadas. Como já comentado, caso fosse possível realizar as simulações com um passo de tempo infinitesimalmente pequeno, restaria apenas o erro advindo da discretização do problema no espaço, o que resultaria em um perfil linear com uma taxa de convergência de segunda ordem. É o que acontece, por exemplo, quando os erros de uma solução de regime permanente são apresentados, pois nesta situação pode-se dizer que os erros da discretização temporal são nulos.

Uma análise análoga à realizada para avaliação do erro advindo da discretização do problema no espaço pode ser realizada para o erro decorrente da discretização no tempo. Na figura 6.11 é possível observar a variação do erro do campo de pressão (obtido para o tempo de 100s) em função do tamanho do passo de tempo utilizado na simulação. O erro é calculado segundo a equação 6.2 e cada perfil de erro refere-se a uma malha distinta (malhas 02, 04, 07 e 10 da tabela 6.3), sendo os resultados referentes ao método segregado/ambas as direções.

O comportamento apresentado pelos perfis de erro é muito semelhante ao já observado na figura 6.7, isto é, o erro tende a diminuir à medida que menores passos de tempo são utilizados para obtenção da solução. Por outro lado, à medida que se diminui o passo de tempo, nota-se novamente a ocorrência de uma horizontalização no perfil de erro, onde a tendência é que, após determinado ponto, o mesmo venha a se tornar praticamente constante. Esse efeito é explicado, mais uma vez, pelo fato de que tal análise é realizada para uma solução obtida em meio ao regime transiente do problema. Nesse sentido, o erro analisado no gráfico da figura 6.11 não representa apenas o erro advindo da discretização do problema no tempo, mas sim a soma desse com o decorrente também da discretização do problema no espaço. Com o refino da ma-

⁶Para maiores detalhes em relação à ordem de precisão e avaliação do erro de discretização, consultar Salari & Knupp (2000).

Figura 6.11 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.

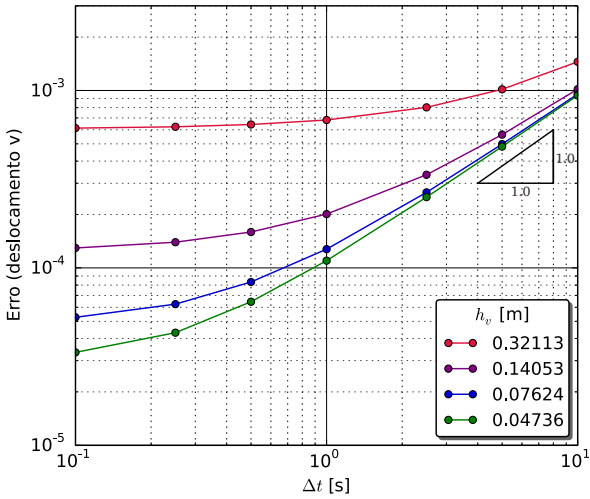


Fonte: elaborada pelo autor.

lha, o erro proveniente dessa fonte tende a diminuir, suavizando, com isso, o efeito da horizontalização dos perfis. Pode ser visto na figura que, para tamanhos de malhas menores, o comportamento praticamente segue uma reta. O mesmo comportamento para os perfis de erro foi observado, ainda, para o campo de deslocamento vertical obtido através do método segregado/ambas as direções (figura 6.12) e para os campos de pressão e deslocamento vertical obtidos através do método simultâneo (figuras 6.13 e 6.14).

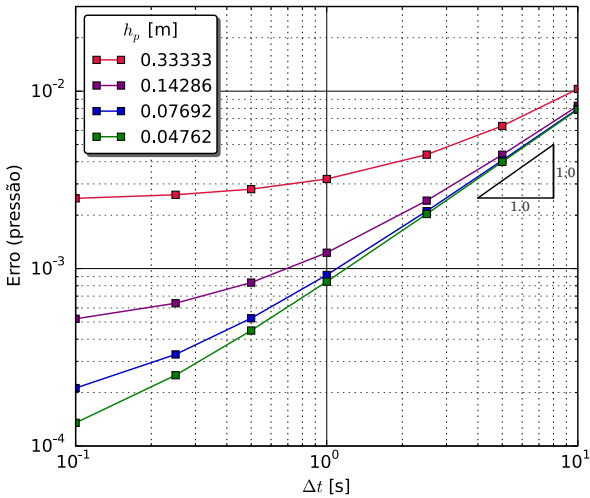
Como as derivadas das variáveis em relação ao tempo são aproximadas numericamente utilizando funções com precisão de primeira ordem (seção 5.2), espera-se uma diminuição do erro com a diminuição do tamanho do passo de tempo também de primeira ordem. O que se percebe nas figuras 6.11 a 6.14 é que, em todos os casos, inicialmente o erro diminui à taxa esperada, porém a convergência piora à medida com que menores passos de tempo são utilizados. Caso fosse possível se realizar simulações utilizando uma malha com volumes de controle infinitesimalmente pequenos, o erro decorrente da discretização no espaço tenderia a zero, o que resultaria, como consequência, em um perfil linear

Figura 6.12 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.



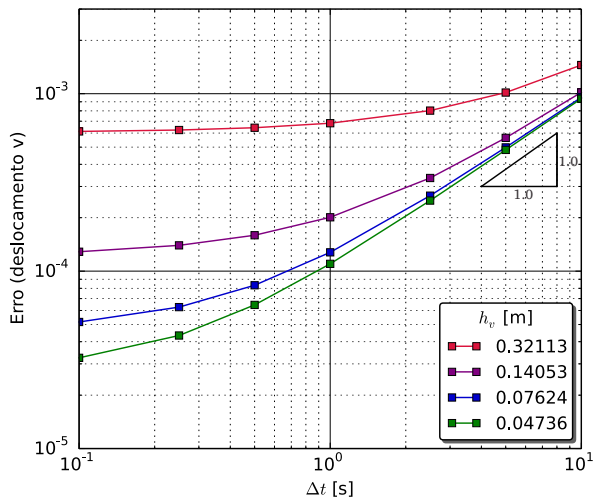
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.13 – Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.14 – Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.



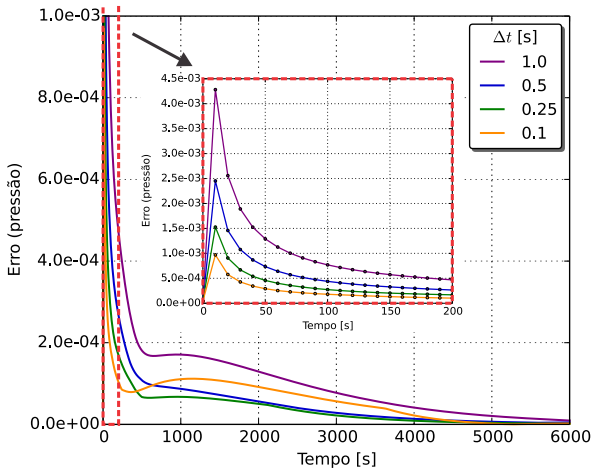
Fonte: elaborada pelo autor.

com a taxa de convergência esperada.

Realizadas as análises da taxa de convergência das soluções, é também importante verificar como comporta-se o erro ao longo do regime transiente do problema. Normalmente, um detalhamento do erro ao longo do transiente não é feito, concentrando-se nos erros da solução de regime permanente. Como o importante deste problema é o seu transiente, faz-se esta análise. A figura 6.15 apresenta os perfis de erro do campo de pressão ao longo do tempo obtidos utilizando diferentes passos de tempo. Já a figura 6.16 apresenta o erro da solução para a pressão ao longo da coluna para diferentes níveis de tempo, isto é, o erro calculado pontualmente no centro de cada volume de controle. Observa-se que o segundo gráfico tem como base uma simulação utilizando um passo de tempo fixo de 0,1 s, isto é, representa o erro ao longo da coluna equivalente a apenas um dos perfis de erro presentes na figura 6.15. Os dados presentes em ambos os gráficos foram obtidos utilizando o método de acoplamento segregado/ambas as direções.

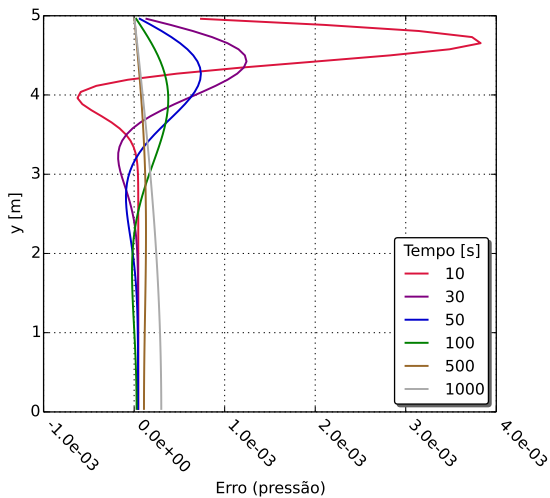
A equação 6.2 não é adequada para demonstração da variação do erro do campo de pressão ao longo do tempo. A solução analítica é um campo de pressão nulo no regime permanente, isto é, teria-se $\epsilon \rightarrow \infty$.

Figura 6.15 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão vs. tempo. Utilizada uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.16 – Acoplamento segregado/ambas as direções: erro da pressão ao longo da coluna. Utilizados $\Delta t = 0, 1$ s e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, o cálculo do erro na figura 6.15 é realizado utilizando a equação

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_{i,\text{analit}} - p_{i,\text{num}})^2 \Delta A_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [p_{i,\text{analit}}(t=0)]^2 \Delta A_i}} \quad (6.4)$$

onde $p_{i,\text{analit}}(t=0)$ representa a solução analítica para a pressão em $t=0$, ou seja, no momento em que a condição de equilíbrio inicial é atingida. Basicamente apenas modifica-se o valor a qual o erro é relativo, contornado, assim, o problema citado.

No gráfico da figura 6.16, o erro em cada ponto é calculado segundo a equação

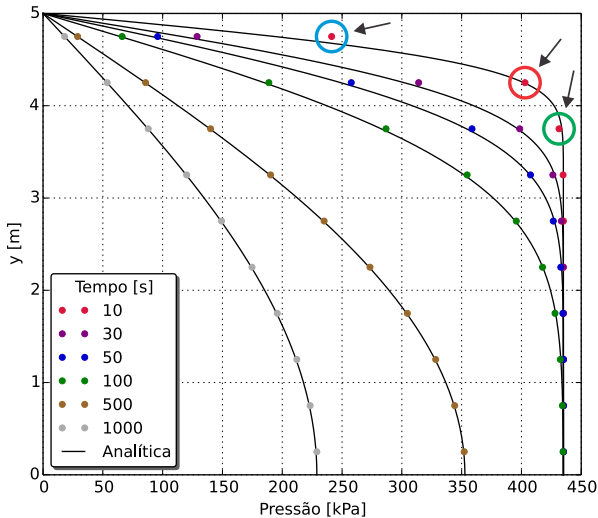
$$\epsilon = \frac{\Phi_{\text{num}} - \Phi_{\text{analit}}}{\Phi_{\text{analit,max}} - \Phi_{\text{analit,min}}} \quad (6.5)$$

onde Φ representa uma variável genérica para a qual se está avaliando o erro (pressão, neste caso) e os subscritos "analit" e "num" referem-se às soluções analítica e numérica da variável em questão. Como a pressão é constante no sentido horizontal, os perfis de erro na figura 6.16 foram obtidos apenas para as variáveis localizadas ao centro dos volumes de controle adjacentes à fronteira esquerda do domínio, ou seja, apenas na direção y .

Na figura 6.17 é realizada uma comparação para a pressão ao longo da coluna para os mesmos níveis de tempo considerados na figura 6.16 mas, agora, obtidos para uma malha de 2×10 volumes. Observando a solução numérica para o nível de 10s percebe-se que o ponto mais próximo do topo da coluna (circulado em azul) mostra-se afastado da solução analítica, apresentando um valor numérico maior do que o esperado. O segundo ponto (circulado em vermelho), por sua vez, já demonstra um valor muito próximo da solução analítica, enquanto o terceiro ponto (circulado em verde) apresenta um valor numérico menor do que o esperado. Basicamente, tem-se que o primeiro e o terceiro pontos referem-se aos picos positivo e negativo de erro observados na figura 6.16, enquanto o segundo ponto representa a região entre os picos onde ocorre a mudança de sinal no valor do erro.

O que se infere disso é que o método numérico utilizado tende a "suavizar" o grande gradiente de pressão existente no início do regime transiente próximo ao topo da coluna, efeito que ocorre em função de

Figura 6.17 – Acoplamento segregado/ambas as direções: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 2×10 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

que a malha utilizada é incapaz de capturar corretamente esse gradiente. Seria necessário um maior refino da malha nessa região para uma melhor representação da solução. Assim como é observado no perfil de erro para o tempo de 10s na figura 6.16, do topo à base, primeiramente a solução numérica afasta-se da analítica, em seguida atravessa a mesma em um determinado ponto, afasta-se novamente e, após, torna-se muito próxima, apresentando um erro consideravelmente baixo a partir desse ponto. Com o avanço da solução no tempo, o gradiente de pressão torna-se menor e a solução numérica passa a representar mais fielmente a solução esperada. Percebe-se que para o tempo de 500s ambas as soluções passam a se mostrar muito próximas, inclusive para uma malha relativamente grosseira como a utilizada na figura 6.17.

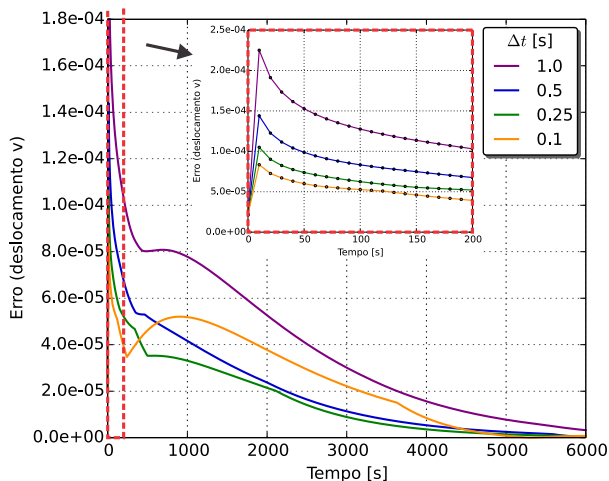
A partir dessas observações pode-se, por fim, entender o porquê do comportamento apresentado pelo erro na figura 6.15. Primeiramente, como esperado, o mesmo apresenta um pico em função do grande gradiente de pressão existente no topo da coluna ao início do regime transiente. Em seguida diminui rapidamente junto à rápida variação do campo de pressão e conseqüente suavização do gradiente. À medida que a vari-

ação do campo ocorre de modo mais lento ao longo do tempo (devido à existência de menores gradientes ao longo do domínio), a velocidade com que o erro diminui também se torna menor, chegando a um ponto onde o erro se estabiliza (ou cresce levemente por alguns momentos), para depois decrescer com a aproximação do regime permanente da solução.

Da mesma forma, foi analisado o comportamento do erro do campo de deslocamento vertical ao longo do tempo para o acoplamento segregado/ambas as direções. Um gráfico representativo desta análise, equivalente ao feito para a pressão, é mostrado na figura 6.18. Os demais gráficos não são aqui mostrados. Toda esta análise dos erros foi feita também para a pressão e os deslocamentos na estratégia de acoplamento simultânea, com comportamentos do erro semelhantes e que se explicam pelos mesmos motivos já citados. Estes gráficos também não são aqui mostrados.

Finalmente, o que também ficou claro pelas análises de todos os casos (pressão e deslocamento com as duas estratégias de acoplamento), e isto é mostrado nas figuras 6.15 e 6.18, é que os erros, conforme esperado, reduzem com a redução do intervalo de tempo empregado na solução, mostrando a consistência do método numérico.

Figura 6.18 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical vs. tempo. Utilizada uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

6.1.1.3 Análise da não-linearidade

É interessante observar que a porosidade, isto é, a não-linearidade do problema, varia muito pouco ao longo do transiente, e que seu cálculo, empregando as duas soluções, segregada/ambas as direções e simultânea, apresenta os mesmos resultados, como esperado. As figuras 6.19 e 6.20 mostram isso.

Um detalhe importante é o fato de que, apesar de o material utilizado apresentar uma porosidade de referência de 0,19 (antes da aplicação da carga) a porosidade em $t = 0s$ na figura 6.19 é menor do que a de referência. Isso ocorre porque o início do transiente se dá com a coluna na condição de equilíbrio com a carga aplicada, o que significa uma diminuição de porosidade devido ao deslocamento ocorrido com a aplicação da carga.

A figura 6.21 mostra comparações entre as soluções numéricas para a variável pressão obtidas tratando a porosidade como uma não-linearidade e como uma constante. Observa-se que não existem diferenças entre as duas soluções. O mesmo foi feito para os deslocamentos, cujo gráfico não é mostrado aqui.

Figura 6.19 – Perfis de porosidade ao longo da coluna. Utilizados $\Delta t = 0,1s$ e uma malha com 13×65 volumes.

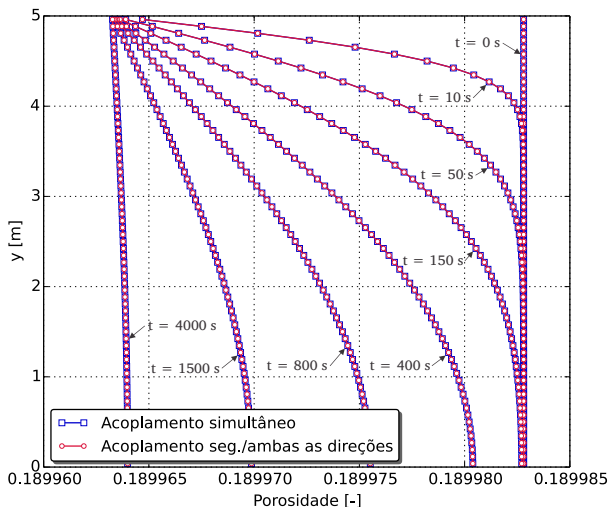
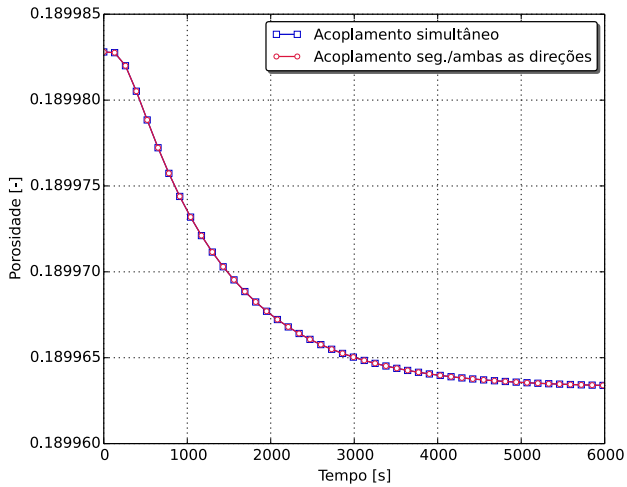
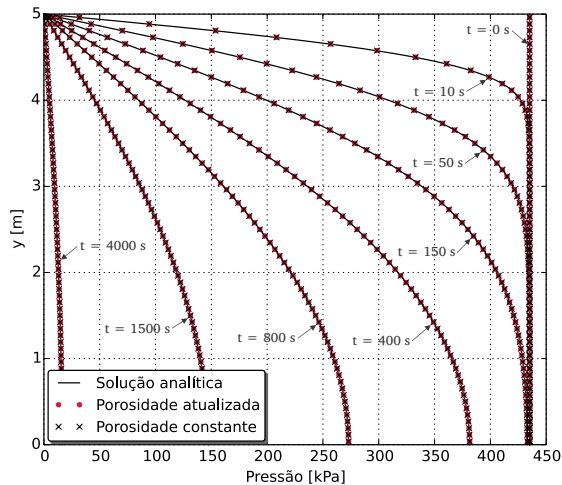


Figura 6.20 – Porosidade na base da coluna vs. tempo. Utilizados $\Delta t = 0,1\text{ s}$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

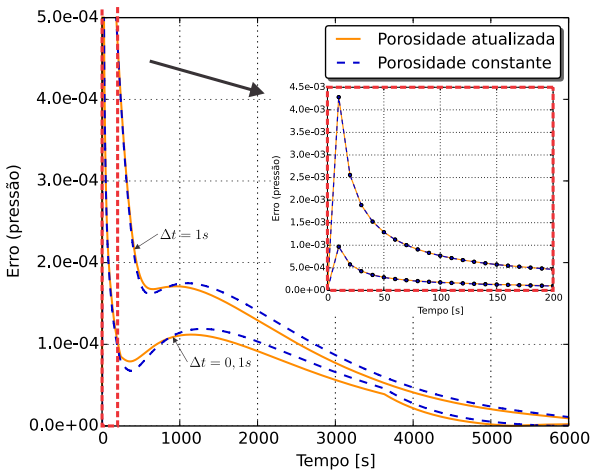
Figura 6.21 – Acoplamento segregado/ambas as direções: perfis de pressão obtidos utilizando porosidade atualizada e porosidade constante. Utilizados $\Delta t = 0,1\text{ s}$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 6.22 podem ser observados os perfis de erro ao longo do tempo para as soluções numéricas considerando a porosidade como uma não-linearidade e como uma constante para o campo de pressão. O erro é calculado através da equação 6.4. Nota-se que, para os dois passos de tempo utilizados, os perfis mostram-se muito semelhantes. Confirma-se, com isso, que a porosidade é uma não-linearidade bastante fraca no problema de Terzaghi. Os códigos desenvolvidos estão, entretanto, preparados para considerar variações significativas de porosidade.

Figura 6.22 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão vs. tempo. Porosidade atualizada vs. porosidade constante. Utilizada uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Apresentados os resultados obtidos a partir dos métodos de acoplamento segregado/ambas as direções e simultâneo, resta agora a apresentação dos resultados relativos ao método segregado/uma direção, o que é realizado na subseção que segue.

6.1.2 Acoplamento segregado/uma direção

A solução segregada/uma direção é uma boa alternativa quando o problema não contém não-linearidades fortes e quando intervalos pequenos de tempo podem ser empregados.

Neste trabalho resolve-se, em cada nível de tempo, primeiramente os deslocamentos e depois a pressão. Existem, entretanto, também na literatura (Dean *et al.*, 2006; Minkoff *et al.*, 1999, 2003; Settari & Walters, 1999; Tran *et al.*, 2004, 2005) recomendações para se calcular primeiramente o campo de pressão para, na sequência, calcular o de deslocamentos. Com o modelo matemático empregado neste trabalho, mesmo com o refino especial e temporal, os resultados não compararam bem com a solução analítica quando utilizando essa configuração. Invertendo o processo, primeiro realizando o cálculo dos deslocamentos e depois da pressão, a solução comparou muito bem com a analítica.

Na formulação deste trabalho, as razões para os erros encontrados quando a pressão é calculada primeiramente e depois os deslocamentos foram esclarecidas. Inspecionando os termos da equação discretizada do modelo de escoamento para os métodos segregados (equação 5.5) observa-se que a informação da deformação encontra-se presente no termo independente da equação (equação 5.10) sob a forma

$$(\dots) - \alpha(\varepsilon - \varepsilon^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (6.6)$$

Portanto, para o cálculo do campo de pressão em um dado nível de tempo, são necessários os campos de deformações (calculados a partir dos campos de deslocamentos) obtidos para o nível de tempo atual e o nível de tempo anterior, dado que o termo fonte da equação da pressão é uma derivada temporal da deformação.

No termo fonte do modelo geomecânico aparecem as pressões e não suas derivadas e, portanto, para o cálculo dos deslocamentos em um determinado nível de tempo, ao contrário do que ocorre para a pressão, é necessário apenas o campo de pressão obtido para o nível de tempo atual. Como os modelos matemáticos disponíveis na geomecânica apresentam diferentes formulações (como pode ser visto no capítulo 2), é possível que certas formas de escrever o modelo matemático permitam inverter o cálculo da pressão e dos deslocamentos sem consequências.

Na sequência são demonstrados os resultados obtidos a partir do método segregado/uma direção para o problema de Terzaghi.

6.1.2.1 Solução do problema

Nas figuras 6.23 e 6.24 podem ser observados os perfis de pressão e deslocamento vertical ao longo do domínio, para vários níveis de tempo, obtidos através do método de acoplamento segregado/uma direção. A solução analítica está também apresentada para comparação. Nota-se que a solução numérica está muito próxima da analítica. Considerando que é realizada apenas uma iteração em cada nível de tempo, os resultados são bons.

6.1.2.2 Análise de erros e da taxa de convergência

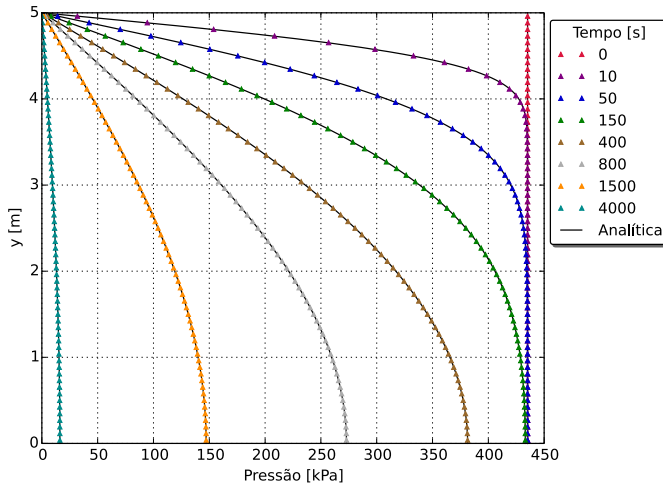
Como realizado para os outros métodos de acoplamento, uma análise do erro da solução é apresentada na figura 6.25. Demonstra-se a variação da norma do erro do campo de pressão (para o nível de tempo de 100s) em relação ao comprimento característico da malha. As malhas da tabela 6.3 foram usadas e a norma do erro calculada com a equação 6.2.

Percebe-se que a variação do erro com o refino da malha na utilização do método segregado/uma direção ocorre de modo semelhante ao observado nos métodos segregado/ambas as direções (figura 6.7) e simultâneo (figura 6.9). A horizontalização do perfil de erro também acontece, o que, como já comentado na subseção 6.1.1.2, ocorre em função dos erros advindos da discretização do problema no tempo e no espaço.

Novamente espera-se uma diminuição do erro com o refino da malha de segunda ordem. O que se observa na figura é que, inicialmente, o erro diminui à taxa esperada, porém a convergência se deteriora à medida com que malhas mais refinadas são utilizadas. Com a utilização de passos de tempo menores, tem-se a aproximação do perfil de uma reta, isto é, se eliminada a parcela de erro advinda da discretização do problema no tempo, teria-se como restante apenas a advinda da discretização do problema no espaço, o que resultaria em um perfil linear com a taxa de convergência esperada. O mesmo comportamento do erro com o refino da malha foi observado também para o deslocamento vertical.

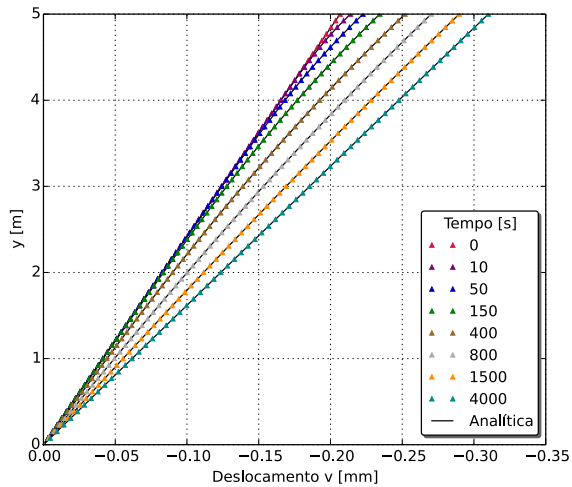
Uma análise semelhante à realizada para o erro da discretização do problema no espaço pode ser realizada para a discretização do problema no tempo. Na figura 6.26 pode ser observado um gráfico log-log onde mostra-se a variação da norma do erro do campo de pressão (obtido para um tempo de 100s) em função do passo de tempo utilizado na simulação.

Figura 6.23 – Acoplamento segregado/uma direção: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 0,1\text{ s}$ e uma malha com 13×65 volumes.



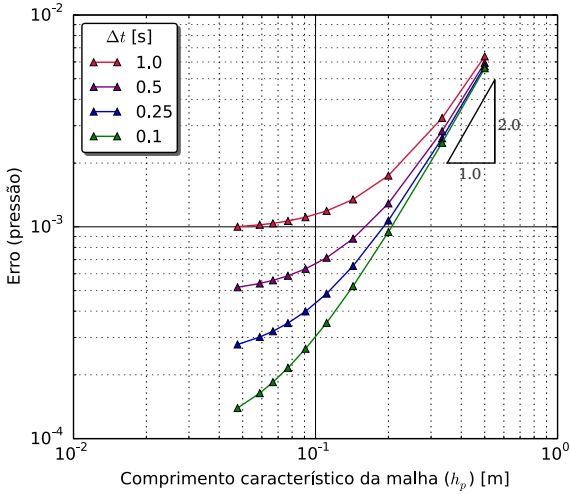
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.24 – Acoplamento segregado/uma direção: perfis de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 0,1\text{ s}$ e uma malha com 13×65 volumes.



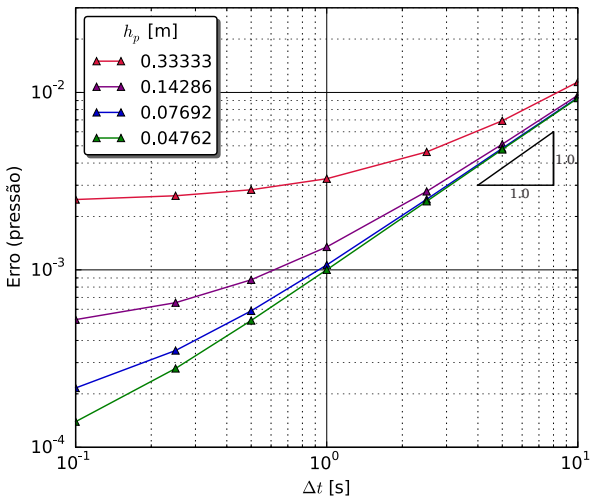
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.25 – Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.26 – Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

São apresentados perfis obtidos através da utilização de diferentes malhas (malhas 02, 04, 07 e 10 da tabela 6.3). Como também ocorreu no caso do erro advindo da discretização do problema no espaço (figura 6.25), tem-se a aproximação dos perfis de erro de um perfil linear apresentando a taxa de convergência presumida (de primeira ordem, nesse caso) à medida com que malhas mais refinadas são utilizadas. O mesmo comportamento foi observado também para o erro do deslocamento vertical.

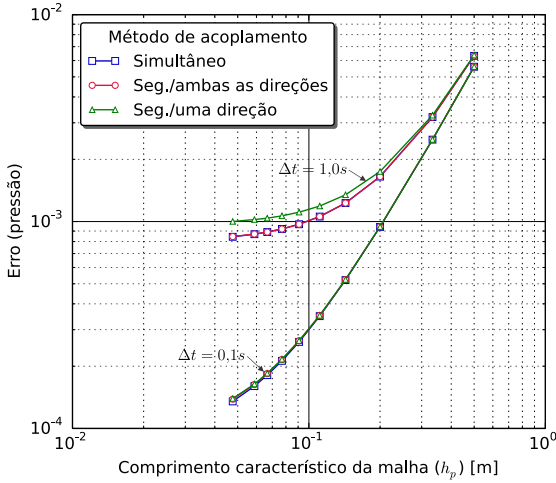
Em resumo, o que se observa das figuras 6.25 e 6.26 é que os resultados obtidos a partir do método segregado/uma direção apresentam um comportamento coerente com o esperado, isto é, a solução numérica aproxima-se da analítica à medida que é feito o refino do problema no espaço e no tempo. Este mesmo comportamento foi observado também no caso dos métodos segregado/ambas as direções e simultâneo, e é esta a característica que demonstra a consistência dos métodos. A análise dos erros locais é semelhante àquela já feita para os outros métodos de acoplamento e não será repetida aqui. Na próxima sessão é feita uma comparação entre os três métodos de acoplamento, com ênfase nos erros e no tempo de CPU para atingir a solução com uma mesma tolerância no transiente.

6.1.3 Comparação entre os métodos de acoplamento

Na figura 6.27 é mostrado o erro do campo de pressão (para a solução no tempo de 100s) em função do comprimento característico da malha, resultante da utilização dos três métodos de acoplamento estudados. São apresentados perfis relativos à utilização de dois passos de tempo, sendo o erro calculado através da equação 6.2. Para $\Delta t = 0,1s$ os três perfis de erro são praticamente coincidentes, com o mesmo nível de erro com o refino da malha. Para $\Delta t = 1,0s$ os erros com o método segregado/uma direção aumentam em relação aos outros dois métodos para um mesmo refino de malha. O que ocorre, na verdade, é que a horizontalização do perfil se inicia com um tamanho de malha maior tendendo a estabilizar o erro em um valor maior do que para os outros dois métodos. Em outras palavras, o método segregado/uma direção tem uma maior parcela, em relação aos outros dois métodos, do erro oriundo da discretização temporal do problema.

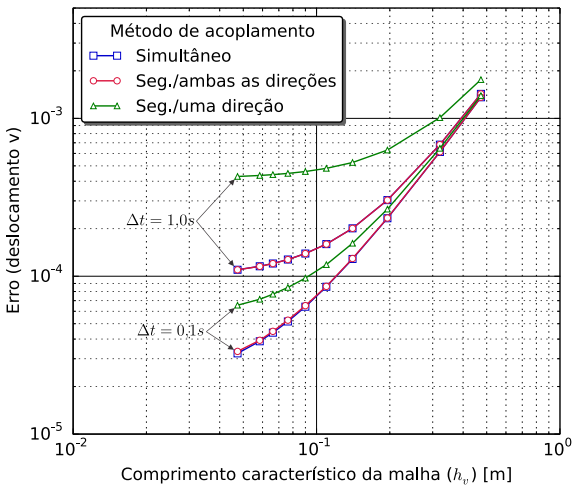
Percebe-se o mesmo efeito também para o caso do erro do campo de deslocamento vertical, o que pode ser observado na figura 6.28. Como

Figura 6.27 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.28 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. comprimento característico da malha.

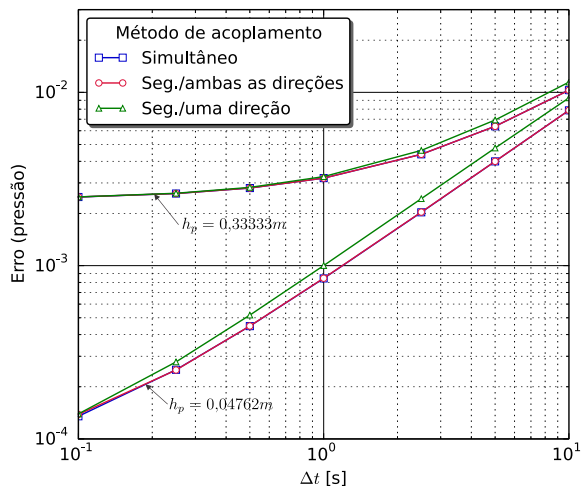


Fonte: elaborada pelo autor.

na figura 6.27, o efeito da horizontalização do perfil faz com que o erro se estabilize em valores maiores no caso do acoplamento segregado/uma direção do que no caso dos outros dois métodos. Nota-se, porém, que agora a diferença entre os perfis de erro é consideravelmente maior do que a observada no caso do erro do campo de pressão. Considerando que a solução não é iterada em cada passo de tempo, essa diferença se deve, basicamente, ao fato de que no acoplamento segregado/uma direção a condição de equilíbrio é calculada considerando apenas as informações do campo de pressão obtido no nível de tempo anterior. Em outras palavras, as informações da pressão acabam interferindo no cálculo dos deslocamentos de forma atrasada.

Na figura 6.29 é possível observar o comportamento do erro do campo de pressão com a variação do passo de tempo para dois tamanhos de malha, uma com 3×15 volumes e a outra com 21×105 . Os métodos apresentam praticamente o mesmo comportamento do erro com o intervalo de tempo para um mesmo tamanho de malha. Logicamente, para um maior tamanho de malha, o erro aumenta para todos os procedimentos de acoplamento.

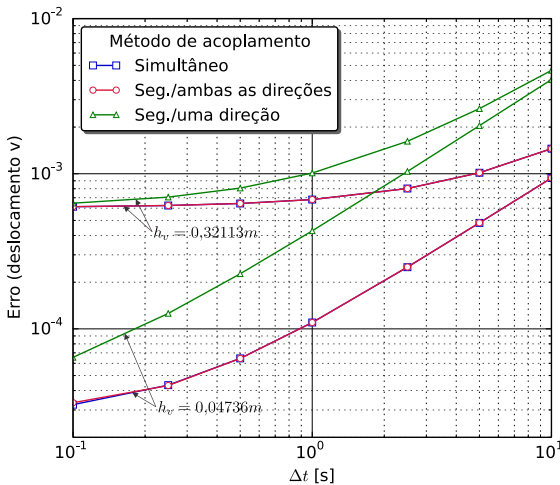
Figura 6.29 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 6.30 é mostrado o erro em função do intervalo de tempo para o campo de deslocamento vertical utilizando as mesmas malhas que na figura 6.29. Neste gráfico existem algumas diferenças em relação ao gráfico anterior. As curvas são praticamente paralelas, mas a diferença entre elas, para um mesmo tamanho de malha, entre o método segregado/uma direção e os demais, aumenta. Além disso nota-se que, mesmo sem iterar a solução dentro de um mesmo nível de tempo, o erro resultante do método segregado/uma direção se aproxima do resultante dos outros dois métodos com o refino do tempo. Isso demonstra, basicamente, a capacidade do método de apresentar resultados corretos com a utilização de um passo de tempo suficientemente pequeno.

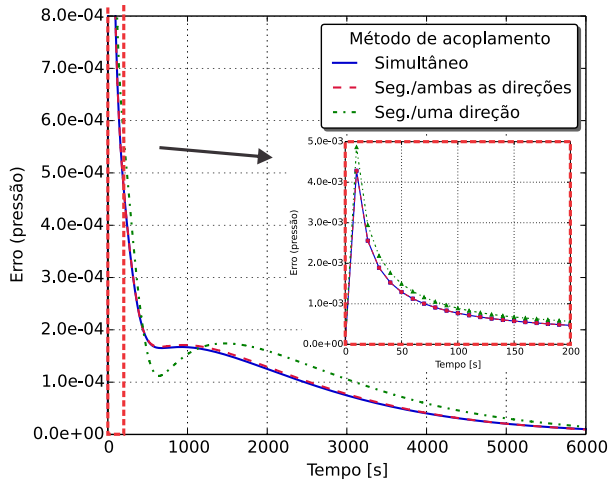
Figura 6.30 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 100s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

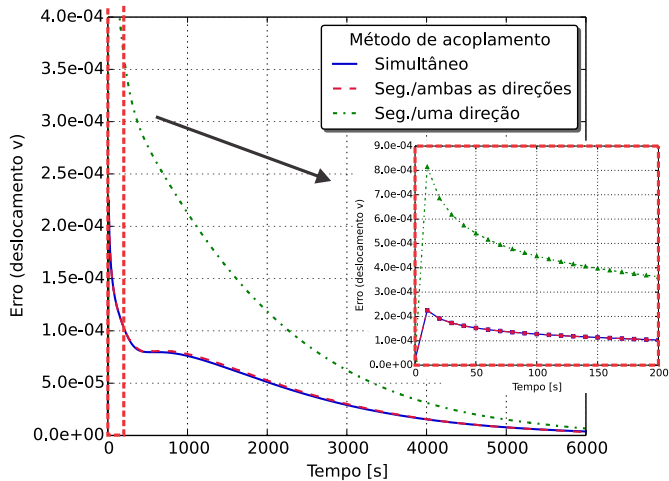
Ainda em relação à análise do erro, nas figuras 6.31 e 6.32 tem-se a norma do erro dos campos de pressão e deslocamento vertical, respectivamente, ao longo do tempo, na utilização dos três métodos de acoplamento. Ambas referem-se a simulações realizadas utilizando uma malha com 13×65 volumes, intermediária às utilizadas nas figuras 6.29 e 6.30. O erro do campo de pressão é calculado através da equação 6.4, enquanto para o campo de deslocamento vertical utiliza-se da equação 6.2.

Figura 6.31 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão vs. tempo. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.32 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical vs. tempo. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 13×65 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

De novo, como esperado, em ambas as figuras, os perfis de erro resultantes dos métodos segregado/ambas as direções e simultâneo são semelhantes. Já os perfis de erro referentes ao método segregado/uma direção, também como esperado, mostram valores maiores do que os outros em ambos os casos. Principalmente em relação à diferença observada no caso do erro do campo de deslocamento vertical (figura 6.32) que, no início do regime transiente, chega a alcançar valores praticamente quatro vezes maiores do que os resultantes dos outros métodos.

Resta, por fim, comparar os métodos sobre um dos principais pontos de interesse na utilização dos mesmos, isto é, o tempo computacional consumido na simulação. Para isso foram realizadas simulações para o problema de Terzaghi utilizando diferentes malhas (tabela 6.4) e um passo de tempo de 0,5s, optando-se pela finalização das mesmas no tempo de 8000s. Os testes foram realizados em sequência e utilizando uma mesma máquina, com o tempo de CPU computado apenas para o regime transiente de cada simulação. O tempo consumido na utilização de cada método, em função do número de volumes de controle presentes na malha, é mostrado no gráfico da figura 6.33.

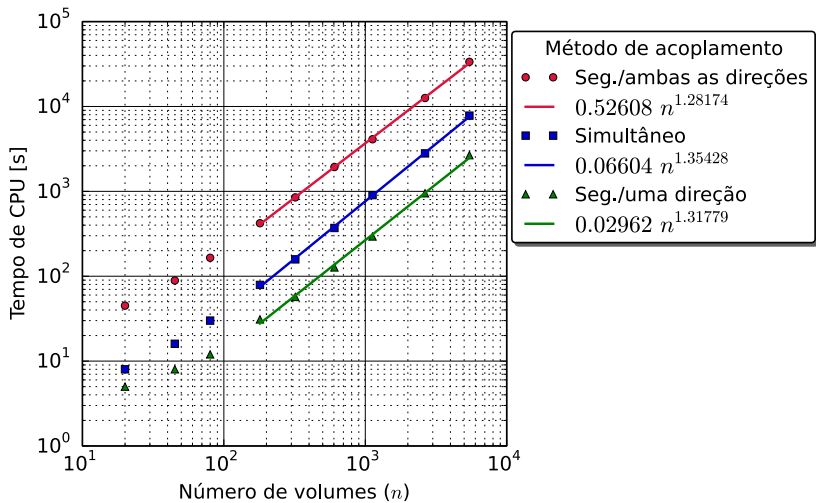
Um primeiro resultado, óbvio, é que o tempo computacional necessário para a solução de um sistema linear cresce exponencialmente com o tamanho do sistema, isto é, com a quantidade de variáveis a serem

Tabela 6.4 – Malhas utilizadas para a análise do tempo de CPU em função do número de volumes da malha na simulação do problema de Terzaghi.

	nx	ny	Número de volumes
Malha 01	2	10	20
Malha 02	3	15	45
Malha 03	4	20	80
Malha 04	6	30	180
Malha 05	8	40	320
Malha 06	11	55	605
Malha 07	15	75	1125
Malha 08	23	115	2645
Malha 09	33	165	5445

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.33 – Comparação entre os métodos de acoplamento: tempo de CPU vs. número de volumes da malha. Utilizado $\Delta t = 0,5$ s.



Fonte: elaborada pelo autor.

resolvidas. Os dados de consumo de tempo computacional na figura 6.33 são ajustados para cada método através de uma lei de potência na forma

$$t(n) = a \times n^b \quad (6.7)$$

onde n representa o número de volumes da malha e t o tempo de CPU consumido na simulação.

No ajuste das curvas desconsiderou-se os dados referentes às três malhas mais grosseiras utilizadas, pois, à medida que o sistema linear diminui de tamanho, menor é a parcela de tempo total despendida na solução desse sistema e, como consequência, mais significativa aquela despendida nas demais subrotinas do código computacional. Considerando que o objetivo aqui é realizar uma análise que possa ser estendida também para problemas de maior porte e que, nesses, a maior parcela de tempo da simulação é despendida na solução dos sistemas lineares, procurou-se isolar o peso dos cálculos auxiliares no tempo total.

O que se observa da figura 6.33 é um cenário interessante. Primeiramente, constata-se que o método segregado/uma direção apresentou os menores valores de tempo de CPU dentre os três métodos. Fica claro o

motivo desse comportamento ao se lembrar que na sua utilização dois sistemas lineares (um 2×2 para o modelo geomecânico e outro para o escoamento) são resolvidos em cada passo de tempo. O método simultâneo, por sua vez, necessitou de um tempo de CPU consideravelmente menor do que o método segregado/ambas as direções para realização das simulações. Por exemplo, utilizando a malha com 1125 volumes o tempo de CPU despendido foi de 930s para o método simultâneo e de 4.109s para o método segregado/ambas as direções, ou seja, o primeiro necessitou cerca de apenas 22,6% do tempo despendido pelo segundo para se chegar à mesma solução.

É fácil entender este comportamento. No método simultâneo um sistema linear contendo as variáveis de ambos os modelos precisa ser resolvido em cada iteração dentro de determinado nível de tempo. A solução deste sistema linear de maiores dimensões realmente mostra-se mais dispendiosa do que a solução de dois sistemas menores, o que é realizado em cada iteração nos métodos segregados. Porém, dada a pequena variação apresentada pela porosidade ao longo do processo de solução, o que se observou foi que utilizando o método simultâneo foram realizadas, em média, apenas duas iterações em cada nível de tempo para se alcançar o critério de convergência estabelecido. Por outro lado, como no caso do método segregado/ambas as direções mostra-se necessário se iterar o problema não só apenas em função da não-linearidade, mas sim em função do acoplamento, observou-se uma média de 15 iterações do acoplamento em cada nível de tempo.

Em outras palavras, se analisado apenas o quesito tempo de CPU, tem-se que o menor tempo necessário para a solução de dois sistemas lineares de menores dimensões não compensa o tempo despendido dada a quantidade maior de iterações que tem de ser realizada em cada nível de tempo. Resumindo, as iterações necessárias no método simultâneo são devidas apenas às não-linearidades, enquanto que no método segregado são devidas as não-linearidades e ao acoplamento, como em qualquer solução de problemas não lineares.

Por fim, os três métodos apresentaram valores próximos (da ordem de 1,3) para o parâmetro b das curvas ajustadas. Isso indica que, neste caso, o tempo de CPU necessário para a simulação cresce exponencialmente a uma taxa semelhante na utilização dos três métodos, à medida que faz-se o refino da malha. Uma análise semelhante utilizando um

passo de tempo dez vezes maior (5,0s) também foi realizada, sendo verificado nessa um comportamento análogo ao já observado na figura 6.33.

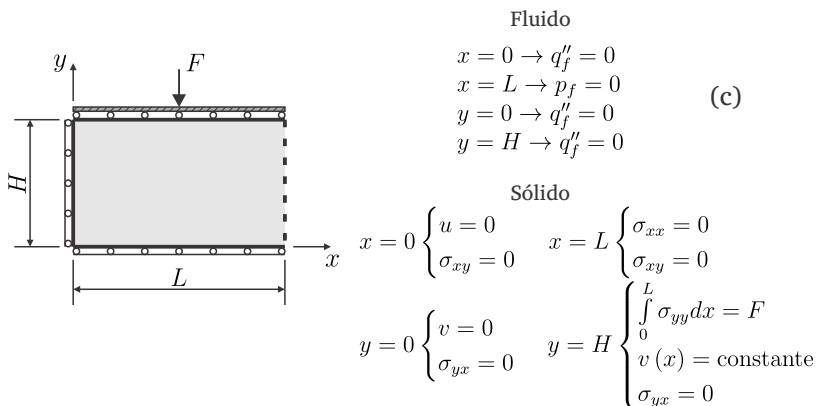
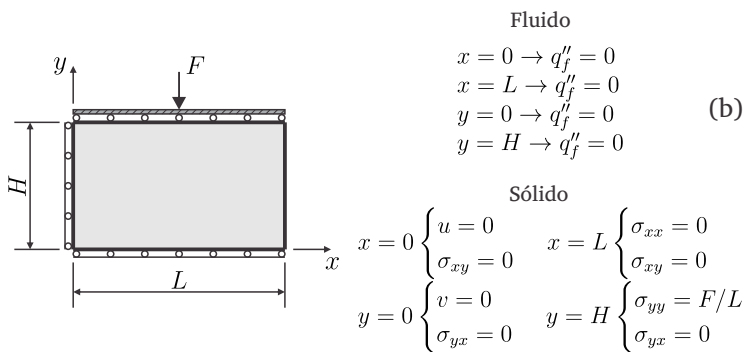
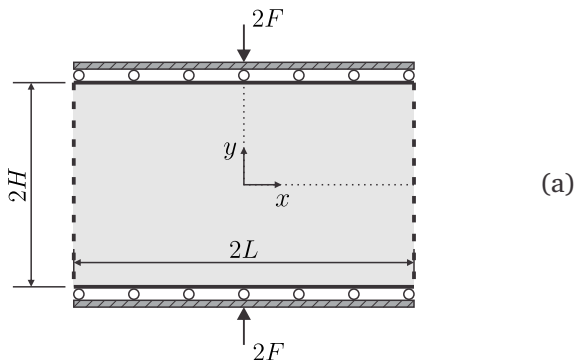
6.2 Problema de Mandel

O problema de Mandel (1953), assim como o problema de Terzaghi, é um problema clássico de poroelasticidade muito utilizado como *benchmark* para a validação de códigos numéricos da área da geomecânica (Cheng & Detournay, 1988; Dal Pizzol, 2014; Ferronato *et al.*, 2010). É um problema bidimensional que possui duas características muito interessantes. A primeira é que, mesmo sendo um problema 2D, sua resposta física é unidimensional. A segunda é que apresenta um comportamento não-monotônico da pressão de poro. Em função disso é um excelente problema para verificação da robustez da solução do acoplamento entre o escoamento e a geomecânica, já que tal efeito não é observado em soluções desacopladas (Abouleisman *et al.*, 1996).

Um diagrama esquemático do problema de Mandel encontra-se na figura 6.34(a). Consta, basicamente, de uma amostra de determinado material poroso com seção retangular, de comprimento $2L$ e altura $2H$, infinitamente longa na direção z . A amostra encontra-se preenchida por um fluido e está entre duas placas planas rígidas. Não há atrito entre as placas e o meio poroso. No tempo $t = 0^+$ uma força de magnitude $2F$ é aplicada instantaneamente sobre a amostra, criando um campo uniforme de pressão.

As placas que prensam a amostra fazem isso mantendo-se sempre paralelas entre si, o que resulta em um deslocamento vertical, na fronteira superior, constante ao longo de toda a sua extensão horizontal. As laterais da amostra são abertas ao fluxo imediatamente após atingida a condição de equilíbrio inicial, e o fluido passa a deixar a amostra através delas. O transiente deste problema apresenta uma variação não monotônica da pressão ao longo do eixo horizontal, isto é, a pressão, para o início do transiente, atinge valores perto do centro da amostra maiores que a pressão de equilíbrio em $t = 0^+$. Este comportamento parece estranho pois, porque a pressão aumentaria na região central depois da amostra começar a perder fluido pelas faces laterais? Aparentemente deveria acontecer um alívio da pressão em todo o domínio. Se observarmos as condições de contorno do problema, entende-se facilmente este comportamento físico.

Figura 6.34 – Diagrama esquemático do problema de Mandel com as condições de contorno. (a) Problema de Mandel. (b) Problema para a condição de equilíbrio em $t = 0^+$. (b) Problema transiente.



Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

Como o problema possui simetria, convém analisar apenas 1/4 do domínio, conforme observado na figura 6.34. Assim, quando o fluido começa a sair do domínio pela face direita, a pressão de poro diminui nesta região com a conseqüente compactação do meio, representada por um deslocamento vertical. Este deslocamento vertical deve acontecer em qualquer posição horizontal, já que a placa deve comprimir a amostra mantendo-se na horizontal (condição de contorno, ou condição de realização do teste). Na região central, no início do transiente, ainda predomina a pressão de equilíbrio, pois nenhum fluido ainda saiu desta região. Conseqüentemente, com a imposição de compactar a região central da mesma forma como é compactada a região de onde o fluido sai, cria-se uma pressão na região central acima da pressão inicial do transiente. Com o passar do tempo o fluido começa a se movimentar e sair de toda a amostra e a pressão passa, então, a diminuir em toda região.

Esse mesmo fenômeno pode ser analisado sob o ponto de vista das propriedades físicas do meio. Da subseção 2.2.3, sabe-se que o conjunto fluido-estrutura sob uma condição não drenada apresenta uma maior rigidez do que o esqueleto poroso por si só sob uma condição drenada ($K_u > K$). Nesse sentido, à medida com que o fluido deixa os poros pelas fronteiras da amostra, o módulo de compressão volumétrica no local diminui, o que resulta na transferência de parte da carga que agia sobre o local para o centro da amostra, onde a condição não-drenada ainda é observada. Desse modo, como resposta, a pressão no local também aumenta. Para tempos longos, porém, ainda tem-se a dissipação da pressão ao longo da amostra, sendo apresentada, no regime permanente, uma pressão igual a zero ao longo de todo o domínio.

Este comportamento não-monotônico da pressão, primeiramente observado por Mandel (1953) no problema ilustrado e posteriormente por Cryer (1963) no problema de uma esfera consolidando sob determinada pressão hidrostática, passou a ser denominado como efeito Mandel-Cryer (Schiffman *et al.*, 1969). Tal fenômeno físico foi também confirmado em laboratório por Gibson *et al.* (1963).

Do mesmo modo que para o problema de Terzaghi, a simulação numérica do problema de Mandel é executada em duas etapas. As condições de contorno estão mostradas na figura 6.34. A primeira etapa, com as condições mostradas na figura 6.34(b), refere-se ao cálculo da condição de equilíbrio inicial do problema, a qual é atingida em $t = 0^+$ imediata-

mente após aplicação da carga sobre a amostra. Para isso, define-se todas as fronteiras como impermeáveis e aplica-se uma tensão $\sigma_{y,y} = F/L$ ao longo da fronteira superior do domínio. Utilizando o método de acoplamento simultâneo, faz-se, então, o avanço da solução em apenas um nível de tempo, iterando a mesma devido à necessidade de atualização da porosidade. Novamente utiliza-se do critério dado pela equação 6.1 para a verificação da convergência da solução, sendo adotado, nesse caso, um erro admissível para a pressão de $\epsilon < 10^{-12}$.

Com a condição de equilíbrio realizada tem-se a pressão inicial do transiente. Do mesmo modo, obtém-se também um campo de tensão efetiva vertical uniforme agindo sobre o esqueleto poroso, o que resulta em um campo de deslocamento vertical com variação linear na direção y , mas constante na direção x . Como não há restrições para a deformação da amostra no sentido horizontal, tem-se também um campo de deslocamento horizontal ao longo do domínio, o qual varia de modo linear na direção x , mas é constante na direção y .

Como o problema de Mandel tem como condição de contorno a aplicação de uma força F constante na face superior do domínio, estando a placa sempre no sentido horizontal, a tensão na superfície superior da amostra não será constante, e sim deverá respeitar a seguinte condição

$$\int_0^L \sigma_{y,y} dx = F \quad (6.8)$$

A seguinte condição também deve ser respeitada, já que a placa é rígida e movimenta-se horizontalmente,

$$v(x)|_{y=H} = \text{constante} \quad (6.9)$$

O deslocamento vertical é constante com x , mas seu valor precisa ser determinado. Na fronteira superior é necessário satisfazer, então, tanto o deslocamento vertical constante ao longo de x , como o somatório das tensões igual a força aplicada. Vale frisar que com o uso da malha desencontrada, os deslocamentos estão sobre a fronteira superior e são incógnitas.

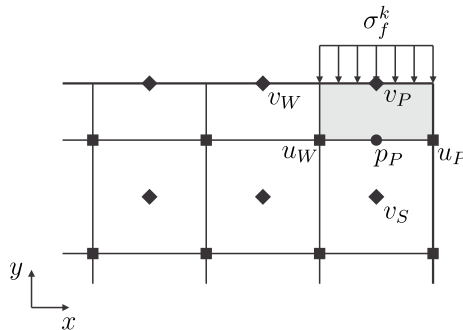
O tratamento desta condição de contorno é uma questão delicada do tratamento numérico do problema de Mandel. A estratégia de Dal Pizzol (2014) é adotada neste trabalho e será brevemente descrita em função

da sua importância no problema. A base da estratégia empregada é escrever a equação de equilíbrio na direção y (equação 3.2) para apenas um dos volumes de controle do deslocamento vertical adjacentes à fronteira superior do domínio. É através dessa equação que a condição de carregamento será incorporada ao problema. Neste caso, optou-se pela realização da discretização sobre o volume localizado no canto superior direito do domínio, como mostrado na figura 6.35. A equação aproximada para esse volume é

$$A_p^{vv} v_P = A_w^{vv} v_W + A_s^{vv} v_S + A_p^{uu} u_P + A_w^{uu} u_W + B_p^v \quad (6.10)$$

sendo que o termo da condição de contorno de carregamento ($\sigma_f^k \Delta x$), encontra-se no termo independente da equação (B_p^v).

Figura 6.35 – Problema de Mandel. Volume de controle adjacente à fronteira superior do domínio sobre o qual é realizada a discretização da equação de equilíbrio na direção y .



Fonte: adaptado de Dal Pizzol (2014).

Para os demais volumes da variável deslocamento vertical v na fronteira superior impõe-se a condição de que todos apresentam o mesmo valor. Assim, as equações discretizadas para estes volumes tem a forma

$$A_p^{vv} v_P = A_e^{vv} v_E \quad (6.11)$$

onde

$$A_p^{vv} = 1 \quad \text{e} \quad A_e^{vv} = 1 \quad (6.12)$$

Como o valor da tensão σ_f^k não é conhecido, é necessário um esquema iterativo para sua determinação. Os principais passos desse ciclo iterativo são apresentados a seguir, com a ressalva de que o mesmo precisa ser levemente adaptado de acordo com o método de acoplamento utilizado na simulação. Os detalhes dessas adaptações serão abordados quando requerido. O algoritmo, que é realizado dentro de cada nível de tempo, é mostrado a seguir:

1. Estimativa da tensão σ_f^k utilizando o valor do nível de tempo anterior. No início a estimativa é calculada dividindo-se a força aplicada pelo comprimento L do domínio simulado.
2. Solução dos modelos de escoamento e geomecânica, junto com a atualização da porosidade, segundo o método de acoplamento utilizado para a simulação. Para os métodos segregado/ambas as direções e simultâneo itera-se a solução até a convergência.
3. Cálculo do novo campo de tensão vertical (σ_{yy}) utilizando as variáveis (pressão e deslocamentos) calculadas no item anterior.
4. Verificação da condição dada pela equação 6.8, o que é realizado, numericamente, através da expressão

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^n (|\sigma_{yy,i}^k| \Delta x_i) - F}{F} \right| \leq \epsilon \quad (6.13)$$

onde n representa o número de volumes de controle para a pressão adjacentes à fronteira superior do domínio e $\sigma_{yy,i}^k$ a tensão vertical calculada ao centro de cada um desses volumes. Esta equação é utilizada como critério de convergência para verificar a finalização do ciclo iterativo referente a atualização da condição de contorno. Neste trabalho é adotado um erro admissível de $\epsilon = 10^{-7}$ para esta condição.

5. Caso seja verificada a convergência da condição de contorno, faz-se o avanço para o próximo nível de tempo e dá-se continuidade ao processo transiente de solução. Caso contrário, atualiza-se a

tensão σ_f^k através da equação

$$\sigma_f^{k+1} = \sigma_f^k - \left[\frac{\sum_{i=0}^n (|\sigma_{yy,i}^k| \Delta x_i) - F}{L} \right] \quad (6.14)$$

e retorna-se ao item 2. para uma nova iteração.

As propriedades utilizadas nas análises realizadas para o problema de Mandel, referentes ao fluido e a matriz porosa, encontram-se na tabela 6.5. Estas propriedades derivam, novamente, da tabela 6.2, referentes a uma rocha arenito Berea. Ainda na mesma tabela são apresentados os principais dados da geometria do domínio e as condições de contorno utilizadas nas simulações.

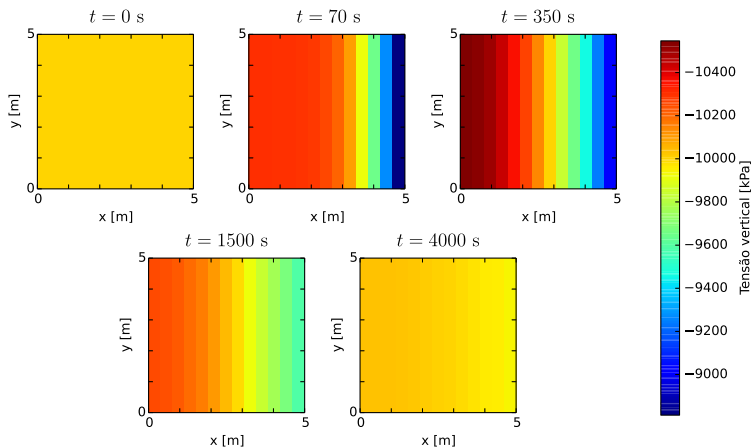
Tabela 6.5 – Dados de entrada utilizados para o problema de Mandel.

Dado de entrada	Valor	Unidade
Altura (H)	5,0	m
Largura (L)	5,0	m
Força no topo do domínio (F)	$5,0 \times 10^7$	N
Compressibilidade dos grãos sólidos	$2,777778 \times 10^{-11}$	Pa^{-1}
Compressibilidade do fluido	$3,030303 \times 10^{-10}$	Pa^{-1}
Primeiro parâmetro de Lamé	$4,0 \times 10^9$	Pa
Coefficiente de Poisson	0,2	-
Coefficiente de Biot	0,777778	-
Porosidade de referência	0,19	-
Permeabilidade absoluta	$1,0 \times 10^{-15}$	m^2
Viscosidade do fluido	0,001	$Pa.s$

Fonte: elaborada pelo autor.

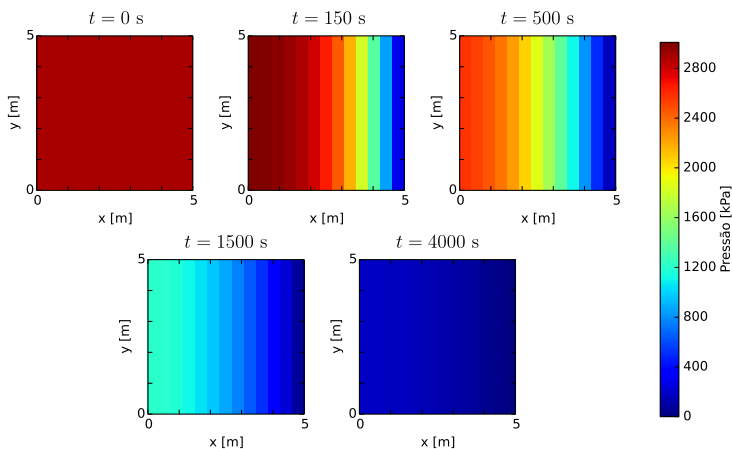
Para o entendimento macro do problema de Mandel, nas figuras 6.36 a 6.39, podem ser vistos os campos de tensão vertical, pressão e deslocamentos vertical e horizontal ao longo do transiente. Os campos foram obtidos através de uma simulação utilizando o método de acoplamento segregado/ambas as direções, um passo de tempo de 1,0s e uma malha com 13×13 volumes.

Figura 6.36 – Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de tensão vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0$ s e uma malha com 13×13 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

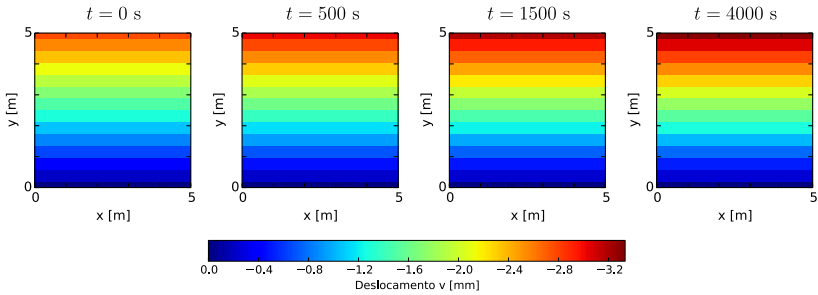
Figura 6.37 – Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 1,0$ s e uma malha com 13×13 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

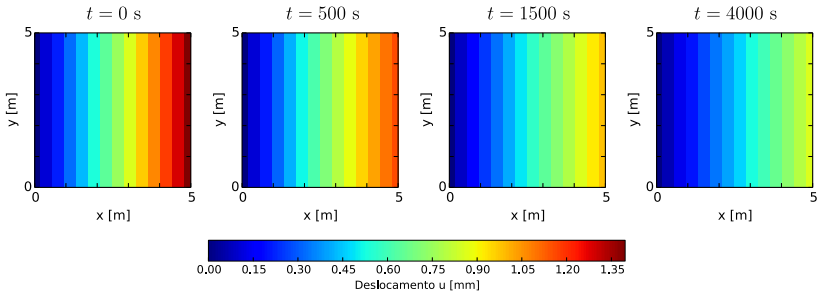
Conforme já comentado, apesar do problema de Mandel ser um problema bidimensional, da observação da evolução dos campos de variá-

Figura 6.38 – Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0$ s e uma malha com 13×13 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.39 – Acoplamento segregado/ambas as direções: campos de deslocamento horizontal obtidos utilizando $\Delta t = 1,0$ s e uma malha com 13×13 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

veis ao longo do tempo fica clara a característica unidimensional do resultado do problema. Com exceção do deslocamento vertical, que é constante ao longo do eixo x , todas as variáveis do problema são constantes em y .

Detalhes do transiente, erros e taxas de convergência serão objeto das próximas seções. As figuras citadas apenas pretendem antecipar a característica da solução do problema de Mandel. O resultado final deste transiente é um campo de pressões uniforme e a carga agindo sobre a amostra é completamente suportada pelo esqueleto poroso ($\sigma' \rightarrow \sigma$). Em outras palavras, uma condição de equilíbrio relativa a um problema puramente estrutural.

A seguir o problema de Mandel é resolvido utilizando os três diferentes métodos de acoplamento já descritos e usados no problema de Terzaghi.

6.2.1 Acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo

Os métodos segregados ambas as direções e simultâneo devem apresentar, logicamente, os mesmos resultados, diferindo apenas nas taxas de convergência e tempo de computação. No problema de Mandel tem-se, porém, no problema geomecânico, uma condição de contorno de natureza iterativa na fronteira superior do domínio, conforme já comentado. Em função disso, é indispensável se fazer alguns comentários sobre a utilização dos métodos em questão para a solução desse problema.

A condição de contorno em questão faz parte do modelo matemático do problema geomecânico e, como tal, deve ser tratada dentro do ciclo iterativo do problema geomecânico. Para o acoplamento segregado/ambas as direções, onde o sistema linear da pressão é resolvido separadamente do sistema linear dos deslocamentos, é fácil incluir a iteração da condição de contorno no ciclo de iterações do sistema linear dos deslocamentos (u e v), e a condição de contorno pode ser vista como uma restrição do problema que, ao final das iterações, é satisfeita. No acoplamento simultâneo, o sistema linear acopla as três variáveis, p , u , e v , e a restrição, representada pela condição de contorno, precisaria fazer parte do sistema linear. Uma nova variável, a tensão, precisaria fazer parte do problema, e a condição de contorno seria resolvida diretamente com o sistema linear acoplado. Esta é uma tarefa fora do escopo deste trabalho. Portanto, para que os acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo pudessem ser comparados, a satisfação da condição de contorno foi deixada para ser calculada depois dos cálculos das variáveis, tanto no método segregado/ambas as direções como no método simultâneo, fazendo o papel de uma restrição do problema. Em todos os problemas iterou-se até a convergência o problema escoamento/geomecânica para depois atualizar a condição de contorno e repetir o processo, como demonstrado no algoritmo presente ao início desta seção (seção 6.2).

Relembrando os tradicionais algoritmos empregados na solução do escoamento (Maliska, 2004), onde a pressão e as velocidades podem ser resolvidas de forma segregada ou simultânea, existem sempre duas razões para a existência de iterações: o acoplamento e as não linearidades.

As alternativas são diversas, podendo-se iterar no acoplamento (quando segregado) até convergir e depois atualizar as não-linearidades ou incluir o acoplamento e as não linearidades no mesmo ciclo iterativo. Neste trabalho optou-se por resolver primeiro o acoplamento para depois atualizar a restrição da condição de contorno, tanto no segregado/ambas as direções, como no simultâneo. Os esquemas do capítulo 4 auxiliam no entendimento destes procedimentos iterativos.

Os resultados que serão apresentados a seguir mostram a solução do problema de Mandel com os esquemas segregado/ambas as direções e simultâneo, com a ideia de mostrar a correta implementação dos algoritmos de acoplamento. Após são analisadas as taxas de convergência e os erros, em função do tamanho de malha e intervalo de tempo.

6.2.1.1 Solução do problema

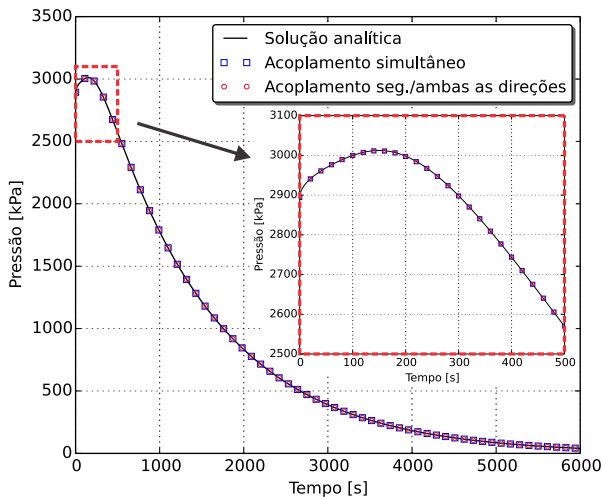
Nas figuras 6.40 e 6.41 são apresentados os resultados da variação da pressão em um ponto próximo à fronteira esquerda do domínio⁷ ao longo do tempo e os perfis de pressão ao longo do eixo x para diferentes níveis de tempo. As figuras mostram com clareza o efeito Mandel-Cryer, já explicado do ponto de vista físico anteriormente, e evidenciado no detalhe da figura 6.40.

Na figura 6.42 é possível observar o comportamento da tensão vertical em pontos próximos às fronteiras esquerda e direita do domínio⁸ ao longo do tempo. Também na tensão, como esperado, o efeito de Mandel-Cryer se manifesta, como pode ser visto no perfil para o ponto situado na região esquerda do domínio. Ao mesmo tempo, na figura 6.43 encontram-se os perfis de tensão vertical observados ao longo do eixo x da amostra para diferentes níveis de tempo. Esta figura esclarece o comportamento da tensão vertical ao longo de x . O problema de Mandel, à primeira vista, parece um problema de tensão vertical na parte superior constante, já que sempre temos uma força constante com x sendo aplicada. Isso é verdade na condição de equilíbrio inicial do problema, ou seja, para $t = 0s$ na figura, mas durante o transiente, depois da abertura da face direita, esta carga se distribui não-uniformemente em x . Daí o aparecimento da condição de contorno iterativa na fronteira superior.

⁷No centro do volume de controle localizado no canto inferior esquerdo do domínio.

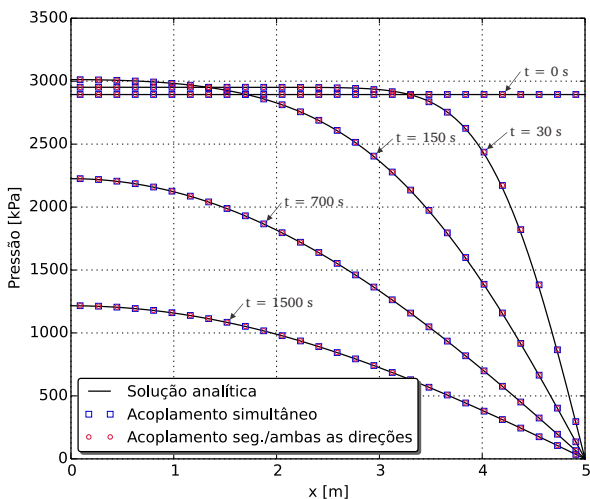
⁸No centro dos volumes localizados nos cantos inferior esquerdo e superior direito do domínio, respectivamente.

Figura 6.40 – Comparação entre as soluções numéricas e a analítica da pressão na fronteira esquerda do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0\text{ s}$ e uma malha com 28×28 volumes.



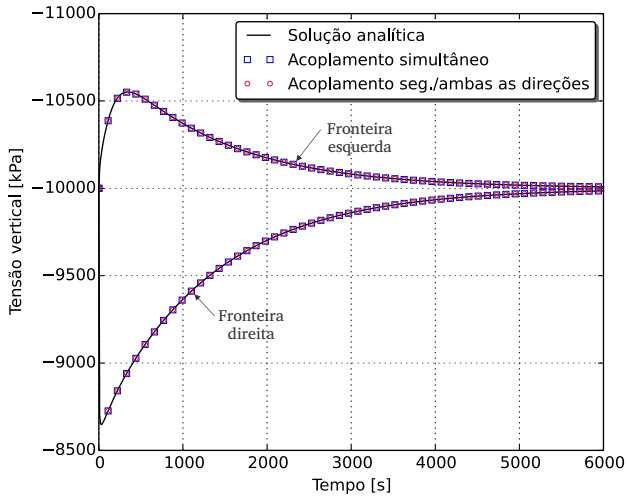
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.41 – Perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 1,0\text{ s}$ e uma malha com 28×28 volumes.



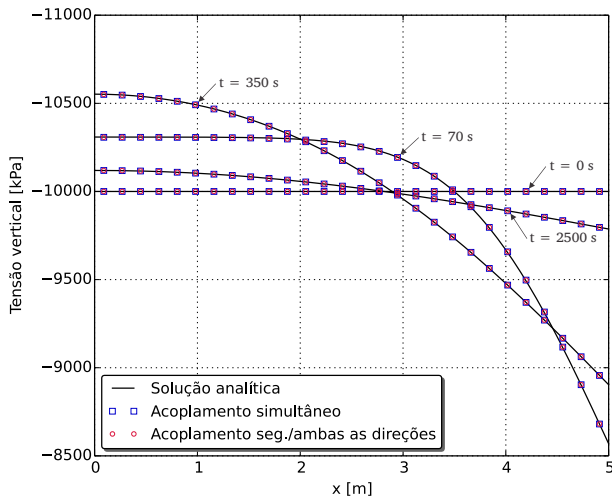
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.42 – Comparação entre as soluções numéricas e a analítica da tensão vertical nas fronteiras esquerda e direita do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.43 – Perfis de tensão vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.

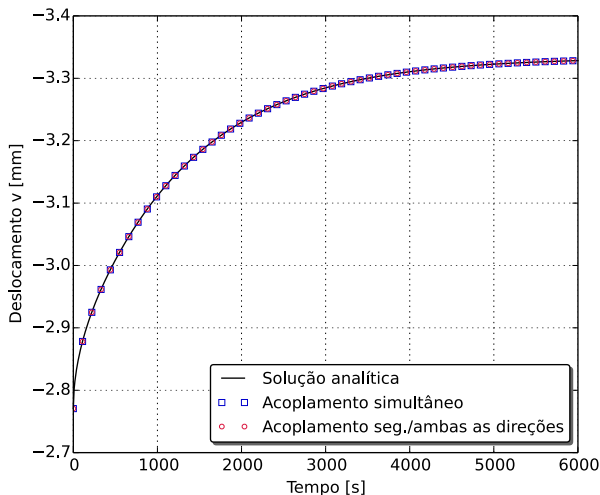


Fonte: elaborada pelo autor.

As figuras 6.44 e 6.45 completam a validação dos algoritmos. A primeira mostra a variação do deslocamento vertical calculado em um ponto qualquer da fronteira superior do domínio ao longo do tempo, onde se vê a compactação do meio ao longo do transiente. A segunda mostra os deslocamentos verticais ao longo do tempo para diferentes posições y do domínio. Deve ser lembrado que o deslocamento vertical é constante ao longo de x (imposição da condição de contorno).

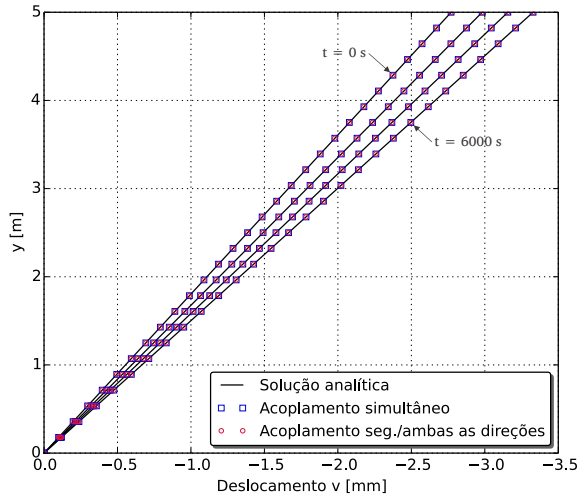
É importante mostrar também o comportamento do deslocamento horizontal na face direita da amostra ao longo do tempo, que não é intuitivo. Na figura 6.46 percebe-se um comportamento contrário ao geralmente esperado, isto é, o encolhimento da amostra no sentido horizontal ao longo do transiente. Isso ocorre pois na obtenção da condição de equilíbrio em $t = 0$, a pressão existente devido à condição não drenada faz a amostra aumentar de tamanho no sentido horizontal, o que é representado pelo maior deslocamento u na figura. Quando a fronteira é aberta e o fluido sai da amostra, a pressão diminui e a amostra encolhe, diminuindo os deslocamentos horizontais.

Figura 6.44 – Comparação entre as soluções numéricas e a analítica do deslocamento vertical na fronteira superior do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0$ s e uma malha com 28×28 volumes.



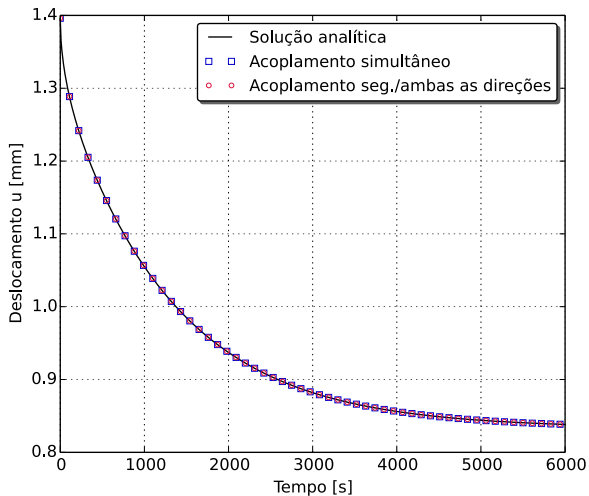
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.45 – Perfis de deslocamento vertical obtidos utilizando $\Delta t = 1,0\text{ s}$ e uma malha com 28×28 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.46 – Comparação entre as soluções numéricas e a analítica do deslocamento horizontal na fronteira direita do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0\text{ s}$ e uma malha com 28×28 volumes.



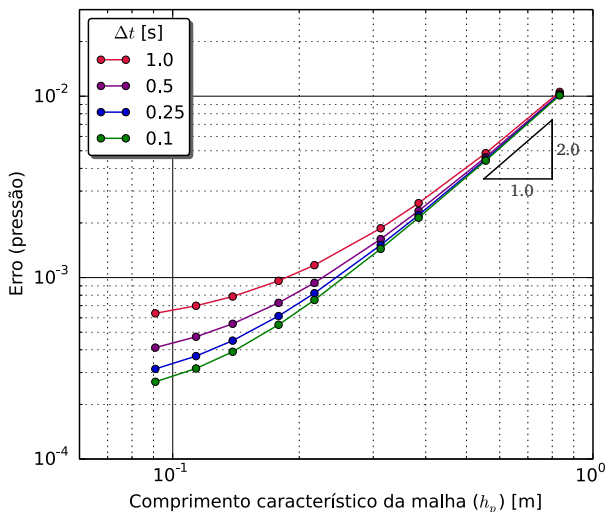
Fonte: elaborada pelo autor.

Na sequência, da mesma forma como feito para o problema de Terzaghi, as taxas de convergência, através do cálculo do erro em função da dimensão da malha e tamanho do intervalo de tempo, são apresentadas.

6.2.1.2 Análise de erros e da taxa de convergência

Na figura 6.47 mostra-se a variação da norma do erro do campo de pressão (obtido para o tempo de 200s) em função do comprimento característico da malha, utilizando diferentes passos de tempo. Os dados apresentados referem-se a simulações realizadas utilizando o método de acoplamento segregado/ambas as direções, sendo a norma do erro calculada segundo a equação 6.2.

Figura 6.47 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

As malhas utilizadas nas simulações encontram-se presentes na tabela 6.6. Como já comentado, devido à adoção do arranjo desconstruído para o posicionamento das variáveis sobre a malha, à cada malha encontram-se associados três comprimentos característicos, isto é, um referente à pressão (h_p), outro ao deslocamento vertical (h_v) e outro ao

deslocamento horizontal (h_u). Os valores dos comprimentos característicos correspondentes à cada malha também podem ser encontrados na tabela 6.6. Dado que o domínio adotado para o problema é quadrado ($H = L$) e que se utiliza de um mesmo número de volumes nas direções vertical e horizontal ($n_x = n_y$) para a discretização, os comprimentos característicos referentes aos deslocamentos vertical (h_v) e horizontal (h_u) de cada malha também apresentam valores iguais.

Tabela 6.6 – Malhas utilizadas para a análise do refino de malha (h_p , h_v e h_u representam, respectivamente, os comprimentos característicos referentes à pressão, ao deslocamento vertical e ao deslocamento horizontal).

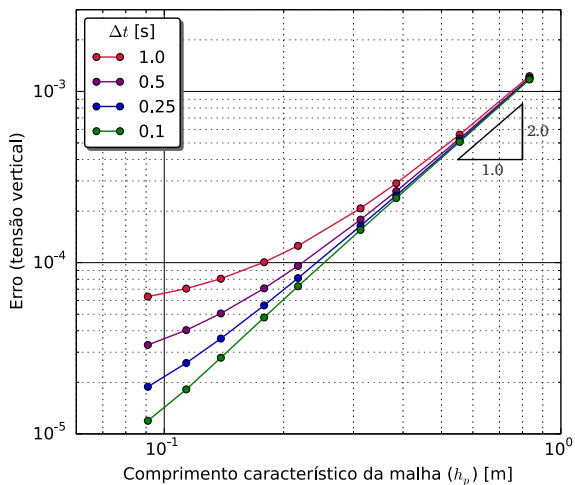
	n_x	n_y	h_p	h_v e h_u
Malha 01	6	6	0,83333	0,76359
Malha 02	9	9	0,55556	0,52301
Malha 03	13	13	0,38461	0,36852
Malha 04	16	16	0,3125	0,30173
Malha 05	23	23	0,21739	0,21208
Malha 06	28	28	0,17857	0,17496
Malha 07	36	36	0,13889	0,13669
Malha 08	44	44	0,11364	0,11216
Malha 09	55	55	0,09091	0,08996

Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se da figura 6.47, como esperado, o decréscimo do erro com o refino da malha, inclusive com a horizontalização do perfil, já comentado no problema de Terzaghi. Este mesmo tipo de comportamento foi observado para a tensão vertical e os deslocamentos vertical e horizontal, seja utilizando o método segregado/ambas as direções (figuras 6.48 a 6.50), seja utilizando o simultâneo (figuras 6.51 a 6.54).

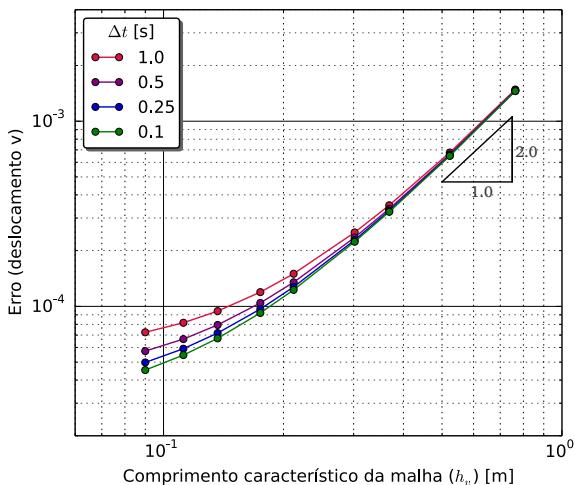
Um resultado que intriga é a convergência de segunda ordem obtida pela tensão vertical (figuras 6.48 e 6.52), pois a tensão é função da pressão de poro e dos gradientes dos deslocamentos (equação 3.4). Os gradientes dos deslocamentos são de primeira ordem, o que se esperaria primeira ordem também para a tensão, já que a pressão é segunda ordem e a primeira ordem dos gradientes dos deslocamentos dominaria. Especulase, então, que pelo uso do arranjo desencontrado, o problema apresenta

Figura 6.48 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



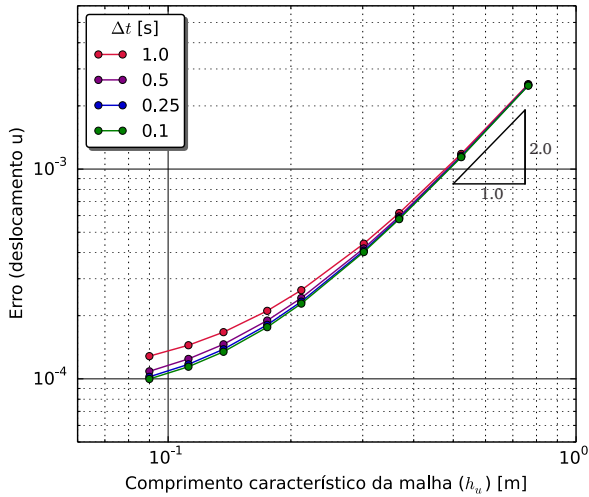
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.49 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



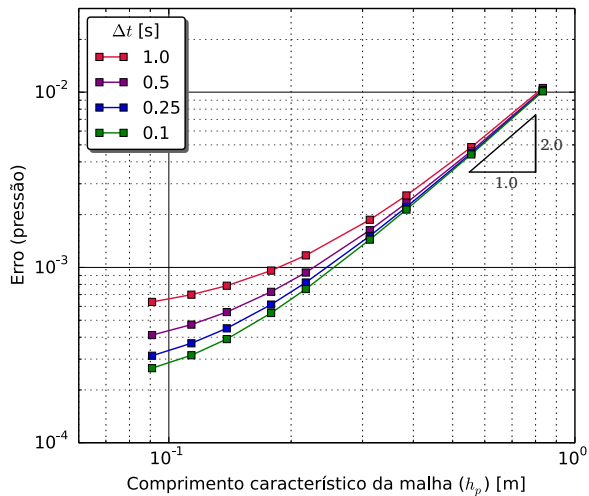
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.50 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



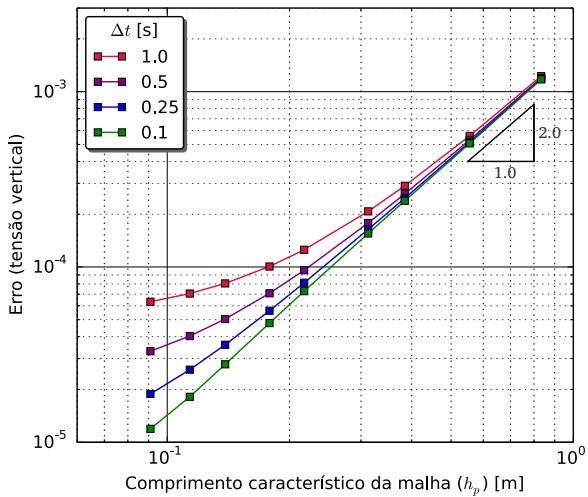
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.51 – Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



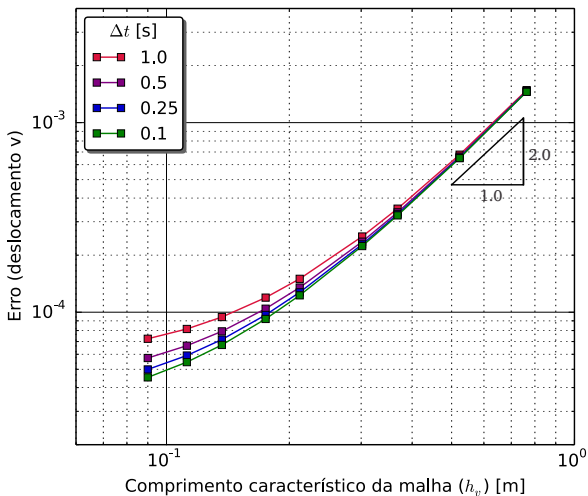
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.52 – Acoplamento simultâneo: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



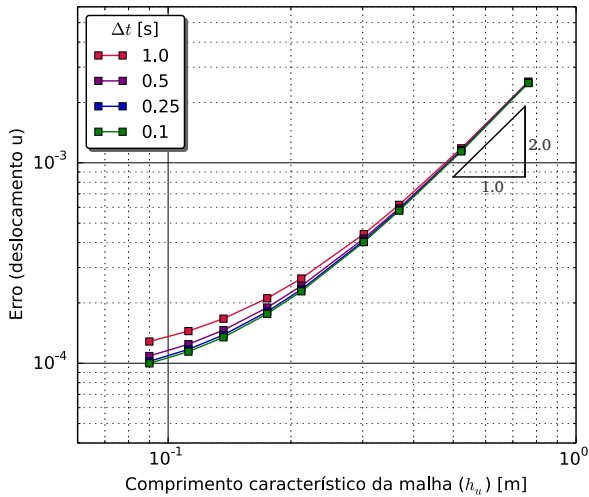
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.53 – Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.54 – Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



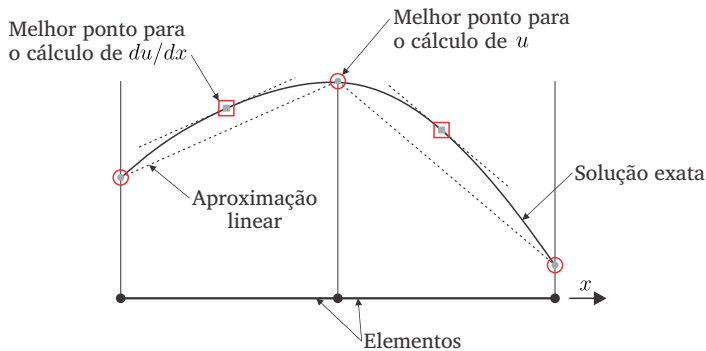
Fonte: elaborada pelo autor.

um comportamento semelhante ao da superconvergência (Zienkiewicz & Taylor, 2000), bastante conhecido de elementos finitos (Hou & Chen, 2015; Krizek & Neittaanmaki, 1987; Song & Zhang, 2015; Temimi, 2015).

Brevemente, a superconvergência ocorre quando faz-se o cálculo de uma variável em determinados pontos do elemento de modo que os valores encontrados nesses locais apresentam um erro que diminua mais rapidamente com o refino da malha do que no restante do domínio. No caso da solução de um problema estrutural utilizando o método dos elementos finitos, como o exemplo presente na figura 6.55, tem-se que os deslocamentos são calculados com maior precisão nos vértices dos elementos e os gradientes e tensões calculados em algum ponto internamente aos mesmos (Zienkiewicz & Taylor, 2000). O arranjo desconstruído, onde pressões e deslocamentos são calculados em locais diferentes do volume de controle (tensões nos centros e deslocamentos nas faces) poderia estar promovendo esta convergência acima da esperada. Observa-se que esta condição nunca acontece quando arranjos co-localizados são empregados. Esta situação não pôde ser verificada com o problema de Terzaghi porque naquele problema a tensão era conhecida. Uma análise

mais profunda, com a execução de simulações utilizando um arranjo colocalizado para as variáveis, seria necessária para a confirmação dessa suposição. Esta, no entanto, foge ao escopo deste trabalho.

Figura 6.55 – Pontos de maior precisão para o cálculo da função $u(x)$ e de seu gradiente em um problema unidimensional utilizando o método dos elementos finitos.



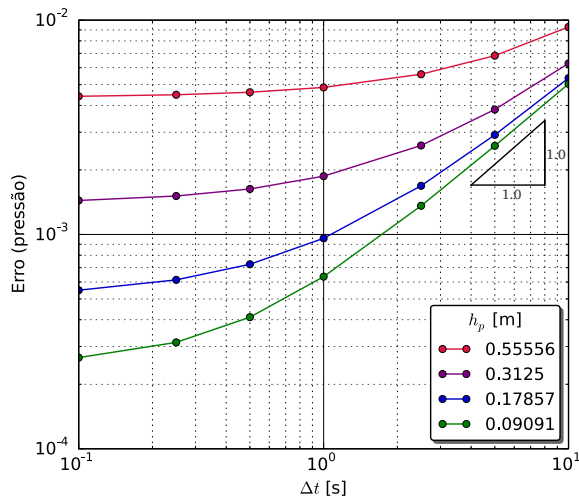
Fonte: adaptado de Zienkiewicz & Taylor (2000).

Nota-se que o arranjo desconstruído, também no problema do acoplamento escoamento/geomecânica é uma excelente alternativa para propiciar robustez ao método (Maliska, 2004).

No caso das outras variáveis (pressão e deslocamentos), como já comentado na subseção 6.1.1, dadas as funções de interpolação adotadas para a discretização das equações no espaço (seção 5.2), espera-se uma diminuição do erro com o refino da malha de segunda ordem. De modo semelhante ao ocorrido para o problema de Terzaghi, o que se observa em todas as figuras é que os perfis de erro aproximam-se de um perfil linear com a taxa de convergência esperada à medida com que menores passos de tempo são utilizados.

Uma análise semelhante é realizada também avaliando o erro em função do grau de refino do tempo. Na figura 6.56 é apresentada a variação da norma do erro do campo de pressão (obtido para o tempo de 200s) em função do passo de tempo utilizado na simulação. São apresentados os dados referentes à utilização de quatro malhas distintas (malhas 02, 04, 06 e 09 presentes na tabela 6.6), sendo os mesmos obtidos utilizando-se do método de acoplamento segregado/ambas as direções. A norma do erro é calculada, novamente, a partir da equação 6.2.

Figura 6.56 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



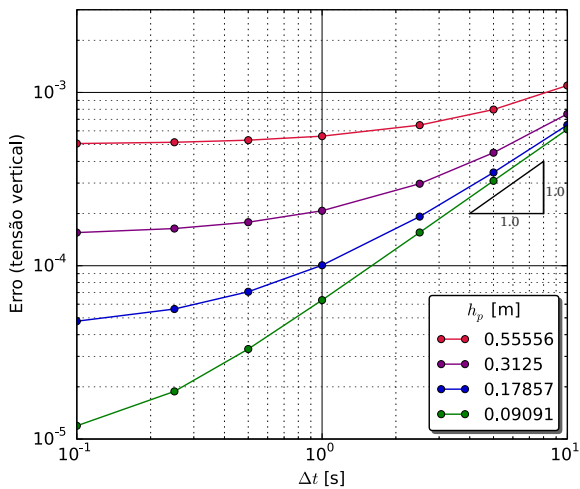
Fonte: elaborada pelo autor.

Nota-se outra vez que, como esperado, ocorre a diminuição do erro à medida que menores passos de tempo são utilizados. Ao mesmo tempo, observa-se novamente o efeito de horizontalização dos perfis, já explicado, à medida que é realizado tal refino. O mesmo comportamento foi observado também para os erros dos campos das outras variáveis, seja utilizando o método segregado/ambas as direções (figuras 6.57 a 6.59), seja utilizando o simultâneo (figuras 6.60 a 6.63). Em todos os casos tem-se perfis de erro que se aproximam de um perfil linear com uma taxa de convergência de primeira ordem à medida que malhas mais refinadas são utilizadas. É possível notar também que, dentro da faixa de passos de tempo utilizados, a taxa de convergência se degrada sensivelmente na utilização de maiores maiores tamanhos de malha.

É interessante observar, por fim, o comportamento do erro da solução também ao longo do tempo. Desse modo, na figura 6.64 mostra-se a variação do erro do campo de pressão em função do tempo. São mostrados os perfis de erro da utilização de quatro passos de tempo distintos, sendo o erro calculado segundo a equação 6.4.

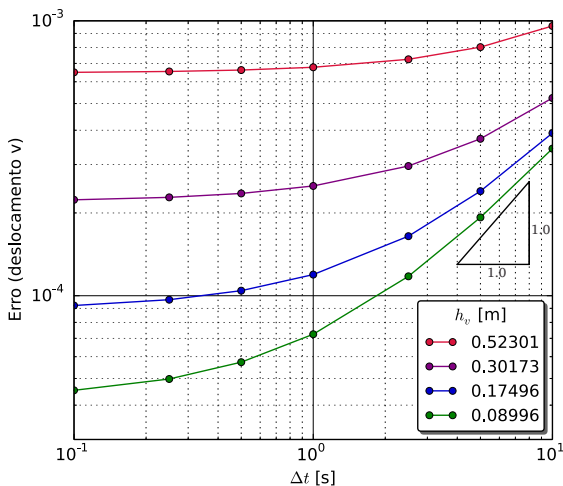
Algumas simulações foram realizadas, ainda, utilizando passos de

Figura 6.57 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



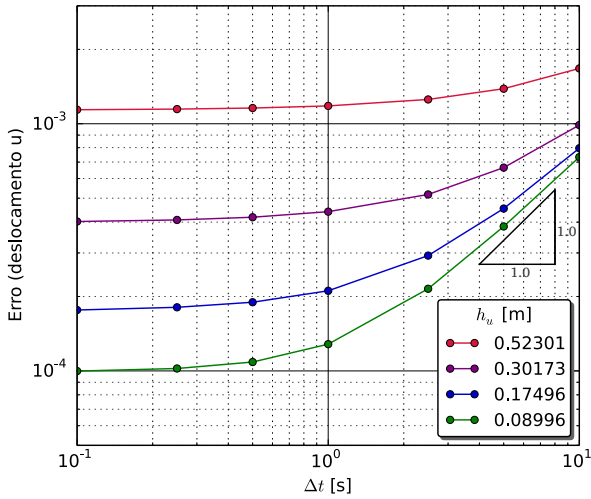
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.58 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



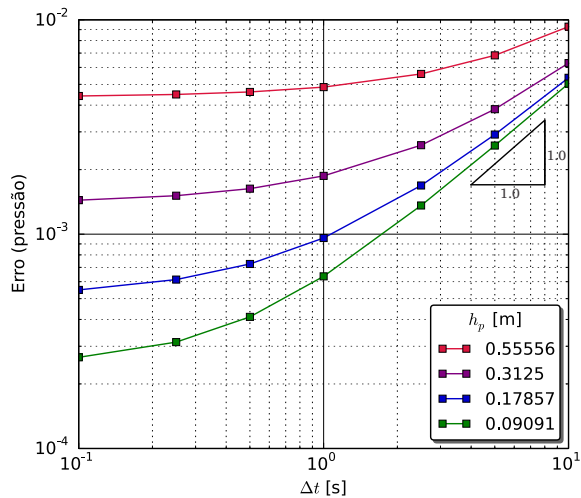
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.59 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



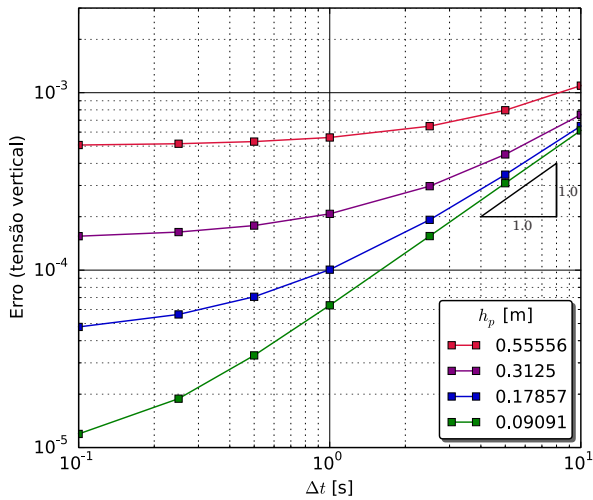
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.60 – Acoplamento simultâneo: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



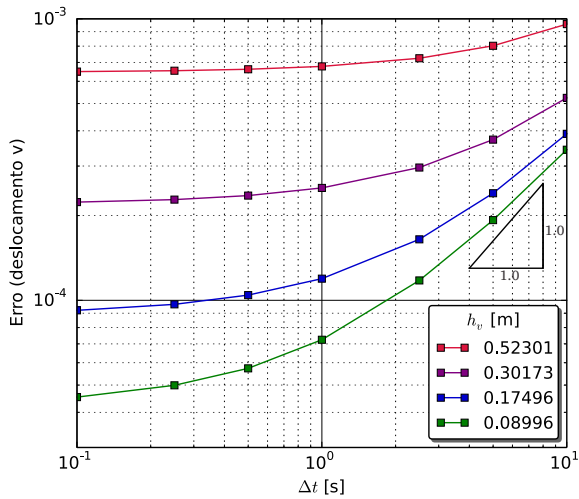
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.61 – Acoplamento simultâneo: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



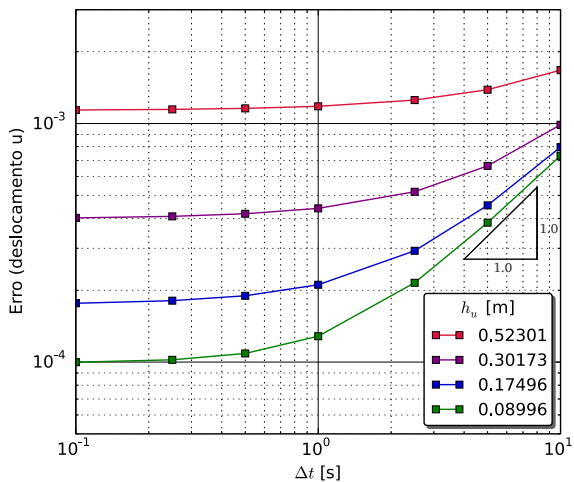
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.62 – Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



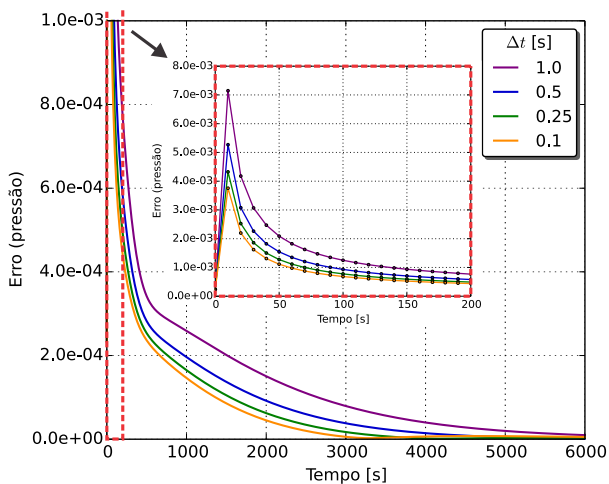
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.63 – Acoplamento simultâneo: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

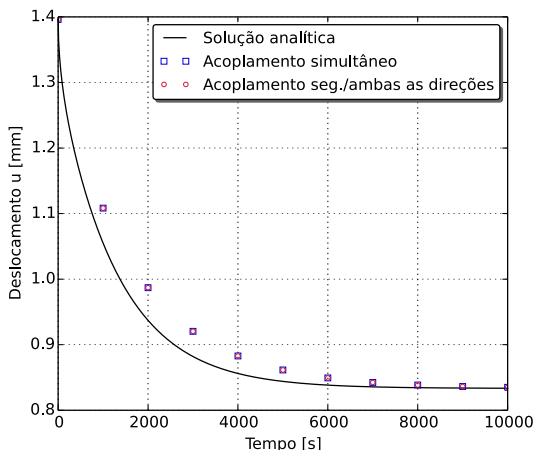
Figura 6.64 – Acoplamento segregado/ambas as direções: norma do erro da pressão vs. tempo. Utilizada uma malha com 28 × 28 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

tempo demasiadamente grandes em relação à escala de tempo do problema para avaliação da robustez dos métodos. Na figura 6.65 é possível observar, por exemplo, a solução para o deslocamento horizontal na fronteira direita do domínio ao longo do tempo utilizando um passo de tempo de 1000s. Percebe-se que as soluções de ambos os métodos se mostram bastante afastadas da analítica devido aos erros da discretização temporal, porém a solução do regime permanente, que independe da discretização temporal, continua a ser obtida, o que demonstra a robustez dos métodos utilizados.

Figura 6.65 – Comparação entre as soluções numéricas e a analítica do deslocamento horizontal na fronteira direita do domínio. Utilizados $\Delta t = 1000,0$ s e uma malha com 28×28 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

6.2.2 Acoplamentos segregado/uma direção

Em primeiro lugar, em função da necessidade de atualização da condição de contorno, é necessário tecer alguns comentários frente à configuração utilizada para o método segregado/uma direção na solução do problema de Mandel. Esta condição de contorno exige iterações e a pergunta que surge é se estas iterações prejudicariam os baixos tempos de computação que este procedimento busca oferecer.

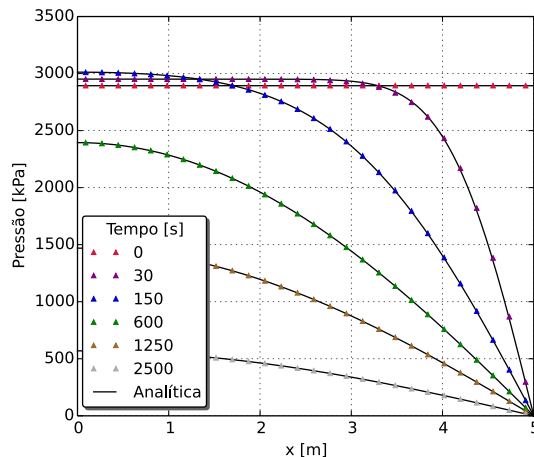
O procedimento tem como premissa resolver uma única vez os dois sistemas lineares, para (u, v) e p , deixando as não-linearidades sem atualização. E resolver para (u, v) , no problema de Mandel, significa iterar a condição de contorno dentro do problema para (u, v) . Caso isso não seja feito, a solução dos deslocamentos não estará correta, pois a condição de contorno não terá sido satisfeita. Portanto, no acoplamento segregado/uma direção, esta condição de contorno não pode ser vista como uma restrição do problema como foi tratada nos acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo onde pôde ficar fora do ciclo de solução de (u, v) . Através de testes, inclusive, confirmou-se essa informação, onde, em todos os casos, ocorreu a divergência da solução.

Como já comentado, logicamente os erros pelo uso deste processo crescem com o aumento do intervalo de tempo usado. Como este erro cresce será mostrado nas subseções que seguem.

6.2.2.1 Solução do problema

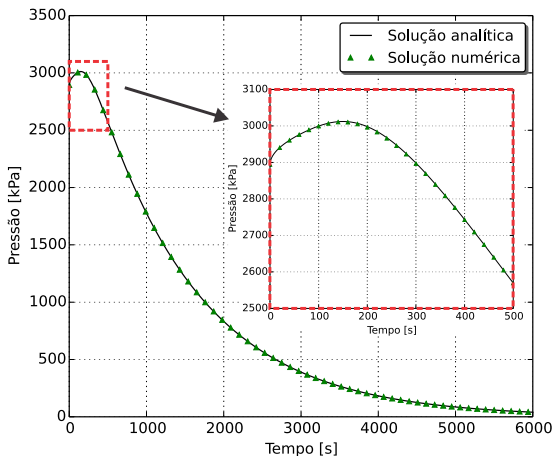
As figuras 6.66 e 6.67 mostram a comparação da solução analítica com a obtida usando o procedimento segregado/uma direção. Os resultados conferem muito bem porque o intervalo de tempo usado é pequeno

Figura 6.66 – Acoplamento segregado/uma direção: perfis de pressão obtidos utilizando $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.



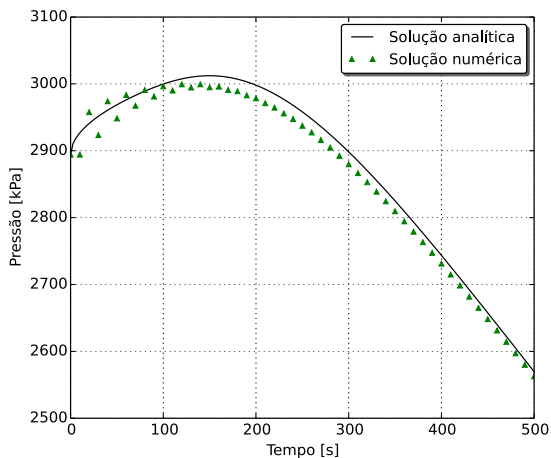
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.67 – Acoplamento segregado/uma direção: comparação entre as solução numérica e analítica da pressão na fronteira esquerda do domínio. Utilizados $\Delta t = 1,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.68 – Acoplamento segregado/uma direção: comparação entre as solução numérica e analítica da pressão na fronteira esquerda do domínio. Utilizados $\Delta t = 10,0s$ e uma malha com 28×28 volumes.



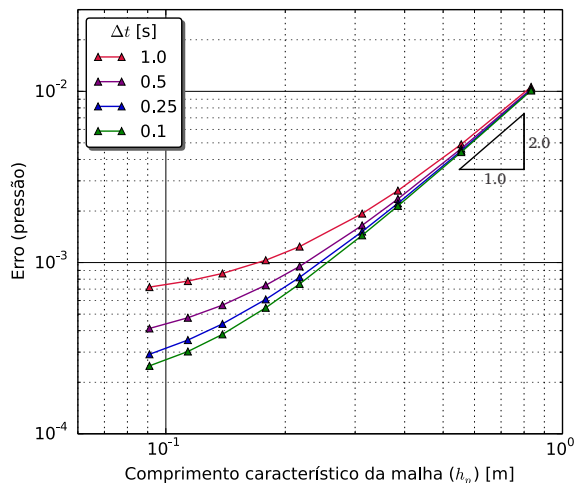
Fonte: elaborada pelo autor.

e a não linearidade da porosidade é praticamente inexistente. O efeito de Mandel-Cryer também é capturado. Observando, porém, os resultados obtidos utilizando um passo de tempo de 10s, mostrados na figura 6.68, fica clara a sensibilidade do método ao refino no tempo, principalmente ao início do transiente onde verifica-se a oscilação da solução. Nos próximos gráficos, onde a sistematização do erro é mostrada, será possível verificar que o aumento do intervalo de tempo prejudica sensivelmente a qualidade da solução no procedimento segregado/uma direção.

6.2.2.2 Análise de erros e da taxa de convergência

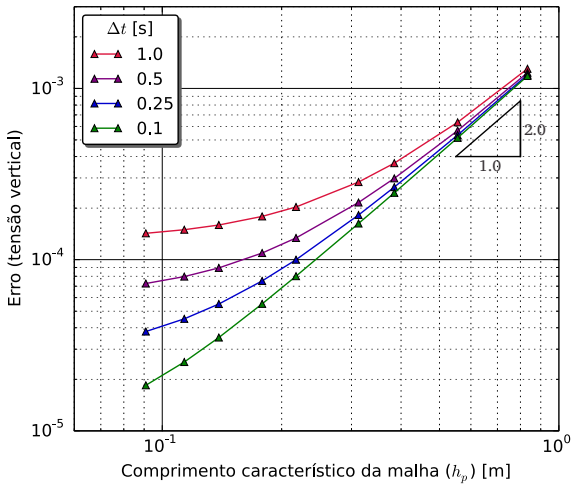
Como feito no problema de Terzaghi, a sistematização do erro é realizada, e a figura 6.69 mostra o erro do campo de pressão (obtido para o tempo de 200s) em função do comprimento característico da malha utilizada, isto é, em função do grau de refino da mesma. Nas figuras 6.70 e 6.71 também são mostrados, respectivamente, os perfis de erro dos campos de tensão vertical e deslocamento horizontal com o refino da malha. As malhas utilizadas nas simulações encontram-se na tabela 6.6, sendo a norma do erro, por sua vez, calculada através da equação 6.2. São apresentados

Figura 6.69 – Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



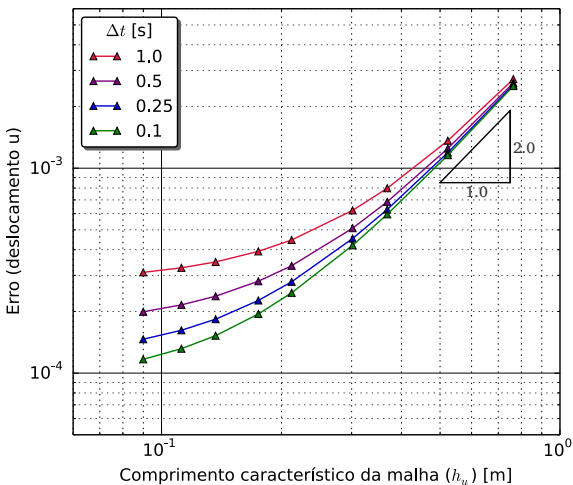
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.70 – Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.71 – Acoplamento segregado/uma direção: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



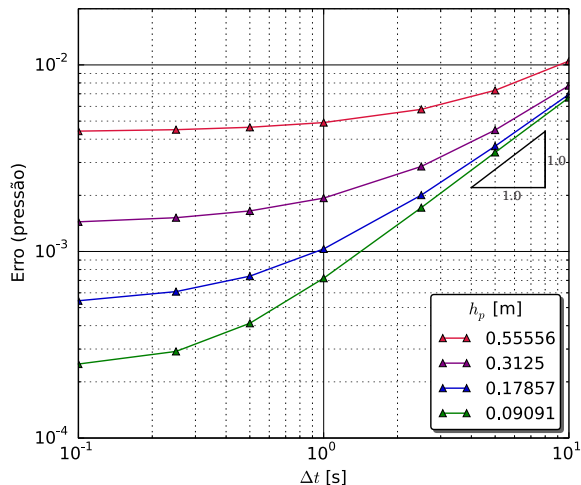
Fonte: elaborada pelo autor.

nas figuras os perfis referentes à utilização de quatro passos de tempo distintos. A mesma horizontalização dos perfis acontece e as razões são as já explicadas. Comportamento semelhante foi também observado para o erro do campo de deslocamento vertical.

Novamente, em todos os casos, tem-se que os perfis de erro se aproximam de um perfil linear com uma diminuição do erro com o refino da malha de segunda ordem, à medida com que menores passos de tempo são utilizados. Esse é um comportamento que já era esperado no caso da pressão e dos deslocamentos pois, diminuindo-se a parcela de erro advinda da discretização do problema no tempo, resta apenas aquela advinda da discretização do mesmo no espaço. No caso do erro relativo ao campo de tensão vertical, novamente esperava-se uma taxa de convergência de primeira ordem em função de envolver o gradiente dos deslocamentos. Em todos os métodos de acoplamento empregados esta característica aparece, o que leva a crer que trata-se do efeito do arranjo das variáveis na malha.

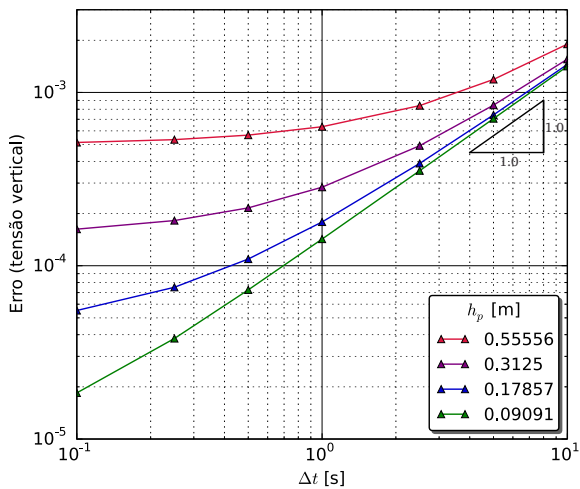
Por completeza, também aqui é feita a análise da taxa de convergência em função do intervalo de tempo empregado. A figura 6.72 apre-

Figura 6.72 – Acoplamento segregado/uma direção: curvas ajustadas para a norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



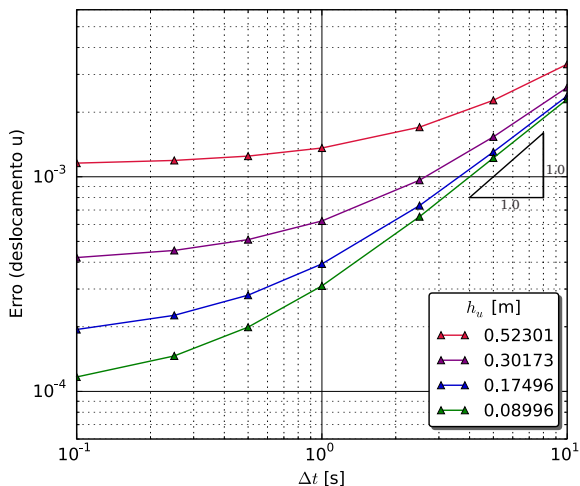
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.73 – Acoplamento segregado/uma direção: curvas ajustadas para a norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.74 – Acoplamento segregado/uma direção: curvas ajustadas para a norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

senta os perfis de erro do campo de pressão no tempo de 200s, em função do passo de tempo utilizado na simulação, para quatro malhas distintas (malhas 02, 04, 06 e 09 presentes na tabela 6.6), sendo a norma do erro calculada, novamente, segundo a equação 6.2. As figuras 6.73 e 6.74 também apresentam os perfis de erro dos campos de tensão vertical e deslocamento horizontal. Comportamento semelhante foi observado para o erro do deslocamento vertical, sendo os comentários referentes à taxa de convergência de todas as variáveis semelhantes aos já feitos. Um minucioso estudo também foi feito para identificar os erros ao longo do tempo. Em todos os casos, como esperado, os maiores erros se concentram no início do transiente, posição temporal em que se tem as maiores variações das propriedades. Estes resultados não são aqui apresentados.

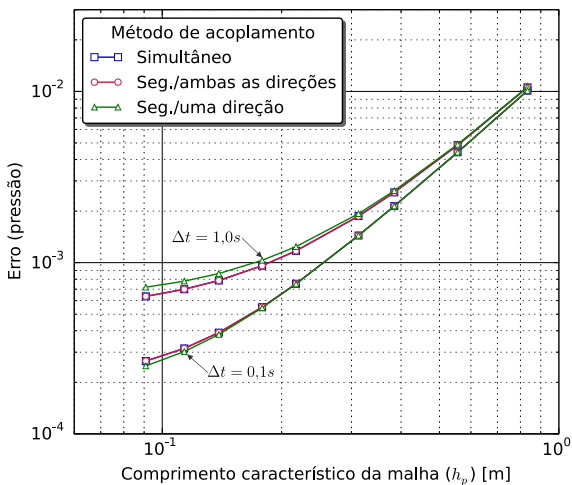
6.2.3 Comparação entre os métodos de acoplamento

O final desta seção dedica-se à comparação dos erros e dos tempos de computação dos três métodos de acoplamento empregados. Os erros foram mensurados considerando, no caso dos acoplamentos segregado/ambas as direções e simultâneo, a solução atingida com uma determinada tolerância. Estas soluções foram comparadas com as soluções analíticas e os erros daí extraídos. Esta tolerância não se aplica ao método segregado/uma direção. Tanto os erros referentes à discretização especial como temporal foram registrados e plotados.

Analizando as figuras 6.75 a 6.78 é possível extrair algumas conclusões. Primeiramente, os erros dos métodos segregado/ambas as direções e simultâneo são idênticos. Isso é logicamente esperado, pois os dois sistemas lineares, sejam eles resolvidos iterativamente ou simultaneamente, foram levados até uma tolerância igual para os dois métodos. Para o gráfico da pressão e intervalo de tempo menor, os erros são praticamente os mesmos para os três métodos de acoplamento, o que mostra que para tempos pequenos o uso do acoplamento segregado/uma direção é satisfatório. Este erro aumenta quando o intervalo de tempo aumenta, mas os três métodos ainda apresentam erros semelhantes.

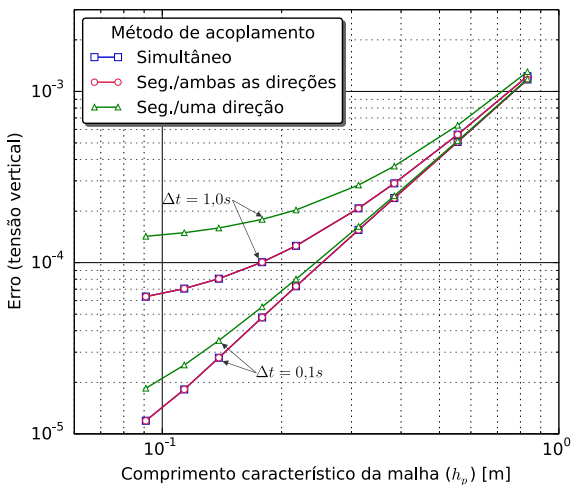
Para as outras variáveis, como tensão vertical e deslocamentos, o comportamento já é diferente, mostrando uma razoável diferença nos erros entre o segregado/uma direção e os outros dois (que estão sempre sobre a mesma curva). Observa-se que em todos os gráficos os erros para o intervalo de tempo de 0,1 segundos são sempre semelhantes para os

Figura 6.75 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



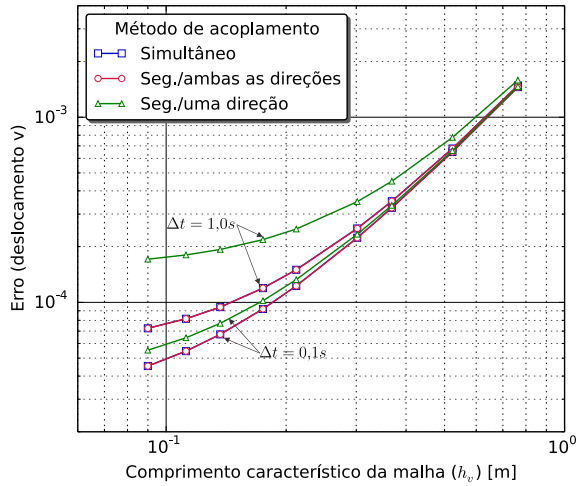
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.76 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



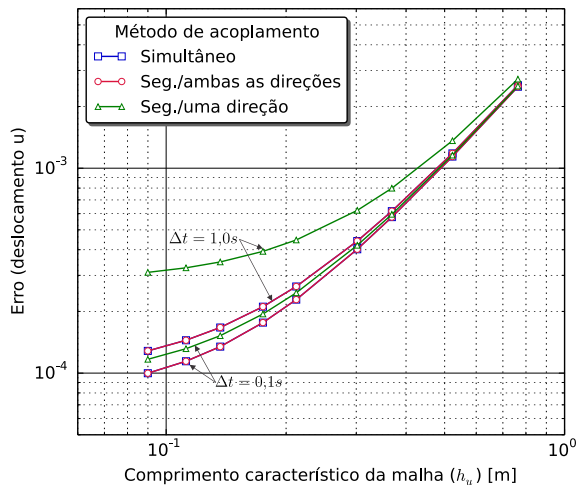
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.77 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.78 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. comprimento característico da malha.



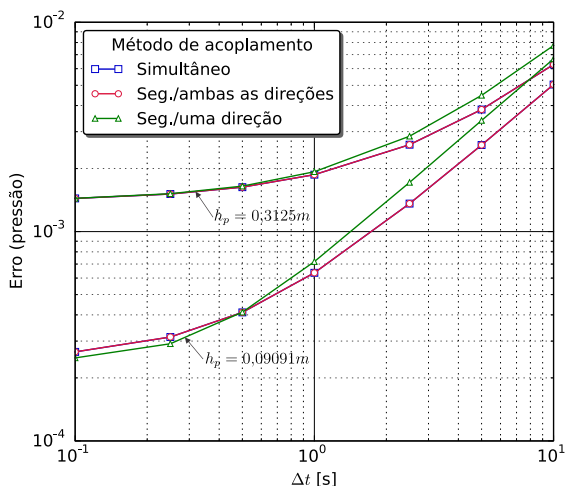
Fonte: elaborada pelo autor.

três métodos. Para o intervalo de tempo de 1,0 segundo as diferenças nos erros aumentam. Nestes resultados comentados o estudo foi sobre o comportamento do erro com a diminuição do tamanho da malha, sendo os erros calculados segundo a equação 6.2. As malhas utilizadas nas simulações encontram-se na tabela 6.6.

Nas figuras 6.79 a 6.82 é possível observar o efeito que o passo de tempo exerce sobre a solução no caso dos três métodos de acoplamento estudados. Em cada figura são apresentados os perfis relativos à utilização de duas malhas distintas (possuindo as mesmas 16×16 e 55×55 volumes), sendo a norma do erro novamente calculada segundo a equação 6.2.

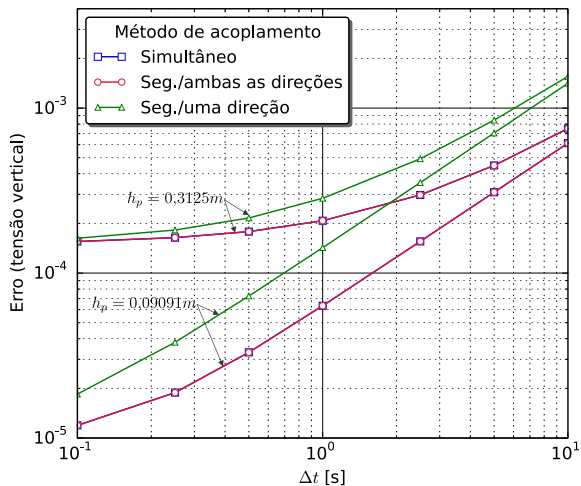
Na figura referente a variável pressão, novamente as curvas para os três métodos são muito semelhantes para um determinado tamanho de malha. Quando aumenta-se o tamanho da malha, claro, os erros crescem, mas de novo são semelhantes para a variação do intervalo de tempo. Para as outras variáveis o comportamento é diferente, com erros maiores se manifestando na utilização do acoplamento segregado/uma direção. Ficou bastante claro que a pressão é a variável menos sensível em relação

Figura 6.79 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da pressão no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



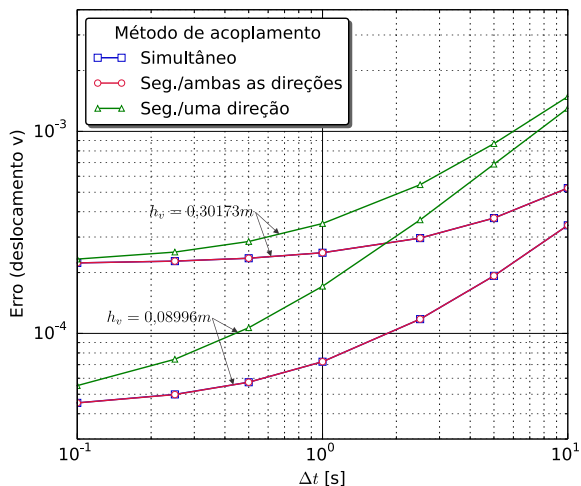
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.80 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro da tensão vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



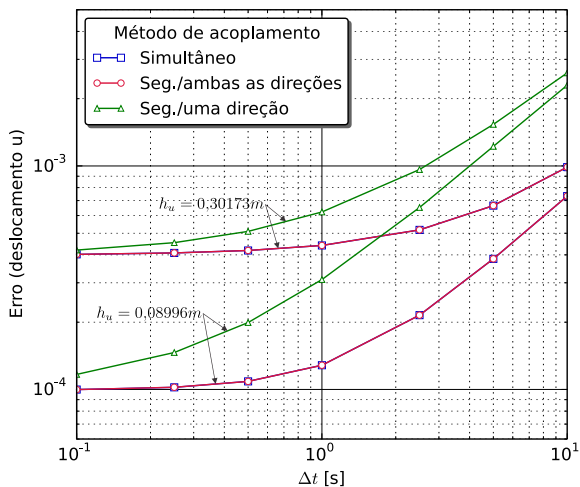
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.81 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento vertical no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6.82 – Comparação entre os métodos de acoplamento: norma do erro do deslocamento horizontal no tempo de 200s vs. tamanho do passo de tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

aos métodos de acoplamento. Para um determinado tamanho de malha o comportamento do erro com o tamanho do intervalo de tempo é semelhante para todos os métodos. Também, para um determinado tamanho de intervalo de tempo, o erro comporta-se de forma semelhante com o refino da malha para os três métodos.

Uma informação importante é fornecida por todos os gráficos. Citando o caso do erro da tensão vertical (figura 6.80) pode-se ver que para a malha mais grosseira ($h_p = 0,3125m$) as curvas para todos os métodos de acoplamento convergem com um intervalo de tempo maior do que para um tamanho de malha menor ($h_p = 0,09091m$). É bastante provável que isso aconteça porque chega-se a um ponto onde não mais adianta refinar a malha no tempo, pois os erros ficam embutidos nos erros da discretização espacial. Quando a malha é menor o erro espacial é menor, sendo então necessário um intervalo de tempo também menor para chegar ao ponto em que o tamanho do intervalo de tempo não mais influencia no erro.

Para finalizar, é necessário analisar os métodos com o foco em um dos principais pontos de interesse quando é necessário decidir qual método de acoplamento utilizar, isto é, o tempo de CPU despendido na si-

mulação. Para isso, foram realizadas simulações para o problema de Mandel utilizando diversas malhas (as quais encontram-se na tabela 6.7) e um passo de tempo de 1,0s, sendo a finalização das mesmas dada no tempo de 9400s.

Tabela 6.7 – Malhas utilizadas para a análise do tempo de CPU em função do número de volumes da malha na simulação do problema de Mandel.

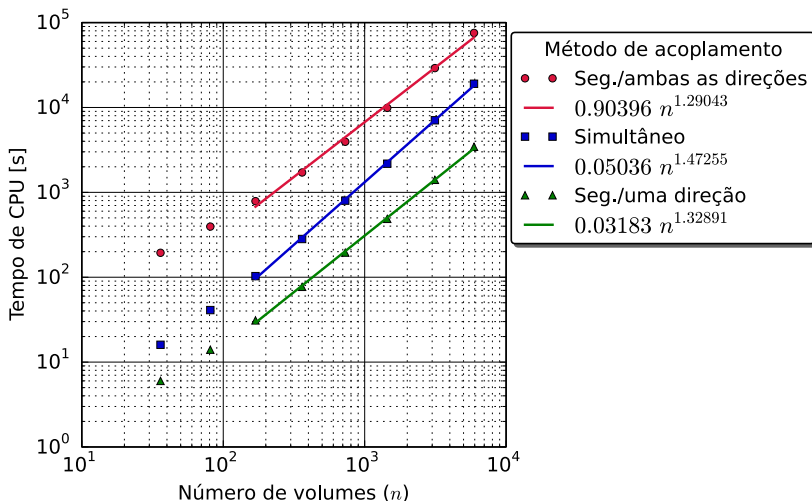
	nx	ny	Número de volumes
Malha 01	6	6	36
Malha 02	9	9	81
Malha 03	13	13	169
Malha 04	19	19	361
Malha 05	27	27	729
Malha 06	38	38	1444
Malha 07	56	56	3136
Malha 08	77	77	5929

Fonte: elaborada pelo autor.

Obviamente as conclusões aqui colocadas são bastante restritas, pois valem apenas para o problema de Mandel e mesmo assim nem todas as possibilidades de parâmetros foram analisadas. Entendeu-se que não cabia aqui fazer variar um grande número de parâmetros pois as conclusões continuariam restritas. Além disso, é sempre muito difícil computar o tempo de CPU entre programas diferentes, pois a programação e os cálculos auxiliares podem interferir na medição do tempo. Como neste caso os códigos foram desenvolvidos pelo autor, teve-se o cuidado de procurar, ao mudar de tipo de acoplamento, não inserir cálculos que tornariam as medições de CPU incompatíveis. De qualquer forma, o que aqui está registrado é apenas uma indicação para este problema. O tempo de CPU consumido foi computado apenas para o regime transiente de cada simulação, isto é, desconsiderou-se o cálculo da condição de equilíbrio inicial do problema.

Na figura 6.83 estão ajustadas as curvas do tempo de CPU em função do número de incógnitas do problema. Como já esperado, o tempo de CPU despendido na utilização do método segregado/uma direção é o menor dos três métodos. Em termos de números, considerando a utilização

Figura 6.83 – Comparação entre os métodos de acoplamento: tempo de CPU vs. número de volumes da malha. Utilizado $\Delta t = 1,0s$.



Fonte: elaborada pelo autor.

da malha mais refinada, tem-se um tempo despendido por tal método aproximadamente 81,9% menor do que na utilização do método simultâneo, e 95,4% menor do que na utilização do método segregado/ambas as direções. Isso representa uma economia de tempo, em ambos os casos, substancial quando se tem como objetivo a agilidade na obtenção de uma solução.

Nota-se também que, assim como na comparação realizada utilizando o problema de Terzaghi (figura 6.33), novamente o método simultâneo necessitou de menores tempos de CPU do que o método segregado/ambas as direções para a realização das simulações. Utilizando a malha mais refinada como comparação, o método simultâneo necessitou de apenas 25,2% do tempo despendido utilizando o método segregado/ambas as direções.

Uma análise semelhante utilizando um passo de tempo de 10,0s também foi realizada, sendo verificado um comportamento análogo ao já observado na figura 6.83.

CONCLUSÕES

O tema desta dissertação foi o estudo de três métodos para tratar o acoplamento entre os modelos matemáticos para o escoamento e para a poroelasticidade. A discretização das equações de ambos os modelos matemáticos utilizando o método dos volumes finitos, uma tecnologia numérica bastante recente para esta aplicação, além de permitir a construção de um algoritmo limpo, é bastante intuitiva em função de empregar os princípios de conservação das quantidades físicas. Dada a natureza elíptica dos termos presentes nos modelos, tanto geomecânico como do escoamento, foi possível utilizar funções de interpolação do tipo CDS para sua aproximação numérica.

O arranjo desencontrado adotado para o posicionamento das variáveis sobre a malha computacional também contribuiu para a implementação computacional dos códigos. Em função de sua adoção, eliminou-se a necessidade de várias interpolações que teriam de ser realizadas, por exemplo, no caso da utilização de um arranjo co-localizado, para a discretização dos termos que realizam o acoplamento entre as equações. Como resultado, obteve-se um modelo numérico robusto. É bastante conhecido que o arranjo desencontrado é o preferido para tratar problemas que tenham acoplamento entre pressão e velocidade. Neste problema tem-se o acoplamento entre a pressão (escoamento) e o deslocamento (geomecânica) que exerce exatamente o mesmo papel da velocidade quando se tratando do acoplamento pressão-velocidade em problemas de escoamento, apenas. Infelizmente o arranjo desencontrado não é prático para

malhas não estruturadas.

Os problemas clássicos de Terzaghi e Mandel foram empregados para fazer os testes principais do trabalho e analisar os acoplamentos segregado/uma direção, segregado/ambas as direções e simultâneo. Também, por possuírem solução analítica, serviram de validação para os códigos desenvolvidos.

Uma análise da taxa de convergência foi realizada utilizando as soluções analíticas para cálculo dos erros. Por tratarem-se de problemas transientes, uma análise dos erros foi realizada tanto para o refino de malha no espaço como no tempo. Constatou-se que a horizontalização do perfil do erro *vs.* tamanho da malha (ou tamanho do espaço de tempo) acontece em função do problema ser transiente, diferente do que se observa quando taxas de convergência são analisadas para regime permanente. A taxa de convergência é mais elevada em função do refino espacial para diferentes intervalos de tempo, crescendo com a diminuição do intervalo de tempo, como esperado, pois com as duas variáveis sendo refinadas aproxima-se da solução analítica. Também constatou-se que o erro diminui com o refino de malha com uma taxa de convergência de 2a ordem para pequenos intervalos de tempo, e com 1a ordem em função do intervalo de tempo para pequenos tamanho de malha. Esta ordem deteriora consideravelmente se o tamanho de malha aumenta. Este comportamento foi observado tanto para o acoplamento segregado/ambas as direções quanto para o simultâneo.

Os erros para o acoplamento segregado/uma direção serão fortemente dependentes do intervalo de tempo adotado, já que não é realizado nenhum tipo de iteração para alimentar os dois problemas. Neste procedimento as não-linearidades e o acoplamento não são devidamente tratados. Como já comentado, existe logicamente um intervalo de tempo que origina soluções que satisfaçam um determinado critério de erro. Para transientes rápidos, que requerem pequenos intervalos de tempo para serem captados, pode ser uma boa alternativa. Além do tamanho do espaço de tempo, as não linearidades também precisam ser fracas para que este tipo de acoplamento possa oferecer resultados confiáveis. Neste trabalho não foi possível observar este efeito pois a porosidade, um efeito não linear destes problemas, praticamente não varia.

Em relação aos métodos segregados/ambas as direções e simultâneo, é lógico que quando especificado uma determinada tolerância a ser

observada pelos dois métodos, eles apresentam os mesmos resultados e os mesmos erros. O que os distingue será o tempo de CPU para atingir esta solução. Em termos de tempo de computação o método segregado/uma direção é o menos custoso, seguido do simultâneo e do segregado/ambas as direções. Os intervalos de tempo usados nestas simulações variaram de 0,5 a 10 segundos e o comportamento permaneceu o mesmo. Uma importante constatação é o fato do erro no cálculo da pressão, em função do tamanho do espaço de tempo, ser praticamente o mesmo para os três métodos empregados, aumentando, obviamente, para maiores tamanhos de malhas. O mesmo não se observa, entretanto, nos cálculos dos deslocamentos, onde o erro, tanto em função do intervalo de tempo, como em função da malha, diferem consideravelmente entre os três métodos. Estas conclusões não são gerais e problemas com diferentes ciclos iterativos precisam ser resolvidos. A escolha do método, como tudo em engenharia, depende do que se deseja calcular e da precisão requerida.

A expectativa que se tem, de que o método segregado/ambas as direções, quando levado a uma tolerância igual àquela dos métodos simultâneos, pode consumir maior tempo de computação em função do grande número de iterações requeridas, foi mostrada ser verdadeira. O método segregado/ambas as direções apresentou tempos de computação superiores ao simultâneo. Ter deixado a condição de contorno iterativa na tensão fora do ciclo de solução do problema geomecânico pode ter prejudicado ainda mais o desempenho do método segregado/ambas as direções.

Por outro lado, observa-se que para o problema de Mandel o tempo de CPU consumido com o acoplamento simultâneo aumenta a uma taxa maior com o refino da malha do que o segregado/ambas as direções. Isto sugere que o tempo despendido pelo primeiro possa vir a se igualar e, possivelmente, ultrapassar aquele despendido pelo segundo quando resolvendo problemas que apresentam fortes não-linearidades. Além disso, na simulação de um problema tridimensional, por exemplo, teriam de ser calculadas não mais apenas duas, mas sim três componentes para o deslocamento, o que teria como consequência um aumento considerável nas dimensões do sistema linear. Ou seja, como já dito anteriormente, dado que são muitas as possibilidades de iterações entre os modelos matemáticos, e mesmo dentro da própria solução iterativa do sistema linear, é impossível afirmar quando um acoplamento é melhor do que outro. Os

requisitos e as condições do problema é que serão determinantes.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Por tratar-se de uma metodologia que resolve os dois problemas com o método de volumes finitos, e por tratar-se de uma linha de pesquisa bastante nova, há várias áreas ainda em aberto para estudos futuros. Abaixo seguem algumas sugestões de estudos consideradas relevantes pelo autor e que podem vir a agregar conhecimentos importantes para a área em foco.

- Realização de simulações utilizando malhas não-estruturadas. Este assunto já está sendo tratado dentro do laboratório onde realizou-se esta dissertação. As questões que aparecem são muitas quando malhas não-estruturadas são empregadas, sendo a primeira delas a não-ortogonalidade local da malha, requerendo algoritmos especiais para cálculo dos fluxos. O uso do arranjo desconstruído é bastante complexo de ser usado em malhas não-estruturadas e arranjos co-localizados precisam ser empregados, requerendo alternativas para calcular as velocidades nas interfaces do volume de controle responsáveis pelos fluxos de massa e outras quantidades.
- Realização de simulações utilizando domínios tridimensionais. Sabe-se que mesmo que toda a estrutura numérica seja a mesma no problema 3D, a extensão não é trivial.
- Voltando-se para o lado da física, muitos outros testes precisam ser realizados empregando outros modelos constitutivos, tanto para criar situações mais reais, bem como para introduzir não linearidades mais fortes na solução.
- Comparação entre soluções obtidas a partir da metodologia utilizada neste trabalho, isto é, resolvendo ambos os modelos utilizando apenas o método dos volumes finitos, e a partir das metodologias tradicionais na área, como a solução de ambos os modelos através do método dos elementos finitos ou, ainda, utilizando diferentes métodos.

REFERÊNCIAS

BIBLIOGRÁFICAS

- ABOULEISMAN, Y.; CHENG, A. H. D.; CUI, L.; DETOURNAY, E.; ROEGIERS, J. C. **Mandel's Problem Revisited.** *Géotechnique*, v. 46, n. 2, pp. 187–195, 1996.
- ALLEN, D. R. **Environmental Aspects of Oil Producing Operations - Long Beach, California.** *Journal of Petroleum Technology*, pp. 125–131, February, 1972.
- BALAY, S.; ABHYANKAR, S.; ADAMS, M.; BROWN, J.; BRUNE, P.; BUSCHELMAN, K.; DALCIN, L.; EIJKHOUT, V.; GROPP, W.; KARPEYEV, D.; KAUSHIK, D.; KNEPLEY, M.; CURFMAN, L. M.; RUPP, K.; SMITH, B.; ZAMPINI, S.; ZHANG, H. **PETSc Users Manual.** Argonne National Laboratory, December, 2015. <http://www.mcs.anl.gov/petsc/>.
- BIJELONJA, I. **A Finite Volume Method for a Geomechanics Problem.** *DAAAM International*, v. 22, n. 1, pp. 323–324, 2011.
- BIOT, M. A. **General Theory of Three-Dimensional Consolidation.** *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, pp. 155–164, February, 1941.
- BIOT, M. A. **Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid.** *Journal of Applied Physics*, v. 26, n. 2, pp. 182–185, February, 1955.
- BIOT, M. A. **Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid.** *Journal of Applied Physics*, v. 27, n. 5, pp. 459–467, May, 1956.
- BIOT, M. A. **Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics.** *Journal of Applied Physics*, v. 27, n. 3, pp. 240–253, March, 1956.

- BIOT, M. A. **Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media.** *Journal of Applied Physics*, v. 33, n. 4, pp. 1482–1498, April, 1962.
- BYRNE, H.; PREZIOSI, L. **Modelling Solid Tumour Growth Using the Theory of Mixtures.** *Mathematical Medicine and Biology*, v. 20, pp. 341–366, 2003.
- CARBOGNIN, L.; GATTO, P.; MOZZI, G.; GAMBOLATI, G.; RICCERI, G., 1984. Case history no. 9.3. venice, italy. In: Poland, J. F. (ed.). *Guidebook to Studies of Land Subsidence Due to Ground-Water Withdrawal*, p. 161–174, Paris. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.
- CHENG, A. H. D.; DETOURNAY, E. **A Direct Boundary Element Method for Plane Strain Poroelasticity.** *Int. J. Numer. Analy. Methods Geomech.*, v. 12, pp. 551–572, 1988.
- CHIN, L. Y.; RAGHAVAN, R.; THOMAS, L. K. **Fully Coupled Analysis of Well Responses in Stress-Sensitive Reservoirs.** *SPE Reservoir Eval. & Eng.*, v. 3, n. 5, pp. 435–443, October, 2000.
- CHIN, L. Y.; RAGHAVAN, R.; THOMAS, L. K. **Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells With Stress-Dependent Permeability.** *SPE Journal*, v. 5, n. 1, pp. 32–45, March, 2000.
- CHIN, L. Y.; THOMAS, L. K.; E., S. J.; G., P. R. **Iterative Coupled Analysis of Geomechanics and Fluid Flow for Rock Compaction in Reservoir Simulation.** *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP*, v. 57, n. 5, pp. 485–497, 2002.
- COMERLATI, A.; FERRONATO, M.; GAMBOLATI, G.; PUTTI, M.; TEATINI, P. **Saving Venice by Seawater.** *Journal of Geophysical Research*, v. 109, 2004.
- CRYER, C. W. **A Comparison of the Three-Dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi.** *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, v. 16, pp. 401–412, 1963.
- DAL PIZZOL, A. **Análise dos Efeitos Geomecânicos na Simulação de Reservatórios.** Master's Thesis, Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - Brasil, 2014.

- DAL PIZZOL, A.; MALISKA, C. R. **A Finite Volume Method for the Solution of Fluid Flows Coupled with the Mechanical Behavior of Compacting Porous Media.** *Porous Media and its Application in Science, Engineering and Industry*, pp. 205–210, AIP Conference Proc. 1453; doi:10.1063/1.4711176 American Institute of Physics 978-0-7354, 2012.
- DEAN, R. H.; GAI, X.; STONE, C. M.; MINKOFF, S. E. **A Comparison of Techniques for Coupling Porous Flow and Geomechanics.** *SPE Journal*, pp. 132–140, March, 2006.
- DETOURNAY, E.; CHENG, A. H. D. **Plane Strain Analysis of a Stationary Hydraulic Fracture in a Poroelastic Medium.** *Int. J. Solids Structures*, v. 27, n. 13, pp. 1645–1662, 1991.
- DETOURNAY, E.; CHENG, A. H. D. **Fundamentals of Poroelasticity.** *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*, v. 2, pp. 113–171, 1993.
- FALCÃO, F. O. L. **Efeitos Geomecânicos na Simulação de Reservatórios de Petróleo.** Master's Thesis, Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Agosto, 2002.
- FERRONATO, M.; CASTELLETTO, N.; GAMBOLATI, G. **A Fully Coupled 3-D Mixed Finite Element Model of Biot Consolidation.** *Journal of Computational Physics*, v. 229, pp. 4813–4830, 2010.
- FREDRICH, J. T.; ARGUELLO, J. G.; L., D. G.; DE ROUFFIGNAC, E. P. **Geomechanical Modeling of Reservoir Compaction, Surface Subsidence, and Casing Damage at the Belridge Diatomite Field.** *SPE Reservoir Eval. & Eng.*, v. 3, n. 4, pp. 348–359, August, 2000.
- GAI, X. **A Coupled Geomechanics and Reservoir Flow Model on Parallel Computers.** Ph.D. Thesis, The University of Texas at Austin, Austin, Texas, August, 2004.
- GAMBOLATI, G.; TEATINI, P. **Venice Shall Rise Again - Engineered Uplift of Venice Through Seawater Injection.** Elsevier, 2014.
- GEERTSMA, J. **The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Changes of Porous Rocks.** *Petroleum Transactions, AIME*, v. 210, pp. 331–340, 1957.

- GEERTSMA, J., September-October, 1966. Problems of rock mechanics in petroleum production engineering. In: *1st ISRM Congress, Lisbon, Portugal*, p. 585–594. International Society for Rock Mechanics.
- GIBSON, R. E.; KNIGHT, K.; TAYLOR, P. W. **A Critical Experiment to Examine Theories in Three-Dimensional Consolidation.** *Proc. Eur. Conf. Soil Mech.*, v. 1, pp. 69–76, 1963.
- GUTIERREZ, M.; LEWIS, R. W. **The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation.** *SPE/ISRM Eurock'98 held in Trondheim, Norway*, pp. 439–448, July, 1998.
- GUTIERREZ, M.; LEWIS, R. W. **Coupling of Fluid Flow and Deformation in Underground Formations.** *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 779–787, July, 2002.
- GUTIERREZ, M.; LEWIS, R. W.; MASTERS, I. **Petroleum Reservoir Simulation Coupling Fluid Flow and Geomechanics.** *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, pp. 164–172, June, 2001.
- HANSEN, K. S.; PRATS, M.; CHAN, C. K. **Modeling of Reservoir Compaction and Surface Subsidence at South Belridge.** *SPE Production & Facilities*, pp. 134–143, August, 1995.
- HOU, T.; CHEN, Y. **Superconvergence of Fully Discrete Rectangular Mixed Finite Element Methods of Parabolic Control Problems.** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 286, pp. 79–92, 2015.
- HU, L.; WINTERFELD, P. H.; FAKCHAROENPHOL, P.; WU, Y. S. **A Novel Fully-Coupled Flow and Geomechanics Model in Enhanced Geothermal Reservoirs.** *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 107, pp. 1–11, 2013.
- HUDSON, J. A.; STEPHANSSON, O.; ANDERSSON, J.; TSANG, C. F.; JING, L. **Coupled T-H-M Issues Relating to Radioactive Waste Repository Design and Performance.** *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, v. 38, pp. 143–161, 2001.
- JENG, D. S.; CHA, D. H. **Effects of Dynamic Soil Behavior and Wave Non-Linearity on the Wave-Induced Pore Pressure and Effective Stresses in Porous Seabed.** *Ocean Engineering*, v. 30, pp. 2065–2089, 2003.

- JHA, B.; JUANES, R. **A Locally Conservative Finite Element Framework for the Simulation of Coupled Flow and Reservoir Geomechanics.** *Acta Geotechnica 2*, pp. 139–153, 2007.
- Ji, L.; SETTARI, A.; OF CALGARY, U.; SULLIVAN, R. B. **A New Approach to Hydraulic Fracturing Modeling - Fully Coupled With Geomechanical and Reservoir Simulation.** *SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition held in Vienna, Austria*, 12-15 June, 2006.
- Ji, L.; SETTARI, A.; SULLIVAN, R. B. **A Novel Hydraulic Fracturing Model Fully Coupled With Geomechanics and Reservoir Simulation.** *SPE Journal*, pp. 423–430, September, 2009.
- KIM, J. M.; PARIZEK, R. R. **Numerical Simulation of the Noordbergum Effect Resulting from Groundwater Pumping in a Layered Aquifer System.** *Journal of Hydrology*, v. 202, pp. 231–243, 1997.
- KRIZEK, M.; NEITTAANMAKI, P. **On Superconvergence Techniques.** *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 9, pp. 175–198, 1987.
- LI, P.; CHALATURNYK, R. J.; TAN, T. B. **Coupled Reservoir Geomechanical Simulations for the SAGD Process.** *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 45, n. 1, pp. 33–40, January, 2006.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA., Rio de Janeiro, 2004.
- MANDEL, J. **Consolidation des sols (étude mathématique).** *Géotechnique*, v. 3, pp. 287–299, 1953.
- MCKEE, C. R.; BUMB, A. C.; KOENIG, R. A. **Stress-Dependent Permeability and Porosity of Coal and Other Geologic Formations.** *SPE Formation Evaluation*, pp. 81–91, March, 1988.
- MINKOFF, S. E.; STONE, C. M.; ARGUELLO, J. G.; BRYANT, S.; EATON, J.; PESZYNSKA, M.; WHEELER, M. **Staggered in Time Coupling of Reservoir Flow Simulation and Geomechanical Deformation: Step 1 - One-Way Coupling.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 1–2, 1999.
- MINKOFF, S. E.; STONE, C. M.; BRYANT, S.; PESZYNSKA, M.; WHEELER, M. F. **Coupled Fluid Flow and Geomechanical Deformation Modeling.** *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 38, pp. 37–56, 2003.

- NUR, A.; BYERLEE, J. D. **An Exact Effective Stress Law for Elastic Deformation of Rock with Fluids.** *Journal of Geophysical Research*, v. 76, n. 26, pp. 6414–6419, September, 1971.
- PHILLIPS, P. J. **Finite Element Methods in Linear Poroelasticity: Theoretical and Computational Results.** Ph.D. Thesis, The University of Texas at Austin, Texas - USA, December, 2005.
- PRATT, W. E.; JOHNSON, D. W. **Local Subsidence of the Goose Creek Oil Field.** *Journal of Geology*, v. 34, n. 7, pp. 577–590, October-November, 1926.
- RICE, J. R.; CLEARY, M. P. **Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media With Compressible Constituents.** *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 14, n. 2, pp. 227–241, May, 1976.
- RODRÍGUEZ, H. A.; SILVA, R. J.; ZERPA, L. B.; FUNG, L. S. K.; CARMINO, M. **Stability Analysis of Horizontal Wells in Orinoco Belt, Venezuela.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 49–57, April, 1996.
- ROOSE, T.; NETTI, P. A.; MUNN, L. L.; BOUCHER, Y.; JAIN, R. K. **Solid Stress Generated by Spheroid Growth Estimated Using a Linear Poroelasticity Model.** *Microvascular Research*, v. 66, pp. 204–212, 2003.
- RUTQVIST, J.; TSANG, C. F. **Analysis of Thermal-Hydrologic-Mechanical Behavior Near an Emplacement Drift at Yucca Mountain.** *Journal of Contaminant Hydrology*, v. 62-63, pp. 637–652, 2003.
- RUTQVIST, J.; WU, Y. S.; TSANG, C. F.; BODVARSSON, G. **A Modeling Approach for Analysis of Coupled Multiphase Fluid Flow, Heat Transfer and Deformation in Fractured Porous Rock.** *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, v. 39, pp. 429–442, 2002.
- SALARI, K.; KNUPP, P. **Code Verification by the Method of Manufactured Solutions.** Technical Report, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, USA, June, 2000.
- SAMIER, P.; ONAIS, A.; FONTAINE, G. **Comparisons of Uncoupled and Various Coupling Techniques for Practical Field Examples.** *SPE Journal*, pp. 89–102, March, 2006.

- SANTARELLI, F. J. **Roch Mechanics Characterization of Deep Formations: A Technico-Economical Overview.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 3–12, August, 1994.
- SCHIFFMAN, R. L.; CHEN, A. T. F.; JORDAN, J. C. **An Analysis of Consolidation Theories.** *J. Soil Mech. Fdn Div. Am. Soc. Civ. Engrs*, v. 95, pp. 295–312, 1969.
- SETTARI, A.; MOURITS, F. M. **A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System.** *SPE Journal*, pp. 219–226, September, 1998.
- SETTARI, A.; WALTERS, D. A. **Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 1–13, 1999.
- SETTARI, A.; WALTERS, D. A. **Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction.** *SPE Journal*, pp. 334–342, September, 2001.
- SHAW, G.; STONE, T. **Finite Volume Methods for Coupled Stress/Fluid Flow in a Commercial Reservoir Simulator.** *Society of Petroleum Engineers*, pp. 1–8, 2005.
- SKEMPTON, A. W. **The Pore-Pressure Coefficients A and B.** *Geotechnique*, v. 4, pp. 143–147, 1954.
- SMILLIE, A.; SOBEY, I.; MOLNAR, Z. **A Hydro-elastic Model of Hydrocephalus.** Technical Report, Oxford University Computing Laboratory - Numerical Analysis Group, Oxford - England, February, 2004.
- SONG, L.; ZHANG, Z. **Superconvergence Property of an Over-Penalized Discontinuous Galerkin Finite Element Gradient Recovery Method.** *Journal of Computational Physics*, v. 299, pp. 1004–1020, 2015.
- SWAN, C. C.; LAKES, R. S.; BRAND, R. A.; STEWART, K. J. **Micromechanically Based Poroelastic Modeling of Fluid Flow in Haversian Bone.** *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 125, pp. 25–37, February, 2003.
- TEMIMI, H. **Superconvergence of Discontinuous Galerkin Solutions for Higher-Order Ordinary Differential Equations.** *Applied Numerical Mathematics*, v. 88, pp. 46–65, 2015.

- TERZAGHI, K. **Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamische Spannungserscheinungen.** *Sitzber. Akad. Wiss., Wien. Math. Naturwiss. Kl., Abt. IIa*, v. 132, pp. 125–138, 1923.
- THOMAS, L. K.; CHIN, L. Y.; PIERSON, R. G.; SYLTE, J. E. **Coupled Geomechanics and Reservoir Simulation.** *SPE Journal*, pp. 350–358, December, 2003.
- TRAN, D.; SETTARI, A.; NGHIEM, L. **New Iterative Coupling Between a Reservoir Simulator and a Geomechanics Module.** *SPE Journal*, pp. 362–369, September, 2004.
- TRAN, D.; NGHIEM, L.; BUCHANAN, L. **Improved Iterative Coupling of Geomechanics With Reservoir Simulation.** *SPE Reservoir Simulation Symposium held in Houston, Texas, U.S.A.*, 31 January - 2 February, 2005.
- VAN DER VORST, H. A. **Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems.** *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, v. 13, n. 2, pp. 631–644, March, 1992.
- WANG, H. F. **Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology.** Princeton University Press, Princeton - USA, 2000.
- YAMAMOTO, T. **Wave-Induced Pore Pressures and Effective Stresses in Inhomogeneous Seabed Foundations.** *Ocean Engng.*, v. 8, pp. 1–16, 1981.
- YANG, D.; MORIDIS, G. J.; BLASINGAME, T. A. **A Fully Coupled Multiphase Flow and Geomechanics Solver for Highly Heterogeneous Porous Media.** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 270, pp. 417–432, 2014.
- YORK, S. D.; PENG, C. P.; JOSLIN, T. H. **Reservoir Management of Valhall Field, Norway.** *Journal of Petroleum Technology*, v. 44, pp. 918–923, August, 1992.
- ZHANG, Y.; JENG, D. S.; GAO, F. P.; ZHANG, J. S. **An Analytical Solution for Response of a Porous Seabed to Combined Wave and Current Loading.** *Ocean Engineering*, v. 57, pp. 240–247, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, 5 edition, vol. 1: The Basis. Butterworth-Heinemann, Oxford - England, 2000.

ZIMMERMAN, R. W.; SOMERTON, W. H.; KING, M. S. **Compressibility of Porous Rocks**. *Journal of Geophysical Research*, v.91, n. B12, pp. 12.765–12.777, November, 1986.

APÊNDICE

A

CORRELACIONAMENTO ENTRE PROPRIEDADES POROELÁSTICAS

Neste apêndice encontram-se presentes algumas das correlações mais úteis e comumente utilizadas entre as constantes poroelásticas definidas por Biot (1941) e Rice & Cleary (1976) e as propriedades micromecânicas posteriormente deduzidas por Detournay & Cheng (1993). Na seção A.1, são apresentadas expressões que correlacionam entre si apenas as constantes poroelásticas que consideram o conjunto fluido-estrutura porosa como um todo. Na seção A.2, são apresentadas as expressões que correlacionam as propriedades observadas na seção A.1 com aquelas obtidas a partir da formulação micromecânica, a qual considera as contribuições de cada componente individualmente para caracterização do meio poroso. Por fim, na seção A.3 constam as correlações já apresentadas na seção A.2, mas, agora, simplificadas para o caso de um meio poroso ideal.

A.1 Propriedades poroelásticas para o conjunto fluido-estrutura

Nesta seção encontram-se presentes as principais correlações existentes entre as constantes poroelásticas definidas por Biot (1941) e Rice & Cleary (1976).

$$B = \frac{R}{H} = \frac{3(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u)} \quad (\text{A.1})$$

$$\nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1-2\nu)}{3 - \alpha B(1-2\nu)} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{K}{H^2} = \frac{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u - \nu)} = \frac{\alpha}{K_u B} = \frac{\alpha^2}{K_u - K} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{KB} \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha = \frac{K}{H} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Propriedades poroelásticas para o conjunto fluido-estrutura e micromecânica

Nesta seção encontram-se presentes as principais expressões que correlacionam as constantes poroelásticas que consideram o meio poroso como um meio homogêneo, com as propriedades definidas a partir da formulação micromecânica (Detournay & Cheng, 1993).

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K'_s} = 1 - \frac{K_p}{\phi K'_s + K_p} \quad (\text{A.6})$$

$$K_u = K \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{K}{K'_s}\right)^2}{\frac{K}{K'_s} \left(1 - \frac{K}{K'_s}\right) + \phi \left(\frac{K}{K_f} - \frac{K}{K''_s}\right)} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$B = 1 - \frac{\phi \left(\frac{K}{K_f} - \frac{K}{K''_s}\right)}{\left(1 - \frac{K}{K'_s}\right) + \phi \left(\frac{K}{K_f} - \frac{K}{K''_s}\right)} = 1 - \frac{\frac{K_p}{K_f} - \frac{K_p}{K''_s}}{1 + \frac{K_p}{K_f} - \frac{K_p}{K''_s}} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{K}{K'_s} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'_s} \right) + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K''_s} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} K &= K'_s \left(1 - \frac{\phi K'_s}{\phi K'_s + K_p} \right) \\ &= \frac{K_p}{\phi} \left(1 - \frac{K_p}{K_p + \phi K'_s} \right) \\ &= K_\phi \left[1 - \frac{K_\phi}{(1-\phi)K'_s + K_\phi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.3 Propriedades poroelásticas para um meio poroso ideal

A principal característica de um meio poroso ideal, aos olhos da formulação micromecânica, é a identidade das propriedades $K_s = K'_s = K''_s$. Com isso em mente, nesta seção são apresentadas as correlações já apresentadas de modo geral na seção A.2 mas, agora, com as devidas simplificações para o caso de um meio poroso ideal.

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (\text{A.11})$$

$$K_u = K \left[1 + \frac{\alpha^2 K_f}{(1-\alpha)(\alpha-\phi)K_f + \phi K} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$B = \frac{\alpha K_f}{[\alpha - \phi(1-\alpha)]K_f + \phi K} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{\alpha - \phi}{K_s} \quad (\text{A.14})$$

¹Maiores detalhes na subseção 2.3.1.

B

SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Neste apêndice tem-se como objetivo, basicamente, apresentar as soluções analíticas relativas aos problemas utilizados neste trabalho. As equações são demonstradas de modo direto, isto é, sem o detalhamento quanto à obtenção das mesmas. Porém, junto a elas, são apresentados breves comentários quanto à pormenores importantes das soluções, assim como citadas as fontes a partir das quais tais soluções foram obtidas.

B.1 Problema de Terzaghi

Para o problema de Terzaghi são apresentadas as soluções analíticas para a pressão e o deslocamento vertical, onde ambas as variáveis se apresentam como funções do tempo e do espaço (sendo este último representado pela coordenada y na coluna, considerando a unidimensionalidade do problema). As soluções foram desenvolvidas considerando a origem do sistema de coordenadas no topo da coluna, com o eixo y posicionado em direção à base da mesma. As informações que seguem foram retiradas de Wang (2000).

Considera-se uma coluna de altura H , sobre a qual é aplicada uma carga $-\sigma_0$. A pressão na condição de equilíbrio inicial ($t = 0^+$), após

aplicação instantânea da carga, pode ser calculada através de

$$p_0 = \gamma \sigma_0 \quad (\text{B.1})$$

onde γ denomina-se eficiência do carregamento, e é calculado por

$$\gamma = \frac{B(1 + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)} \quad (\text{B.2})$$

A solução para a pressão, então, é

$$p(y, t) = \frac{4\gamma\sigma_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \exp\left[\frac{-(2j+1)^2 \pi^2 c t}{4H^2}\right] \sin\left[\frac{(2j+1)\pi y}{2H}\right] \quad (\text{B.3})$$

onde c , denominado como coeficiente de consolidação ou difusividade hidráulica uniaxial, é dado por

$$c = \frac{3k_{ii}\gamma K(1 + \nu)}{\mu\alpha(1 - \nu)} \quad (\text{B.4})$$

O deslocamento vertical, na condição de equilíbrio inicial ($t = 0^+$), pode ser calculado por

$$v_0(y, 0^+) = \frac{\sigma_0(1 + \nu_u)(H - y)}{3K_u(1 - \nu_u)} \quad (\text{B.5})$$

A solução para o deslocamento vertical é

$$v(y, t) = v_0 + \frac{\gamma\sigma_0\alpha(1 + \nu)}{3K(1 - \nu)} \left\{ (H - y) - \frac{8H}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \exp\left[\frac{-(2j+1)^2 \pi^2 c t}{4H^2}\right] \cos\left[\frac{(2j+1)\pi y}{2H}\right] \right\} \quad (\text{B.6})$$

B.2 Problema de Mandel

Para o problema de Mandel são apresentadas as soluções analíticas para a pressão, tensão vertical, deslocamento vertical e deslocamento horizontal. As quatro soluções definem as variáveis como funções do

tempo e do espaço, sendo que, no caso na pressão, da tensão vertical e do deslocamento horizontal, tem-se uma variação apenas ao longo do eixo x da amostra, enquanto no caso do deslocamento vertical, ao longo do eixo y . Em outras palavras, apesar deste ser um problema bidimensional, tem-se um comportamento unidimensional para os quatro campos de variáveis.

As informações que seguem foram retiradas de Abouleisman *et al.* (1996), sendo a simbologia adaptada para a utilizada neste trabalho. Um desenho esquemático do problema, junto à suas condições de contorno, pode ser encontrado na figura 6.34. As expressões que definem a solução analítica para cada variável, então, se mostram

$$p(x, t) = \frac{2FB(1 + \nu_u)}{3L} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \\ \left. \left[\cos\left(\frac{A_j x}{L}\right) - \cos(A_j) \right] \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right\} \quad (\text{B.7})$$

$$\sigma_{yy}(x, t) = -\frac{2F(\nu_u - \nu)}{L(1 - \nu)} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \\ \left. \cos\left(\frac{A_j x}{L}\right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] - \frac{F}{L} + \\ + \frac{2F}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] \quad (\text{B.8})$$

$$u(x, t) = \left\{ \frac{F\nu}{2GL} - \frac{F\nu_u}{GL} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \right. \\ \left. \left. \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] \right\} x + \frac{F}{G} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \\ \left. \sin\left(\frac{A_j x}{L}\right) \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] \quad (\text{B.9})$$

$$v(y, t) = \left\{ \frac{F(1 - \nu_u)}{GL} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(A_j)\cos(A_j)}{A_j - \sin(A_j)\cos(A_j)} \right. \right. \\ \left. \left. \exp(-A_j^2 c t / L^2) \right] - \frac{F(1 - \nu)}{2GL} \right\} y \quad (\text{B.10})$$

onde A_j representa as raízes da equação

$$\frac{\tan(A_j)}{A_j} = \frac{1 - \nu}{\nu_u - \nu} \quad (\text{B.11})$$