

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**O MÉTODO MULTIGRID DE CORREÇÕES ADITIVAS PARA A SOLUÇÃO  
NUMÉRICA ACOPLADA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM MALHAS  
NÃO-ESTRUTURADAS**

**Tese submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**SUSIE CRISTINE KELLER**

**Florianópolis, março de 2007.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**O MÉTODO MULTIGRID DE CORREÇÕES ADITIVAS PARA A SOLUÇÃO NUMÉRICA  
ACOPLADA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM MALHAS  
NÃO-ESTRUTURADAS**

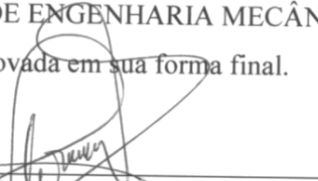
SUSIE CRISTINE KELLER

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

DOUTOR EM ENGENHARIA

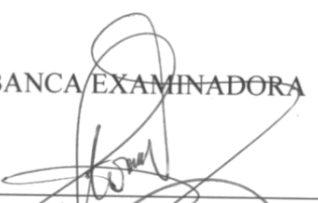
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

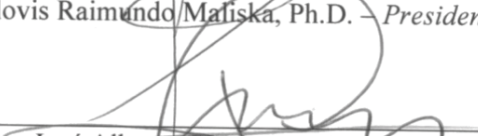
sendo aprovada em sua forma final.

  
Clovis Raimundo Maliska, Ph.D. - *Orientador*

  
Fernando Cabral, Ph. D. - *Coordenador do Curso*

BANCA EXAMINADORA

  
Clovis Raimundo Maliska, Ph.D. - *Presidente*

  
José Alberto Cuminato, Ph.D. - *Relator*

  
Philippe Remy Bernard Devloo, Ph.D.

  
Mário César Zambaldi, Dr.

  
Antonio Fábio Carvalho da Silva, Dr. Eng.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço

A Deus que possibilitou que eu estivesse aqui para realizar este trabalho;

Aos meus pais, Sarah e Flávio, pela sólida formação que me proporcionou a continuidade nos estudos até a chegada a este doutorado e pelo incentivo e apoio dados no decorrer de toda a minha vida;

Ao meu namorado Bruno, por todo apoio, carinho e amor e por sempre estar ao meu lado me auxiliando nas horas difíceis;

Ao professor Clóvis R. Maliska, pela valiosa orientação prestada, sem a qual esta tese não poderia ter sido realizada;

Aos colegas e amigos do SINMEC pelo companheirismo, amizade e colaboração cotidianos;

À CAPES pelo auxílio financeiro, fato este que muito contribuiu para viabilização desta tese;

E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, agradeço profundamente.

## SUMÁRIO

|  |       |
|--|-------|
| LISTA DE FIGURAS .....   | iii   |
| LISTA DE TABELAS .....   | ix    |
| LISTA DE SÍMBOLOS .....  | xiv   |
| RESUMO .....   | xviii |
| ABSTRACT .....   | xix   |
| <br>   |       |
| 1 INTRODUÇÃO.....  | 1     |
| 1.1 Motivação.....   | 3     |
| 1.2 Revisão bibliográfica.....   | 5     |
| 1.3 Objetivos.....   | 12    |
| 1.4 Estrutura do trabalho .....  | 14    |
| <br>   |       |
| 2 TEORIA GERAL DOS MÉTODOS MULTIGRID .....   | 16    |
| 2.1 Malhas .....   | 19    |
| 2.2 Multigrid tradicional.....   | 20    |
| 2.2.1 Seqüência de malhas.....   | 24    |
| 2.2.2 Estrutura de um operador de duas malhas .....  | 24    |
| 2.3 Ciclos Multigrid.....  | 29    |
| 2.4 Full Multigrid .....   | 30    |
| <br>   |       |
| 3 MÉTODO MULTIGRID DE CORREÇÕES ADITIVAS.....  | 32    |
| 3.1 Comportamento da solução de equações com coeficientes anisotrópicos .....                    | 32    |
| 3.2 O método Multigrid de Correções Aditivas .....   | 34    |
| 3.2.1 O Método Multigrid de Correções Aditivas aplicado a um sistema de equações acopladas ..... | 47    |
| <br>   |       |
| 4 ESQUEMA DE AGLOMERAÇÃO DO ACM .....  | 49    |
| 4.1 Performance do método numérico.....  | 49    |
| 4.2 Esquema de aglomeração .....   | 53    |
| 4.3 Esquemas de aglomeração em problemas acoplados .....   | 57    |
| 4.3.1 Norma de Frobenius .....   | 58    |
| 4.3.2 Norma da Soma (colunas) .....  | 58    |
| 4.3.3 Norma do Máximo (linhas) .....   | 58    |
| 4.3.4 Norma Euclidiana .....   | 58    |



|  |     |
|--|-----|
| 4.3.5 Traço da matriz.....   | 59  |
| 4.3.6 Determinante da matriz .....   | 59  |
| 5 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS (EbFVM).....                 | 60  |
| 5.1 Equações de conservação .....  | 66  |
| 5.2 Integração das equações de conservação.....                                | 67  |
| 5.3 Solução acoplada das equações de conservação.....                          | 70  |
| 5.3.1 Discretização das equações de conservação.....                           | 70  |
| 5.3.2 O princípio básico do FIELDS .....                                       | 73  |
| 5.3.3 Operadores nos pontos de integração .....                                | 74  |
| 5.3.3.1 Termos transiente e fonte .....  | 75  |
| 5.3.3.2 Termo de pressão.....  | 75  |
| 5.3.3.3 Termo difusivo .....   | 75  |
| 5.3.3.4 Termo advectivo.....   | 78  |
| 5.3.4 Fechamento das equações.....   | 82  |
| 5.4 Observações sobre o a montagem da matriz de coeficientes.....              | 84  |
| 5.5 Observações sobre a função de interpolação no tempo.....                   | 85  |
| 5.6 Observações sobre o sistema linear resultante .....                        | 86  |
| 6 RESULTADOS .....   | 89  |
| 6.1 Problemas de condução de calor .....                                       | 89  |
| 6.2 Problema da cavidade com a tampa móvel .....                               | 109 |
| 6.2.1 Malhas cartesianas igualmente espaçadas .....                            | 115 |
| 6.2.2 Malhas não-cartesianas.....  | 148 |
| 6.2.3 Malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ .....                       | 174 |
| 6.3 Escoamento entre placas paralelas .....                                    | 188 |
| 7 CONCLUSÕES .....   | 197 |
| 7.1 Comentários.....   | 197 |
| 7.2 Contribuições específicas .....  | 198 |
| 7.3 Trabalhos futuros.....   | 200 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....   | 203 |
| APÊNDICE 1 - Solves utilizados no Método Multigrid de Correções Aditivas ..... | 209 |
| APÊNDICE 2 - Implementação computacional.....                                  | 217 |

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1 Comportamento do <i>solver</i> na redução dos modos de frequência de erro para malhas de (a) trinta e um volumes e (b) sete volumes. ....   | 18 |
| Figura 2.2 Seqüência de malhas com $h = \frac{1}{8}$ , (a) malha $h$ , (b) malha $2h$ e (c) malha $4h$ . ....  | 24 |
| Figura 2.3 Representação dos operadores de interpolação na malha .....   | 27 |
| Figura 2.4 Ciclos Multigrid: V com (a) dois e (b) três níveis de malha, W com (c) três e (d) quatro níveis de malha e ciclo F com (e) quatro e (f) cinco níveis de malha. ....   | 30 |
| Figura 3.1 Geometria cartesiana para a demonstração do efeito de anisotropia dos coeficientes. ....  | 33 |
| Figura 3.2 Diferentes níveis de malha empregados na resolução de sistemas lineares através do método Multigrid de Correções Aditivas. No nível mais inferior têm-se a malha com 36 volumes, no segundo nível a malha dividida em 6 blocos, e no nível mais superior dividida em 3 blocos. .... | 35 |
| Figura 3.3 Exemplo de aglomeração adaptativa em uma malha não-estruturada. ....  | 42 |
| Figura 3.4 Malha não-estruturada, (a) fina subdividida em blocos, (b) grossa. ....   | 44 |
| Figura 3.5 Fluxograma geral do método Multigrid de Correções Aditivas. ....  | 46 |
| Figura 4.1 Fluxograma do esquema de aglomeração adaptativo. ....   | 55 |
| Figura 4.2 Procedimento de procura para o “melhor filho”. ....   | 56 |
| Figura 5.1 Elemento e volume de controle no EbFVM. ....  | 61 |
| Figura 5.2 Domínios (a) físico e (b) computacional. ....   | 61 |
| Figura 5.3 Vetor normal à superfície de integração. ....   | 68 |
| Figura 5.4 Representação do volume de controle e dos elementos pelos quais este é formado. ....  | 69 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 5.5 Representação dos pontos de integração e das sub-superfícies de controle em um elemento. ....                                      | 72  |
| Figura 5.6 Escala de comprimentos para o cálculo de $L_d$ . ....  | 76  |
| Figura 5.7 Operador advectivo 1. ....   | 79  |
| Figura 5.8 Operador advectivo 2. ....   | 79  |
| Figura 5.9 Operador advectivo do caso 1. ....   | 80  |
| Figura 5.10 Operador advectivo do caso 2. ....  | 81  |
| Figura 5.11 Operador advectivo do caso 3. ....  | 81  |
| Figura 5.12 Montagem da matriz global de coeficientes. ....   | 85  |
| <br>  |     |
| Figura 6.1 Geometria do problema isotrópico de condução de calor. ....  | 90  |
| Figura 6.2 Esforço computacional para o problema isotrópico de condução de calor com diferentes malhas. ....                                  | 92  |
| Figura 6.3 Geometria do problema anisotrópico de condução de calor. ....  | 92  |
| Figura 6.4 Diferentes níveis de aglomeração, (a) primeiro nível, (b) segundo nível, (c) terceiro nível e (d) quarto nível (mais grosso). .... | 94  |
| Figura 6.5 Redução do resíduo com o tempo para GS e ACM/GS com diferentes níveis de malhas. ....  | 95  |
| Figura 6.6 Diferentes níveis de aglomeração geométrica: (a) primeiro nível e (b) segundo nível. ....  | 96  |
| Figura 6.7 Redução do resíduo com o tempo para GS e ACM/GS com aglomeração adaptativa e geométrica. ....                                      | 96  |
| Figura 6.8 Geometria do terceiro problema de difusão. ....  | 97  |
| Figura 6.9 Esforço computacional no terceiro problema difusivo: (a) comparação de ACM/GS com GS, (b) comparação de ACM/ILU com ILU. ....      | 98  |
| Figura 6.10 Comparação entre ACM/ILU e ACM/GS no terceiro problema difusivo para: (a) ciclo V, (b) ciclo W e (c) ciclo F. ....                | 100 |
| Figura 6.11 Malha original com 1024 volumes de controle. ....   | 101 |
| Figura 6.12 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa: (a) 256 volumes e (b) 64 volumes. ....  | 101 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 6.13 Malhas resultantes da aglomeração geométrica: (a) 256 volumes e (b) 64 volumes.....  | 101 |
| Figura 6.14 Comparação entre ACM/ILU com aglomeração adaptativa e aglomeração geométrica para: (a) ciclo V, (b) ciclo W e (c) ciclo F.....   | 103 |
| Figura 6.15 Geometria do quarto problema de difusão.....   | 104 |
| Figura 6.16 Esforço computacional no quarto problema difusivo: (a) comparação de ACM/GS com GS, (b) comparação de ACM/ILU com ILU.....   | 105 |
| Figura 6.17 Comparação entre ACM/ILU e ACM/GS no quarto problema difusivo para: (a) ciclo V, (b) ciclo W e (c) ciclo F.....  | 107 |
| Figura 6.18 Comparação entre ACM/ILU ciclo W com aglomeração adaptativa e com aglomeração geométrica no quarto problema difusivo.....  | 108 |
| Figura 6.19 Problema da cavidade quadrada com tampa móvel com $Re = 100$ : (a) malha utilizada, (b) linhas de corrente, (c) perfil de velocidade u e (d) perfil de velocidade v..... | 111 |
| Figura 6.20 Problema da cavidade quadrada com tampa móvel com $Re = 400$ : (a) linhas de corrente, (b) perfil de velocidade u e (c) perfil de velocidade v.....                      | 113 |
| Figura 6.21 Problema da cavidade quadrada com tampa móvel com $Re = 1000$ : (a) linhas de corrente, (b) perfil de velocidade u e (c) perfil de velocidade v.....                     | 114 |
| Figura 6.22 Malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com (a) 900 elementos, (b) 1600 elementos e (c) 2500 elementos.....                                       | 115 |
| Figura 6.23 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para cavidade com $Re = 100$ . .....  | 119 |
| Figura 6.24 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com $Re = 100$ . .....   | 119 |
| Figura 6.25 Comparação entre o solver GMRES e os métodos ACM/GS e ACM/ILU para cavidade com $Re = 100$ para: (a) ciclo W e (b) ciclo F.....  | 120 |
| Figura 6.26 Malha original com 961 volumes de controle.....  | 128 |
| Figura 6.27 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 9 com (a) 240 volumes, (b) 63 volumes e (c) 16 volumes. ....  | 128 |
| Figura 6.28 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 10 com (a) 240 volumes, (b) 63 volumes e (c) 16 volumes. ....   | 129 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 6.29 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 3 com (a) 253 volumes, (b) 62 volumes e (c) 30 volumes. ....  | 129 |
| Figura 6.30 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 6 com (a) 253 volumes, (b) 62 volumes e (c) 30 volumes. ....  | 130 |
| Figura 6.31 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para a cavidade com $Re = 400$ . ....   | 132 |
| Figura 6.32 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com $Re = 400$ . ....  | 132 |
| Figura 6.33 Comparação entre o solver GMRES e os métodos ACM/GS ciclo W e ACM/ILU ciclo W para cavidade com $Re = 400$ . ....  | 133 |
| Figura 6.34 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com $Re = 1000$ . ....   | 140 |
| Figura 6.35 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 9 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 241 volumes, (b) 64 volumes e (c) 17 volumes. .... | 144 |
| Figura 6.36 Malhas não-cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com (a) 1028 elementos, (b) 2534 elementos e (c) 9982 elementos. ....                             | 148 |
| Figura 6.37 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para cavidade com $Re = 100$ (malhas não-cartesianas). ....   | 150 |
| Figura 6.38 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com $Re = 100$ (malhas não-cartesianas). ....  | 150 |
| Figura 6.39 Comparação entre o solver GMRES e os métodos ACM/GS ciclo W e ACM/ILU ciclo W para cavidade com $Re = 100$ (malhas não-cartesianas). ....                            | 151 |
| Figura 6.40 Malha original com 1089 volumes de controle. ....  | 156 |
| Figura 6.41 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 15 com (a) 336 volumes, (b) 124 volumes e (c) 43 volumes. ....  | 156 |
| Figura 6.42 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 com (a) 285 volumes, (b) 79 volumes e (c) 22 volumes. ....  | 157 |
| Figura 6.43 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para cavidade com $Re = 400$ (malhas não-cartesianas). ....   | 158 |
| Figura 6.44 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com $Re = 400$ (malhas não-cartesianas). ....  | 159 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 6.45 Comparação entre o solver GMRES e os métodos ACM/GS ciclo W e ACM/ILU ciclo W para cavidade com $Re = 400$ (malhas não-cartesianas). .....                            | 159 |
| Figura 6.46 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 10 com (a) 283 volumes, (b) 78 volumes e (c) 20 volumes. ....  | 164 |
| Figura 6.47 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com $Re = 1000$ (malhas não-cartesianas). ....  | 166 |
| Figura 6.48 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 296 volumes, (b) 83 volumes e (c) 23 volumes. ....  | 170 |
| Figura 6.49 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 11 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 275 volumes, (b) 73 volumes e (c) 20 volumes. .... | 170 |
| Figura 6.50 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 9 com (a) 281 volumes, (b) 75 volumes e (c) 21 volumes. ....   | 171 |
| Figura 6.51 Malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ para o problema da cavidade com tampa móvel com (a) 882 elementos, (b) 1568 elementos e (c) 2592 elementos. ....         | 174 |
| Figura 6.52 Malha original com 946 volumes de controle. ....  | 179 |
| Figura 6.53 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 com (a) 242 volumes, (b) 61 volumes e (c) 16 volumes. ....   | 179 |
| Figura 6.54 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 247 volumes, (b) 66 volumes e (c) 18 volumes. ....  | 187 |
| Figura 6.55 Vetores velocidade para escoamento entre placas paralelas com $Re = 50$ . ....  | 188 |
| Figura 6.56 Malhas cartesianas para o problema do escoamento entre placas paralelas com a) 1200 elementos, (b) 3072 elementos e (c) 10092 elementos. ....                         | 189 |
| Figura 6.57 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos de ACM/GS para o escoamento entre placas paralelas. ....   | 190 |
| Figura 6.58 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para o escoamento entre placas paralelas. ....  | 191 |
| Figura 6.59 Comparação entre o solver GMRES e os métodos ACM/GS e ACM/ILU ciclo W para o escoamento entre placas paralelas. ....  | 191 |
| Figura 6.60 Malha original com 1281 volumes de controle. ....   | 195 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 6.61 Malhas resultantes da utilização do esquema de aglomeração 3 com (a) 336 volumes, (b) 83 volumes e (c) 22 volumes.....     | 195 |
| Figura 6.62 Malhas resultantes da utilização do esquema de aglomeração 7 com (a) 320 volumes, (b) 84 volumes e (c) 21 com volumes..... | 196 |
| Figura A1.1 Fluxograma do processo iterativo do método de Decomposição LU. ....  | 211 |
| Figura A1.2 Fluxograma do processo iterativo do método Gauss-Seidel. ....  | 212 |
| Figura A1.3 Fluxograma do processo iterativo do método ILU.....  | 215 |
| Figura A2.1 Fluxograma que representa a geração do nível zero e a chamada à geração dos níveis grosseiros .....                        | 220 |
| Figura A2.2 Fluxograma explicativo do laço executado para a geração dos níveis grosseiros. ...<br>.....                                | 221 |

## LISTA DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 6.1 Número de iterações de GS (no método ACM/GS) para o problema isotrópico de condução de calor.....   | 91  |
| Tabela 6.2 Número de iterações de Gauss-Seidel (no método ACM/GS) e ILU (no método ACM/ILU) para o terceiro problema de condução de calor.....   | 99  |
| Tabela 6.3 Número de iterações de GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o quarto problema de condução de calor.....   | 106 |
| Tabela 6.4 Parâmetros do método ACM utilizados nos testes quanto ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para a cavidade com $Re = 100$ . ....  | 116 |
| Tabela 6.5 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração.....  | 117 |
| Tabela 6.6 Número de iterações de GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ .....   | 121 |
| Tabela 6.7 Parâmetro numérico correspondente ao tipo de esquema de aglomeração. ....   | 122 |
| Tabela 6.8 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ . ....  | 124 |
| Tabela 6.9 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ . ....   | 125 |
| Tabela 6.10 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....       | 125 |
| Tabela 6.11 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado..... | 127 |
| Tabela 6.12 Parâmetros do método ACM utilizados nos testes quanto ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para a cavidade com $Re = 400$ .....  | 130 |



|   |     |
|---|-----|
| Tabela 6.13 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com $Re = 400$ .....  | 131 |
| Tabela 6.14 Número de iterações de GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ .....   | 133 |
| Tabela 6.15 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ . ....  | 134 |
| Tabela 6.16 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ . ....   | 136 |
| Tabela 6.17 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....        | 136 |
| Tabela 6.18 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.....  | 137 |
| Tabela 6.19 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com $Re = 1000$ .....   | 139 |
| Tabela 6.20 Número de iterações de ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ .....   | 140 |
| Tabela 6.21 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ . ....   | 141 |
| Tabela 6.22 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ . ....  | 142 |
| Tabela 6.23 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.....        | 142 |
| Tabela 6.24 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado..... | 143 |
| Tabela 6.25 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com $Re=100$ (malhas não-cartesianas). ....                           | 149 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 6.26 Número de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ (malhas não-cartesianas). .....  | 151 |
| Tabela 6.27 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ . .....  | 152 |
| Tabela 6.28 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ (malhas não-cartesianas). .....  | 153 |
| Tabela 6.29 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. .... | 154 |
| Tabela 6.30 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas não-cartesianas). ....  | 155 |
| Tabela 6.31 Número de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ (malhas não-cartesianas). .....  | 160 |
| Tabela 6.32 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ . .....  | 161 |
| Tabela 6.33 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ (malhas não-cartesianas). .....  | 162 |
| Tabela 6.34 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. .... | 162 |
| Tabela 6.35 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas não-cartesianas). ....  | 163 |
| Tabela 6.36 Número de iterações de ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ (malhas não-cartesianas). .....  | 166 |
| Tabela 6.37 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ . .....   | 167 |
| Tabela 6.38 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ (malhas não-cartesianas). .....   | 168 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 6.39 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....                      | 168 |
| Tabela 6.40 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas não-cartesianas). ....                       | 169 |
| Tabela 6.41 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com $Re = 100$ (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). ....                 | 175 |
| Tabela 6.42 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ . ....   | 176 |
| Tabela 6.43 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). ....  | 177 |
| Tabela 6.44 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....                       | 178 |
| Tabela 6.45 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). .... | 179 |
| Tabela 6.46 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ . ....   | 180 |
| Tabela 6.47 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). ....  | 181 |
| Tabela 6.48 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....                       | 182 |
| Tabela 6.49 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). .... | 183 |
| Tabela 6.50 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ . ....  | 184 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 6.51 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). .....  | 185 |
| Tabela 6.52 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.....                         | 185 |
| Tabela 6.53 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$ ). ..... | 186 |
| Tabela 6.54 Parâmetros do método ACM utilizados para os testes quanto ao número de células utilizadas para realizar a aglomeração para o escoamento entre placas paralelas.....  | 189 |
| Tabela 6.55 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para o escoamento entre placas paralelas. ....   | 189 |
| Tabela 6.56 Número de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema do escoamento entre placas paralelas. ....  | 192 |
| Tabela 6.57 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62785 volumes para o problema do escoamento entre placas paralelas.....   | 192 |
| Tabela 6.58 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema do escoamento entre placas paralelas.....  | 193 |
| Tabela 6.59 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62785 volumes para o problema do escoamento entre placas paralelas, aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....                                | 194 |
| Tabela 6.60 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema do escoamento entre placas paralelas, aglomerando sempre que o sistema linear é modificado. ....                         | 195 |

## SIMBOLOGIA

### Letras latinas:

$a$  – coeficientes (da matriz do volume) que representam as variáveis nos pontos de integração nas equações de conservação

$\bar{a}_{ji}$  – conjugado complexo de  $a_{ij}$

$A_{fs}$  – coeficiente que conecta a célula pai com a célula filho

$A_{sn}$  – coeficiente que conecta a célula filho com a célula vizinho

$A_{gf}$  – coeficiente que conecta a célula avô com a célula pai

$A$  – matriz

$A$  – matriz de coeficientes das variáveis nos nós nas equações de conservação

$A$  – área

$A_{nb}$  – coeficiente dos volumes vizinhos

$A_p, A_p$  – coeficiente do volume central

$A_N, A_n$  – coeficiente do volume vizinho do norte

$A_S, A_s$  – coeficiente do volume vizinho do sul

$A_W, A_w$  – coeficiente do volume vizinho do oeste

$A_E, A_e$  – coeficiente do volume vizinho do leste

$A^T$  – matriz A transposta

$B$  – matriz

$B$  – vetor coluna do termo fonte

$b$  – termo fonte

$c$  – matriz de coeficientes das variáveis nos pontos de integração nas equações dos pontos de integração

$C$  – matriz de coeficientes das variáveis nodais nos pontos de integração

$C$  – capacitância

$c_p$  – calor específico

$d$  – vetor do lado direito nas equações dos pontos de integração

$da$  – diferencial de área

$d^F$  – domínio físico

$dn_j$  – diferencial do vetor normal

$d^T$  – domínio transformado

$dV$  – diferencial de volume

$e$  – erro

$E$  – matriz de coeficientes na forma final das equações de conservação

$f$  – termo fonte

$F$  – tipo de ciclo multigrid

$h$  – índice de espaçamento de malha

$I_h^{2h}$  – operador de restrição

$I_{2h}^h$  – operador de interpolação

$J$  – Jacobiano

$k$  – tempo atual

$K$  – condutância

$L$  – escala de comprimento da convecção

$l$  – parâmetro que diz qual malha está sendo utilizada

$M_p$  – massa do volume de controle

$\dot{m}$  – fluxo de massa

$n$  – número de pontos na malha

$N$  – funções de forma

$N$  – número de volumes de controle do domínio discretizado

$n_1, n_2$  – passos de suavização

$p, P$  – pressão no ponto de integração, no nó

$P$  – ponto na malha

$r$  – resíduo de cada volume

$R$  – resíduo total da malha

$Re$  – número de Reynolds

$s$  – termo fonte

$SVC$  – subvolume de controle

$SS$  – sub-superfícies de controle

$u, U$  – componentes cartesianas do vetor velocidade na direção  $x$  nos pontos de integração, nos nós

$u$  – solução real

$u_n$  – velocidade normal à face

$v, V$  – componentes cartesianas do vetor velocidade na direção  $y$  nos pontos de integração, nos nós

$v$  – solução aproximada

$V$  – tipo de ciclo multigrid

$W$  – tipo de ciclo multigrid

$x, y$  – coordenadas cartesianas no plano físico

$x_i, y_i$  – localização do ponto na direção  $x$  e na direção  $y$

$t$  – tempo

$T$  – temperatura

$tr$  – traço da matriz

### Letras gregas:

$\delta$  – vetor de correção para o método ILU

$\gamma$  – tipo de ciclo multigrid

$I^\phi$  – viscosidade dinâmica  $\mu$  na equação da conservação do movimento, a razão entre a condutividade térmica e o calor específico  $\kappa/c_p$  na equação da conservação da energia

$\Delta n$  – distância entre os nós da malha

$\Delta s$  – largura da face do volume de controle entre os nós da malha

$\Delta t$  – passo de tempo

$\Delta T$  – variação da temperatura

$\Delta x$  – espaçamento na direção  $x$

$\Delta y$  – espaçamento na direção  $y$

$\eta$  – plano computacional

$\kappa$  – condutividade térmica

$\lambda$  – autovalor

$\mu$  – viscosidade dinâmica

$\xi$  – plano computacional

$\rho$  – massa específica

$\rho(A)$  – raio espectral da matriz  $A$

$\tau$  – escala natural de tempo para transporte da informação entre dois nós

$\varphi$  – autofunções

$\phi, \Phi$  – escalar no ponto de integração, no nó

$\phi$  – solução

$\tilde{\phi}_i$  – solução corrigida

$\phi_{I,i}^*$  – correção do bloco I

$\Omega_h$  – domínio discreto com espaçamento  $h$

$\Omega_{2h}$  – domínio discreto com espaçamento  $2h$

### Subscrito

$i$  – direção coordenada, entrada de matriz

$I$  – bloco de células

$j$  – direção coordenada, entrada de matriz

$pi$  – pontos de integração

### Superescrito

$a$  – termo advectivo

$d$  – termo difusivo

$k$  – nível da iteração

$m$  – termo de fluxo de massa

$p$  – termo da pressão, equação da continuidade

$\phi$  – equação pra  $\phi$

$s$  – termo fonte

$u, v$  – equação da conservação da quantidade de movimento  $u, v$

$l$  – nível da iteração

### Acrônimos

*ACM* – Additive Correction Multigrid (Multigrid de Correções Aditivas)

*EbFVM* – Element based Finite Volume Method (Método de Volumes Finitos baseado em Elementos)

*FIELDS* – Finite Element Differential Scheme

*GMRES* – Generalized Minimum Residual

*GS* – Gauss-Seidel

*ILU* – Incomplete LU decomposition

*LU* – Lower and Upper triangular decomposition

*Suds* – Skew upstream difference scheme

*Suwds* – Skew upstream weighted difference scheme



## RESUMO

Este trabalho busca a criação de um *solver* robusto para a solução de problemas de escoamento e transferência de calor. Afim de alcançar este objetivo o método Multigrid de Correções Aditivas (ACM) é estudado e implementado e, novas feições são sugeridas e testadas. De forma geral, o método ACM é usado para melhorar a taxa de convergência de métodos iterativos usando várias malhas e reduzindo todos os modos de frequência de erro. Neste método a discretização é feita somente na malha fina, reduzindo assim, a complexidade e o custo computacional, bem como eliminando a possibilidade de inconsistência entre malhas. Além disso, o método ACM é bastante flexível, podendo ser aplicado a qualquer tipo de malha, estruturada ou não. Também não apresenta dificuldades no tratamento de problemas com coeficientes descontínuos, nem anisotrópicos, pois possibilita o uso da aglomeração adaptativa das células baseada nos coeficientes. A aglomeração adaptativa é um dos pontos mais importantes do trabalho, pois a forma como os volumes de controle são agrupados é um fator essencial para um melhor desempenho da técnica multigrid. Para exemplificar a robustez do método ACM, este foi testado em alguns problemas de condução de calor e de escoamento de fluidos cujas equações foram discretizadas usando o método de Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) em malhas não-estruturadas de quadriláteros. O EbFVM foi escolhido por unir as características desejadas dos métodos de Volumes Finitos, a discretização das equações através de balanços nos volumes de controle e conservação das propriedades no volume elementar, com as características desejadas dos métodos de Elementos Finitos, que são a utilização de um sistema de coordenadas locais e a independência entre os elementos. Outra questão a ser considerada é com relação ao procedimento para a solução do conjunto de equações. Optou-se pela utilização da forma acoplada, na qual todas as variáveis do problema aparecem implicitamente em todas as equações, tornando a solução mais estável e robusta em termos de convergência.

Assim, o método ACM com aglomeração adaptativa é aplicado a um sistema de equações composto pelas equações da conservação da quantidade de movimento linear nas direções  $x$  e  $y$  e pela equação de conservação da massa. Este sistema é resolvido de forma acoplada, sendo as equações discretizadas pelo método EbFVM de forma a permitir a utilização de malhas não-estruturadas.

## ABSTRACT

The Additive Correction Multigrid Method (ACM) is analysed and new features regarding the agglomeration scheme are implemented. In general, the ACM method is used to improve the convergence rate of iterative solvers, as in the classical multigrid methods. The advantage of this method is that discretization is made only in the fine grid, reducing the complexity and the computational costs, as well as eliminating the possibility of inconsistency between grids, when values of the functions are interpolated. Moreover, ACM method is flexible and can be applied to any type of grid, structured or not. Also it does not present difficulties in the treatment of problems with discontinuous or anisotropic coefficients, since it allows the use of coefficient-based adaptive agglomeration of the cells. The analysis of the adaptive agglomeration procedures is one of the important parts of this work. The way control volumes are grouped is an essential factor to achieve high performance of multigrid techniques. To show its robustness, the ACM method was tested in several heat conduction and fluid flow problems for several agglomeration schemes. The equations are discretized using the Element-based Finite Volume Method (EbFVM) with unstructured quadrilaterals grids. The EbFVM puts together the good characteristics of the Finite Volume method, that is the discretization of the equations using balances at control volumes preserving conservation at control volume level, with the good geometric characteristics of the Finite Element method, which uses a local coordinates system and allows the development of element-by-element algorithms. Another key question considered in this work was the coupled solution of the equations set in conjunction with the ACM method and several agglomeration schemes. The ACM method with adaptive agglomeration is applied to solve 2D diffusion and advection problems in 2D situations. The different agglomeration schemes are tested and compared, showing that the coefficient-based agglomeration is essential.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

A aplicação de métodos numéricos para a simulação computacional de problemas físicos tem apresentado um crescimento extraordinário nas duas últimas décadas. Isto se deve ao fato de as técnicas de análise empregadas estarem mais robustas e confiáveis e também ao aumento exponencial da capacidade de processamento dos computadores. Para exemplificar, nos últimos dez anos os grandes computadores foram substituídos pelas estações de trabalho e estas pelos modernos PCs, que hoje podem executar softwares antes possíveis apenas em supercomputadores (Maliska, 2004).

A maioria dos problemas de engenharia é descrita por uma ou mais equações diferenciais parciais e condições de contorno. Em geral é difícil obter a solução analítica do problema, quando, então, aplicam-se procedimentos numéricos como Diferenças Finitas, Volumes Finitos, Elementos Finitos e Volumes Finitos baseado em Elementos, entre outros, a fim de determinar uma solução aproximada.

Para resolver o sistema de equações algébricas resultantes pode-se empregar métodos diretos e/ou iterativos. No caso de métodos diretos, a solução é obtida através de um número determinado de operações, em geral com tempo de computação equivalente ao de inversão de uma matriz. Já nos métodos iterativos, a partir de uma estimativa inicial  $x^0$ , são realizadas iterações sucessivas até que se atinja a solução dentro de uma precisão especificada. Para sistemas de equações relativamente “pequenos” os métodos diretos podem ser usados. No entanto, na medida em que o número de equações cresce, os métodos iterativos tornam-se necessários, principalmente a fim de evitar o grande número de operações com zeros e também devido ao espaço que seria necessário para o armazenamento da matriz cheia no uso de um método direto. Isso acontece porque os métodos numéricos geram matrizes extremamente esparsas,

Uma das formas de aumentar o desempenho dos métodos iterativos é utilizar uma boa aproximação inicial. Assim, pode-se realizar algumas iterações em uma malha grossa e transferir o resultado, como uma boa estimativa inicial, para a malha original, fina. Como a malha grossa possui menos variáveis para calcular, o custo de uma iteração nesta é bem menor que na malha fina. Inicialmente este princípio foi desenvolvido para apenas duas malhas, sendo mais tarde generalizado para várias malhas. Esta foi a idéia básica que deu origem aos métodos multigrid.

Pode-se também observar, por meio da análise do comportamento dos *solvers*<sup>1</sup> numéricos que, especialmente no procedimento de solução de grandes malhas em problemas de mecânica de fluidos e transferência de calor, a taxa de convergência dos *solvers* iterativos é boa no início do processo, mas decai rapidamente e acaba estagnando. O rápido decréscimo do erro durante as primeiras iterações deve-se ao fato do *solver* eliminar eficientemente, na malha mais fina, as componentes de alta frequência do erro (aquelas com comprimento de onda da ordem do tamanho do espaçamento da malha) restando as de baixa frequência (com comprimento de onda de ordem maior que o tamanho do espaçamento da malha) as quais são difíceis de remover. Salienta-se que a definição do que são altas ou baixas frequências de erro está intimamente ligada ao grau de refino da malha utilizada.<sup>2</sup>

Assim, a idéia fundamental do método multigrid consiste em utilizar diferentes níveis de malhas. Partindo da malha original (fina) é aplicado um esquema de aglomeração para os volumes de controle que dá origem à primeira malha grossa. Sobre esta é novamente aplicado o esquema de aglomeração, dando origem à segunda malha grossa e assim sucessivamente até obterem-se todos os níveis de malha desejados.

Nas malhas grossas as componentes de baixa frequência do erro são também eliminadas pelo *solver* e, em cada malha grossa é gerada uma correção que, ao ser adicionada à malha do nível imediatamente superior (menos grossa), acelera a convergência nesta. Este procedimento de gerar correções e adicioná-las ao nível de malha superior é efetuado em todos os níveis até alcançar a malha inicial, onde a solução é desejada. Em resumo, usando-se malhas com espaçamentos diversos pode-se eliminar todo o espectro de frequência do erro com eficiência, aumentando consideravelmente a taxa de convergência do método.

A técnica multigrid foi passando por evoluções podendo ser aplicada também à malhas não-estruturadas, sendo esta última uma forte área de pesquisa da mecânica de fluidos e transferência de calor computacional nos últimos anos. O uso de malhas não-estruturadas apresenta duas grandes vantagens, que são a fácil discretização de geometrias complexas e a habilidade de se adaptar dinamicamente às características do problema físico.

A combinação de um método numérico que possibilite o uso de malhas não-estruturadas com a técnica multigrid para a aceleração da convergência dá origem a um poderoso *solver* numérico para a resolução de problemas de escoamento de fluidos e transferência de calor.

---

<sup>1</sup> O termo *solver* será utilizado no decorrer deste trabalho como sinônimo de método iterativo de solução do sistema de equações lineares.

<sup>2</sup> Este assunto será abordado com mais detalhes no capítulo dois.

## 1.1 Motivação

Recentemente, os métodos multigrid têm recebido considerável atenção por reduzirem drasticamente o tempo computacional para a solução de grandes sistemas de equações algébricas. A idéia básica da estratégia multigrid é o uso de uma seqüência de malhas juntamente com *solvers* iterativos a fim de reduzir todas as componentes de freqüência de erro presentes na obtenção da solução de um sistema linear. Na malha fina (original), os modos de alta freqüência de erro (com comprimento de onda da ordem do tamanho do espaçamento da malha) são efetivamente reduzidos, mas os de baixa freqüência são difíceis de remover, sendo necessárias várias malhas grossas para atingir este objetivo. Com um esforço computacional mínimo, os métodos multigrid conseguem eliminar todos os modos de freqüência de erro resolvendo as equações de correção nas malhas grossas e, somando essas correções à malha fina, onde a solução procurada é rapidamente obtida.

Essa grande aceleração da taxa de convergência proporcionada pelos métodos multigrid motiva a sua implementação e testes. Ainda, entre as diferentes técnicas de multigrid presentes na literatura busca-se um método que além de promover a redução do tempo computacional na resolução de problemas, possua a generalidade necessária para ser aplicado em diferentes tipos de problemas sem necessitar de grandes modificações e que possa ser mais facilmente implementado.

O método Multigrid de Correções Aditivas (*Additive Correction Multigrid*, de Hutchinson e Raithby, 1986), que será referenciado ao longo deste trabalho pelo seu acrônimo, ACM, surge como uma boa alternativa. No método ACM, a discretização do sistema de equações é efetuada somente na malha original, enquanto que as equações das malhas grossas são geradas através do uso das equações do nível de malha imediatamente superior (malha mais fina) e as soluções (correções) obtidas nas malhas grossas são simplesmente adicionadas à solução da malha mais fina. Assim, operadores de interpolação e restrição, comumente utilizados nos métodos multigrid clássicos, não são necessários, eliminando o problema de inconsistências entre malhas.

Outra vantagem do método ACM é o fato deste possibilitar o uso de aglomeração adaptativa de células. Este tipo de aglomeração é baseado nos coeficientes e leva em conta o efeito que a anisotropia destes causa na performance dos métodos numéricos (Elias, 1993; Elias, Stubble e Raithby, 1997, Maliska, 2004). Um alto grau de anisotropia dos coeficientes causa escalas de tempo de propagação da informação bastante diferentes, o que afeta drasticamente o comportamento da convergência. Assim, ACM adiciona as células com escalas de tempo de transporte de informação de valor semelhante, reduzindo ou eliminando a

grande variação entre as menores e as maiores escalas de tempo de transporte de informação nas células grossas<sup>3</sup>.

Para testar todas as potencialidades do método ACM é necessário um método robusto para a aproximação do sistema de equações. Para isso foi escolhido o método de Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM), o qual caracteriza-se por ser um método conservativo além de possibilitar o uso de malhas não-estruturadas discretizadas por elementos de diversos formatos (Maliska, 2004).

Outro fator a ser considerado é a forma como será resolvido o sistema linear: acoplado ou segregado. Foi escolhida a solução acoplada do sistema de equações, pois à medida que todas as variáveis de interesse são avançadas ao mesmo tempo, o problema de acoplamento entre as variáveis desaparece tornando o procedimento de solução mais estável e robusto em termos de convergência.

Em se tratando da utilização do EbFVM outra decisão a ser tomada diz respeito à função de interpolação utilizada para a aproximação das variáveis nos pontos de integração. Escolheu-se uma função de interpolação do tipo FIELDS (*Finite Element Differential Scheme*), a qual propõe que seja usada como função de interpolação uma aproximação algébrica da própria equação diferencial da variável de interesse.

Na verdade, procura-se uma função de interpolação que seja a solução analítica da equação diferencial parcial da variável a ser interpolada, mas como isto não é possível, a função de interpolação utilizada é a própria equação diferencial da variável de interesse discretizada, sendo introduzida na equação diferencial original para a aproximação das variáveis nos pontos de integração.

Assim, a motivação principal para a realização deste trabalho vem da necessidade da criação de um *solver* robusto para a solução de problemas de escoamento e transferência de calor. Um *solver* que contemple a representação de geometrias complexas através do uso de malhas não-estruturadas, que respeite a conservação das propriedades físicas do escoamento e que resolva problemas grandes e complexos de engenharia de forma rápida e estável. A união das metodologias acima descritas possibilita a criação deste *solver*.

A seguir é apresentada a revisão bibliográfica do método ACM.

---

<sup>3</sup> Maiores detalhes sobre a aglomeração adaptativa serão vistos no capítulo quatro.

## 1.2 Revisão bibliográfica

É feito, agora, um breve histórico dos métodos Multigrid, mais especificamente do método Multigrid de Correções Aditivas o qual é utilizado neste trabalho.

Brandt (1977) delimitou a filosofia e teoria dos métodos multigrid, mostrando sua eficiência. Esta teoria tem sido adaptada a várias situações dando origem a diferentes tipos de multigrid, mas cujos princípios fundamentais continuam os mesmos. Suas principais contribuições foram: a introdução do multigrid não linear *Full Approximation Storage* (FAS) onde se trabalha com aproximações completas da solução discreta na malha grossa, e não somente com o erro; técnicas de adaptatividade *Multi-Level Adaptive Techniques* (MLAT), cuja idéia básica é trabalhar com uma seqüência de malhas com crescente refinamento, cada qual interagindo uma com a outra; decomposição do erro obtido da solução aproximada de um conjunto de equações discretas em componentes de Fourier e análise de como os *solvers* iterativos suavizam os vários modos de erro e, ainda, discussão do método multigrid em malhas uniformes e não-uniformes.

Hutchinson e Raithby (1986) desenvolveram um novo método multigrid baseado no método de correções por bloco de Settari e Aziz (1973). No método Multigrid de Correções Aditivas as equações da malha grossa são obtidas sem o uso de operadores de restrição e interpolação fixos, ao invés disso é determinada uma correção constante para cada bloco de células da malha grossa forçando que o somatório dos resíduos seja zero após a correção ser aplicada. Este método apresenta muitas vantagens, podendo citar-se que ao gerar as equações das malhas grossas não necessita de considerações especiais para as condições de contorno, coeficientes anisotrópicos ou malhas irregulares.

Dando continuidade ao trabalho, Van Doormaal e Hutchinson (1986) avaliaram o desempenho de várias técnicas de aceleração da convergência, as quais reduzem o esforço computacional exigido para predizer o escoamento, acelerando a solução do conjunto de equações da pressão. Foi utilizado um método segregado tipo SIMPLE para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade e, foi mostrado que o método ACM e o método de correções por bloco apresentaram melhoramentos substanciais na performance do *solver* linear.

Em 1988, Hutchinson, Galpin e Raithby apresentaram outra aplicação do método ACM para acelerar a obtenção da solução acoplada do conjunto de equações de conservação da massa, da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$  e da energia, utilizando o método CELS (*Coupled Equation Line Solver*). Este consiste de um Gauss-Seidel por linha que atua na solução simultânea do conjunto de equações ao longo da linha, onde as variáveis situadas fora da linha considerada são mantidas fixas com seus valores mais recentes. Assim, o



domínio é varrido alternadamente nas direções  $x$  e  $y$  até a convergência ser alcançada. Um novo conjunto de coeficientes é formado e a seqüência de iterações é repetida. Aplicando a dois problemas-teste, escoamento na cavidade com tampa móvel e convecção natural em um cilindro anular, a combinação dos métodos ACM e CELS mostrou-se bastante eficiente.

Em 1992, Tzanos propôs uma metodologia para solucionar numericamente a equação de advecção-difusão para altos números de Reynolds. O problema foi escrito em termos de vorticidade e função corrente. Foi utilizado o método ACM com aglomeração de quatro volumes para cada novo bloco da malha grossa, e como *solver*, fatoração LU incompleta. Problemas com altos números de Reynolds que apresentam dificuldades em convergir utilizando GMRES, mostraram-se bem aproximados pelo esquema proposto por Tzanos.

Já em 1993, Elias, em sua dissertação, investigou o método ACM a fim de desenvolver um *solver* mais robusto. Mostrou certas fraquezas do método Multigrid de Correções Aditivas resultantes do fato deste não satisfazer a conservação escalar no interior das células da malha grossa e introduziu um perfil de correção linear para as equações nas malhas grossas. Este perfil, no entanto, não trouxe benefícios práticos, pois apesar de melhorar a predição do erro, o esforço exigido para resolver as equações acopladas usadas para gerar as correções causou o crescimento do esforço total (e aumento do tempo de CPU) para alcançar a solução do problema. Elias também desenvolveu um esquema de aglomeração adaptativa baseada nos coeficientes das células consideradas. À medida que as células são agrupadas de forma a diminuir a diferença entre as maiores e menores escalas de tempo de propagação de informação, o desempenho do método é melhorado e a solução pode ser alcançada mesmo em situações onde a aglomeração convencional falha.

Mais tarde, em um artigo, Elias, Stubble e Raithby (1997) apresentaram novamente a aglomeração adaptativa, explicando de que forma a natureza anisotrópica dos coeficientes das equações discretas afeta o comportamento da convergência e mostrando alguns resultados que comprovaram a eficiência do método.

Hwang (1995) desenvolveu um multigrid não-estruturado baseado nos princípios da estratégia da correção aditiva. As malhas grossas foram construídas por meio de uma lógica de aglomeração utilizando somente a informação da matriz inicial de coeficientes sem considerar nenhuma propriedade geométrica. A regra geral para efetuar a aglomeração consistia de

$$|c_{ij}| + |c_{ji}| > \varepsilon,$$

onde  $c_{ij}$  representa o elemento da matriz de coeficientes na linha  $i$  e na coluna  $j$  e  $\varepsilon$  é um número positivo que define o critério de agrupamento. O método foi testado em problemas de



condução e advecção-difusão obtendo uma efetiva aceleração da taxa de convergência, apresentando, porém, problemas para altos números de Reynolds.

Ainda em 1995, Heindel, Incropera e Ramadhyani apresentaram uma aplicação do método ACM a um problema de convecção natural a fim de acelerar a convergência do sistema de equações discretizadas em volumes de controle empregando o método SIMPLER para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Não foram apresentados detalhes da implementação do método ACM provavelmente por este não ser o foco principal do trabalho.

Em 1996, Raw apresentou em um artigo uma nova implementação do método ACM aplicado a um conjunto de equações discretas, acopladas e linearizadas, utilizando o método de volumes finitos em malhas estruturadas e não-estruturadas. O autor utilizou um esquema para obtenção das malhas grossas baseado nos coeficientes, bastante similar ao utilizado por Elias (1993). O *solver* linear escolhido foi o de fatoração incompleta (ILU) e o ciclo multigrid utilizado foi o ciclo W. Os problemas apresentados incluíam escoamentos incompressíveis, supersônicos, externos e internos, estacionários e rotacionais e reagentes e não-reagentes.

Nobile (1996) apresentou, em dois artigos, um procedimento numérico para simulação bidimensional de escoamentos com altos números de Reynolds em cavidades com tampa móvel, e altos números de Rayleigh em cavidades com convecção natural, estendendo assim a aplicabilidade do método ACM a este tipo de problema. O procedimento numérico utilizado consistiu na discretização do sistema de equações pelo método de volumes finitos e na solução acoplada do sistema pelo método CELS (*Coupled Equation Line Solver*) juntamente com o ACM. O método proposto mostrou-se bastante eficiente, obtendo bons resultados mesmo para problemas com valores de Reynolds e Rayleigh acima dos críticos.

Segayer (1996) apresentou em sua dissertação de mestrado uma comparação entre os métodos TDMA linha por linha, algoritmo de correção por blocos (Settari e Aziz, 1973) e ACM com diferentes níveis de malha, sendo proposta uma variação neste trabalho em relação ao método de Hutchinson e Raithby (1986). No método implementado por Segayer a correção obtida em um nível  $N$  qualquer foi usada sempre para corrigir a malha fina. As equações governantes foram discretizadas pelo método de volumes finitos com o arranjo desconstruído de variáveis na malha e, foi utilizado o método SIMPLEC para tratar o acoplamento pressão-velocidade. A aglomeração foi feita em blocos de tamanho fixo. Considerando três problemas teste: condução de calor em uma placa plana, escoamento em um degrau e convecção natural, o método ACM obteve os melhores resultados.

Ainda em 1996, Gjesdal fez uma comparação entre o método ACM para uma malha cartesiana com o multigrid tradicional centrado na célula utilizando o operador de Galerkin, os dois formando blocos de  $2 \times 2$  células. Neste caso os coeficientes obtidos pelos dois métodos

seriam iguais. Foi colocada a questão da taxa de convergência ser independente do tamanho da malha somente se a soma das ordens dos operadores de restrição e prolongamento fosse maior que a ordem do operador diferencial (McCormick et al., 1987). No caso de restrição e prolongamento constantes ambos seriam de ordem um. Isto implica que não haveria garantias que a taxa de convergência do método ACM para problemas de difusão dominante seria independente da malha. Foi apresentado um problema de advecção-difusão a fim de mostrar que a taxa de convergência decai para baixos valores do número de Peclet.

Em 1997, Marthur e Murthy mostraram um método utilizando volumes finitos tradicional para escoamentos incompressíveis. Foram utilizadas malhas não-estruturadas, adaptativas, compostas de poliedros. Foi desenvolvida uma formulação centrada na célula, de armazenamento colocalizado das propriedades físicas e utilizada uma estratégia de solução segregada, o método SIMPLE, para tratar o acoplamento pressão-velocidade. O método ACM foi usado para acelerar a obtenção da solução do sistema discreto de equações. O procedimento mostrou ter a mesma exatidão e robustez de esquemas típicos para malhas estruturadas.

Também em 1997, Teigland aplicou um método de aceleração variacional a problemas de petróleo, o qual o autor argumenta ser similar ao método ACM para malhas uniformes por utilizar operadores de restrição e prolongamento constantes. A aplicação deu-se em problemas de reservatório de petróleo que exigem refinamento de malha para o escoamento vizinho aos poços. Os resultados obtidos mostraram que o esquema de refinamento local foi eficaz quando altas resoluções são necessárias em algumas regiões do problema, tais como ao redor dos poços na simulação de reservatórios.

Zdravistsch, Fletcher e Behnia (1997) apresentaram um método de aceleração da convergência baseado no uso do método SIMPLEC em conjunto com o ACM. Neste método, as componentes de correção da velocidade da malha grossa, os quais são obtidas da equação da conservação da massa, foram incluídas nas equações da conservação da quantidade de movimento na malha fina, antes da formação das equações de correção para a conservação da quantidade de movimento nas malhas grossas. Assim foi obtido o acoplamento entre as equações do movimento e da conservação da massa na malha grossa, enquanto a estrutura segregada do algoritmo de uma só malha foi mantida. No caso de escoamentos turbulentos com transferência de calor, equações escalares adicionais foram resolvidas fora do laço das equações de conservação de movimento e da massa. Este método foi testado para escoamentos bi e tridimensionais, laminares e turbulentos, com transferência de calor obtendo uma significativa redução do tempo computacional.

Dentre as diversas aplicações do método ACM, pode-se citar o trabalho de Duic, Schneider e Bogdan (1996) que aplicaram o método à modelagem de fornalhas. O modelo matemático utilizado foi representado por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares. O sistema de equações algébricas foi resolvido aplicando-se o *solver* Gauss-Seidel por linhas (LGS) juntamente com o método ACM. Foram feitas comparações entre taxas de convergência para várias equações, vários níveis de malhas no método multigrid e para dois conjuntos de fatores que determinaram a quantidade de células no bloco em cada direção. Foi obtida uma grande melhoria na aceleração da taxa de convergência do LGS aplicando o método ACM na solução do modelo de fornalhas, especialmente para a equação da pressão.

Outra aplicação foi apresentada por Hu e Bogy (1997), quando o método Multigrid de Correções Aditivas foi aplicado a um problema de lubrificação de gás rarefeito. Os volumes de controle foram discretizados para a equação da lubrificação baseada em diversas formulações de advecção-difusão e, a aproximação foi feita incluindo diferenças centrais, upwind, power-law e esquemas exponenciais. Para acelerar a obtenção da solução do conjunto de equações discretas foi utilizado o método ACM com ciclo flexível. As comparações entre as taxas de convergência foram feitas numa só malha, e mais uma vez, a eficiência do método ACM foi comprovada.

Armenio (1997) tratou de problemas de superfície livre, transientes e com altos números de Reynolds. Foi proposto um método para a resolução das equações de Navier-Stokes em uma malha não-uniforme, cartesiana, com o arranjo desencontrado de variáveis e utilizando um esquema de diferenças finitas. O método ACM foi aplicado para resolver a equação de Poisson para a pressão. Em todos os casos examinados os resultados numéricos concordaram bem com os experimentos, tanto na predição da altura como na descrição dos modos da onda. O uso da técnica multigrid na equação da pressão permitiu a resolução de escoamentos a altos números de Reynolds com malhas finas.

Em 2002, Ham, Lien e Strong apresentaram um método com refino adaptativo e obtenção de malhas grossas baseado na anisotropia dos coeficientes para escoamentos incompressíveis. As células da malha cartesiana foram construídas de forma não-estruturada e as equações foram discretizadas pelo método de volumes finitos usando um arranjo colocalizado, centrado na célula para as velocidades e a pressão. Em cada passo de tempo, o campo de velocidades foi avançado primeiro, seguido pela solução da equação da pressão para forçar a satisfação da continuidade. A equação da pressão de Poisson foi resolvida utilizando o método ACM e a aglomeração das células foi efetuada levando-se em conta a anisotropia dos coeficientes, porém não foi permitido que as células grossas adquirissem um formato irregular, exigindo que em todos os níveis de malha, as células se mantivessem em

um formato cartesiano. Testes efetuados em problemas de cavidade com tampa móvel bi e tridimensionais e escoamento ao redor do cilindro bidimensional validaram o método, mostrando bons resultados.

Perez-Segarra et al. (2004) efetuou comparações entre diferentes esquemas numéricos para análise dos termos difusivos e advectivos da equação de advecção-difusão empregando a técnica de volumes finitos para a discretização da equação em malhas não-estruturadas tridimensionais. O conjunto de equações foi resolvido com o uso do método Multigrid de Correções Aditivas, efetuando as aglomerações por meio da escolha das variáveis que possuíam as conexões mais fortes entre elas. Como *solver* foi usado Gauss-Seidel nas malhas fina e grossas, exceto na malha mais grossa onde a decomposição LU foi utilizada. Como o foco do trabalho estava nos esquemas de interpolação dos termos advectivos e difusivos, não foram apresentados dados referentes ao desempenho do método ACM.

Cordazzo (2006) apresentou na sua tese a aplicação do método ACM a problemas de reservatórios de petróleo. As equações foram aproximadas pelo método EbFVM e o método ACM foi aplicado na solução dos sistemas de equações lineares. Foram efetuados testes em problemas homogêneos e heterogêneos e anisotrópicos com sistemas de uma e de duas equações. Nos casos testados, o método multigrid apresentou um ganho considerável em relação aos outros *solvers* usados para comparação, Gauss-Seidel e GMRES.

Na literatura estão também presentes diversos trabalhos baseados na técnica multigrid tradicional. Apesar da nossa linha de pesquisa ser o método ACM por razões já expostas e que serão ressaltadas no decorrer do trabalho, agora são citados alguns estudos dos métodos multigrid clássicos em malhas não-estruturadas, enfatizando os esquemas de aglomeração e assim, visando proporcionar uma visão mais ampla ao leitor sobre o assunto. Não pretende-se aqui esgotar a revisão bibliográfica deste tipo de método multigrid por estar fora do escopo deste trabalho. O trabalho de Chan e Wan (2000) é bastante interessante, pois nele foi apresentado um resumo geral de várias idéias utilizadas nos métodos multigrid tradicionais para construir operadores de interpolação, de suavização e para gerar os níveis grosseiros de malhas estruturadas e não-estruturadas. Destacando-se os procedimentos para malhas não-estruturadas, a técnica mais simples apresentada foi a de geração de malhas independentes onde um gerador de malhas gera tanto a malha fina como a seqüência de malhas grossas. No entanto esta técnica apresenta a desvantagem que a construção do operador de interpolação tem um alto custo computacional para identificar quais elementos da malha grossa correspondem aos da malha fina. Outro procedimento consiste em efetuar um tipo de aglomeração agrupando os elementos da malha fina de modo a formar blocos de elementos na malha grossa. Outra forma de obtenção das malhas grossas consiste em tratar a malha fina

como se esta tivesse vindo de um processo de refino e então recuperar a estrutura de refinamento. Ainda, é possível construir uma triangularização para um domínio computacional retangular por refino adaptativo fazendo com que a hierarquia de malhas grossas esteja presente na triangularização da malha fina.

Pode-se destacar, também, as técnicas de aglomeração que levam em conta a informação algébrica da matriz. Entre elas, a técnica de “semi-engrossamento” onde as células da malha grossa são selecionadas na direção do acoplamento forte para coeficientes anisotrópicos. O chamado Multigrid Algébrico (AMG), utilizado em diversos trabalhos por Ruge e Stüben (1999, 2001) e apresentado no livro de Trottenberg, Oosterlee e Schüller (2001), também leva em conta a informação algébrica da matriz uma vez que se baseia no procedimento de escolher quais os nós da malha fina serão considerados pertencentes à malha grossa (pontos C) e quais não serão (pontos F), baseando-se nas conexões fortes entre os coeficientes. Os pontos F devem ter conexão forte com um nó da malha grossa ou com um outro nó que tenha conexão forte com um nó da malha grossa. Todos estes aspectos dos métodos multigrid, entre outros, foram apresentados no artigo de Chan e Wan (2000) de forma sucinta levando a um breve resumo de várias metodologias aplicadas principalmente ao método de elementos finitos.

Mavriplis também possui diversos trabalhos utilizando a técnica multigrid para problemas de aerodinâmica, são aqui citados dois destes. Em 1986, Mavriplis apresentou um método desenvolvido para acelerar a convergência das equações de Euler em malhas triangulares não-estruturadas considerando a formulação de volumes finitos com dois esquemas de armazenamento de variáveis: centradas na célula e armazenadas nos vértices dos triângulos. As malhas foram construídas de forma independente, sem nenhuma relação entre elas, diminuindo sempre, em número de pontos, por um fator de  $1/4$  toda vez que uma malha grossa é gerada. Foram assumidos critérios que definiram áreas de intersecção entre células da malha fina e da malha grossa, para que as variáveis do escoamento e os resíduos, além das correções, pudessem ser transferidos de um nível de malha para outro. Os dois esquemas testados em problemas de aerofólios apresentaram taxas de convergência comparáveis com os obtidos por *solvers* de malhas estruturadas. Já em 1996, Venkatakrishnan e Mavriplis apresentaram um método multigrid com aglomeração usando operadores de interpolação linear para escoamentos transientes com malha móvel. Escoamentos viscosos e invíscidos foram resolvidos para aerofólios dando origem a um procedimento eficiente.

Wille (1996) apresentou um algoritmo multigrid baseado em um gerador de malhas não-estruturadas denominado Tri-Tree, o qual incluía refinamento local. A malha de elementos finitos formada por triângulos equiláteros e tetraedros foi subdividida em novos

triângulos equiláteros e tetraedros dando origem a todos os níveis de malha a serem utilizados, sendo usados operadores de interpolação linear para a transferência de informação entre as malhas. O método mostrou-se eficiente para os problemas testados.

Völker, Burton e Vanka também em 1996 apresentaram um multigrid geométrico para o cálculo de problemas de escoamento de convecção natural em geometrias complexas. Foi utilizado o método EbFVM, chamado no artigo de método de elementos finitos baseado em volumes de controle, para discretização das equações governantes. A obtenção dos vários níveis de malhas foi feita da seguinte forma: partindo-se da malha mais grossa, as sucessivas malhas são geradas dividindo cada elemento em quatro novos elementos. Assim foi obtido um número pré-especificado de malhas. O método mostrou-se bom, acelerando a convergência e concordando com resultados obtidos em outros trabalhos.

Francescatto e Dervieux (1998) apresentaram uma estratégia de “semi-engrossamento” para resolver a equação de Poisson em malhas não-estruturadas, definindo uma espécie de direção preferencial de aglomeração baseada na conexão forte entre as células para coeficientes anisotrópicos. Testes foram aplicados em problemas de escoamentos em aerofólios sendo concluído que melhoramentos ainda seriam necessários neste método.

Jameson (2001) mostrou vários aspectos do uso da mecânica dos fluidos computacional no ramo de projeto de aviões, desde a modelagem matemática, esquemas de aproximação das equações governantes, uso de malhas estruturadas e não-estruturadas, esquemas de métodos multigrid e otimizações aerodinâmicas. Os esquemas citados para a formação das malhas grossas nos métodos multigrid foram a geração de malhas independentes ou através de um procedimento de aglomeração geométrico, usando operadores de interpolação para transferência de informação entre malhas. Estes esquemas mostraram ser eficientes para problemas em regime permanente e transiente.

Assim buscou-se nesta revisão dar uma idéia geral das linhas de pesquisa dos métodos multigrid, mais especificamente do método Multigrid de Correções Aditivas (ACM), o qual é utilizado neste trabalho.

### 1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é a implementação de um método multigrid robusto para acelerar os *solvers* iterativos na solução de sistemas lineares oriundos do uso de métodos numéricos em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor. Para isso foi utilizado o método de Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) por ser um esquema de aproximação extremamente flexível que pode utilizar malhas não-estruturadas formadas por



elementos. Estes elementos dão origem a volumes de controle através do método das medianas, sendo que as equações integradas nas faces dos volumes de controle são avaliadas nos pontos de integração. Também foi utilizada a solução acoplada por ser mais estável à medida que avança todas as variáveis de interesse ao mesmo tempo.

O método FIELDS foi escolhido para aproximar as variáveis armazenadas nos pontos de integração. Esta aproximação é feita por meio das próprias equações da quantidade de movimento linear, fazendo com que os efeitos da física do escoamento sejam incorporados na aproximação dos termos advectivos.

Para acelerar a convergência do sistema de equações algébricas foi utilizado o método Multigrid de Correções Aditivas (ACM), o qual também leva em conta a física do escoamento, pois as equações das malhas grossas são obtidas através da soma das equações da malha fina exigindo que a solução corrigida tenha resíduo zero a fim de satisfazer a conservação da massa sobre cada bloco das malhas grossas.

Para tornar o método ACM mais robusto, foi implementada a aglomeração adaptativa das células baseada nos coeficientes, a qual leva em conta o efeito que a anisotropia destes causa na performance dos métodos numéricos (Elias, 1993; Elias, Stubble e Raithby, 1997). Um alto grau de anisotropia dos coeficientes causa escalas de tempo de propagação da informação bastante diferentes, o que afeta drasticamente o comportamento da convergência. Assim, adicionando células com escalas de tempo de transporte de informação com valor semelhante, elimina-se ou, pelo menos, reduz-se a grande variação entre as menores e as maiores escalas de tempo de transporte de informação nas células grossas, fazendo com que a correção calculada através do método ACM nas malhas grossas seja mais adequada quando somada as células das malhas dos níveis superiores (mais finas).

Cabe ainda ressaltar, que em um sistema acoplado, todas as variáveis aparecem de forma implícita em todas as equações, dando origem a uma matriz global formada por matrizes com  $3 \times 3$  coeficientes (considerando um problema bidimensional com as variáveis das velocidades  $u$  e  $v$  e da pressão  $p$ ), sendo que cada uma dessas pequenas matrizes representa um volume de controle na matriz global. Assim, foram efetuados testes buscando definir quais coeficientes ou qual esquema utilizando os coeficientes da matriz do volume de controle seriam mais propícios para efetuar-se a aglomeração. Segundo Raw (1996), o coeficiente que representa bem o sistema acoplado de equações e portanto o mais adequado para se efetuar a aglomeração é o coeficiente da variável pressão na equação de conservação da massa. Além da contribuição global de implantar e estudar uma metodologia numérica com malhas não estruturadas, com solução acoplada e solução dos sistemas lineares através

de *solvers* iterativos acelerados por um método multigrid, ao longo das tarefas de implementação diversas conclusões são esperadas.

Uma delas diz respeito à análise de quinze possíveis esquemas de aglomeração. Os esquemas de aglomeração se revestem de importância pois, ao mesmo tempo em que criam malhas mais adequadas para os *solvers* iterativos, eles introduzem um esforço computacional não desprezível. Além disso são feitos estudos acerca dos parâmetros necessários para o bom funcionamento do método ACM como: tipos de ciclos multigrid e suas eficiências; *solvers* que fornecem os melhores resultados quando utilizados como *solver* interno do método multigrid e número de volumes de controle que devem ser usados no processo de aglomeração para gerar um volume de controle da malha grossa. Outros fatores não menos importantes também testados são o número de iterações do *solver* interno, quantos volumes de controle deve ter a malha mais grossa para a aplicação do *solver* direto e quando efetuar a aglomeração: somente no início do processo ou a cada vez que a matriz de coeficientes é atualizada (no caso de problemas não lineares). Os resultados obtidos permitem opinar sobre a escolha de parâmetros e condições para uso do método Multigrid de Correções Aditivas.

#### 1.4 Estrutura do trabalho

O trabalho, a seguir apresentado, divide-se em sete capítulos. O primeiro, a Introdução, já delineou um breve histórico de trabalhos utilizando o método Multigrid de Correções Aditivas, além de algumas informações gerais sobre outras linhas de pesquisa dos métodos Multigrid Clássicos e de apresentar os motivos que nos levaram a escolher este método como tema de estudo e os objetivos pretendidos com a sua implementação.

No capítulo dois são apresentados aspectos dos métodos Multigrid em geral, com algumas considerações a respeito dos tipos de malhas utilizadas. Também são apresentadas certas feições dos métodos Multigrid clássicos, como os operadores de restrição e prolongamento utilizados, para que o leitor melhor se situe dentro deste tipo de técnica de aceleração da convergência.

Já o capítulo três descreve o método Multigrid de Correções Aditivas sendo apresentada a sua dedução em detalhes para um problema estruturado e, também, sua extensão para malhas não-estruturadas. São apresentados os *solvers* internos utilizados no método ACM.

Dando continuidade a apresentação do método ACM, no capítulo quatro é mostrado em detalhes o esquema de aglomeração utilizado: as regras de aglomeração e os possíveis



coeficientes a serem escolhidos para os problemas acoplados, podendo-se ter uma idéia bastante clara de como foi implementado o método.

No capítulo cinco é delineado o método de Volumes Finitos baseado em Elementos, mostrando detalhes da transformação de um domínio físico para o computacional, da construção dos volumes de controle e da aproximação das equações governantes. Também é descrito o método FIELDS (*Finite Element Differential Scheme*) e apresentados dois tipos de tratamentos possíveis para o termo advectivo das equações da conservação da quantidade de movimento linear nas direções  $x$  e  $y$ , o qual é o termo mais complexo a ser aproximado. Por fim são feitas algumas considerações a respeito do sistema linear resultante.

No capítulo seis são mostrados os resultados obtidos. São apresentados quatro problemas de condução de calor, um isotrópico e três anisotrópicos sendo as equações discretizadas pelos métodos de Volumes Finitos (primeiro e segundo problemas) e pelo método Volumes Finitos baseado em Elementos (terceiro e quarto problemas). Dando continuidade aos testes são considerados problemas de escoamentos. A cavidade com tampa móvel é o exemplo escolhido para a validação do método EbFVM com a função de interpolação FIELDS e as duas formas diferentes de tratamento do termo advectivo. Feito isso o método ACM é aplicado a este problema buscando a obtenção da melhor configuração para os seus parâmetros. Para o problema da cavidade com tampa móvel são consideradas malhas cartesianas, não-cartesianas e cartesianas com razão de aspecto dois para os números de Reynolds da tampa 100, 400 e 1000. Também são efetuados testes aplicados ao problema de escoamento entre placas paralelas.

Finalmente, no capítulo sete, são apresentadas as conclusões finais a respeito do método ACM, as principais contribuições resultantes desse trabalho e sugestões para trabalhos futuros. E, no final, é listada a bibliografia utilizada.

## CAPÍTULO 2

### TEORIA GERAL DOS MÉTODOS MULTIGRID

Neste capítulo serão descritas as características principais dos métodos multigrid e suas vinculações com o método que irá ser utilizado neste trabalho. Não se pretende apresentar aqui a teoria dos métodos multigrid com o rigorismo matemático que é necessário. Apenas procura-se comentar os aspectos principais necessários para o entendimento do método multigrid algébrico empregado. As situações onde se exigem métodos de solução de sistemas lineares (*solvers*) eficientes são, em geral, em processos iterativos de solução, normalmente originados de métodos numéricos, que requerem uma estimativa inicial da solução até atingir a solução aproximada dentro de um determinado nível de convergência. Durante o processo obtém-se, em cada nível iterativo, uma solução aproximada do problema. A diferença entre a solução naquele nível iterativo e a solução exata do problema é denominada aqui de erro. O objetivo é reduzir este erro a um nível mínimo, de acordo com as especificações do problema. Reduzir este erro, que pode ser decomposto em diversos harmônicos (modos) através de uma série de Fourier, é a tarefa do *solver*. Os diversos modos deste erro podem ser associados a um espectro de frequência, cujo comprimento de onda é da ordem do tamanho da malha. Para resolver o sistema linear de forma eficiente é preciso reduzir, também com eficiência, todas as componentes do erro. Como os métodos iterativos reduzem com eficiência apenas as componentes (modos) do erro cuja frequência corresponde ao tamanho da malha em uso, se apenas uma malha for empregada, é natural esperar-se que a redução de todas as componentes do erro, que é o que se deseja, seja ineficiente.

Por isso, a estratégia dos métodos multigrid é usar uma seqüência de malhas juntamente com *solvers* iterativos buscando reduzir todas as componentes de frequência de erro. Na malha original (fina) os modos de mais alta frequência do erro são facilmente eliminados pelo *solver* linear, enquanto os modos de baixa frequência são difíceis de remover. O fato desses modos de baixa frequência de erro serem eliminados lentamente causa a estagnação da taxa de convergência. Assim, utilizando-se uma malha grossa, o modo correspondente a esta nova malha pode ser também eliminado. Procedendo-se desta forma, todos os modos de erro podem ser facilmente eliminados pelo *solver* iterativo.

Desta forma, os métodos multigrid podem ser vistos como aceleradores de convergência dos *solvers* de sistemas lineares, sendo intimamente ligados à natureza da

malha. Eles não são por si só, métodos de solução de sistemas lineares, como muitas vezes são considerados.

Para exemplificar a íntima ligação do tamanho da malha com a taxa de convergência do *solver* iterativo analisa-se o exemplo da condução unidimensional em regime permanente  $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ , com condições de contorno  $T = 0$  em  $x = 0$  e  $x = 1$  e com uma estimativa inicial oscilatória do tipo  $T(x) = \text{sen}(\pi x) \pm 0.1$ , onde  $x$  representa os nós da malha. Observe que este erro foi construído para se ter sempre um modo de frequência mais baixo, com comprimento de onda da ordem do tamanho do domínio ( $\text{sen}(\pi x)$ ) e, um modo de frequência mais alta, sempre com comprimento de onda da ordem do tamanho da malha empregada. É utilizado o *solver* iterativo ponto a ponto, Gauss-Seidel, para a solução do sistema linear. Neste caso, logicamente, a solução exata é conhecida,  $T = 0$  e, portanto, o erro é conhecido. Pode-se notar na Fig. 2.1 que para uma malha de trinta e um volumes, o modo de frequência correspondente a este tamanho de malha desaparece em poucas iterações, enquanto o de frequência mais baixa, cujo comprimento de onda é da ordem do tamanho do domínio, diminui lentamente. Como a malha é relativamente fina, o processo de obtenção de solução é demorado. Tomando-se uma malha mais grossa, de sete volumes, tem-se novamente o erro decomposto em um modo cujo comprimento de onda é equivalente ao tamanho do domínio e outro, de mais alta frequência, correspondente ao tamanho da malha de sete volumes. Este último, novamente desaparecerá rapidamente, enquanto que o modo de mais baixa frequência reduz-se com mais dificuldade (mas com mais facilidade do que quando a malha era de trinta e um volumes). Recapitulando, os *solvers* iterativos são eficientes na redução dos erros que possuem comprimento de onda equivalente ao tamanho da malha. Como em um problema real o erro terá um espectro complexo de modos, será necessário utilizar malhas de diversos tamanhos para poder reduzi-los com eficiência.

Assim, uma estratégia que combine o uso de várias malhas consegue eliminar facilmente todos os modos de frequência de erro e chegar rapidamente à solução do problema considerado. Este é o princípio fundamental em que se baseiam os métodos multigrid, os quais ainda podem ser divididos em dois grandes grupos: os geométricos e os algébricos.

Aqui é apropriado comentar sobre um ponto importante, muitas vezes negligenciado pela maioria dos métodos multigrid disponíveis na literatura. Um *solver* iterativo progride (converge) com mais facilidade na direção dos coeficientes de maior influência. Isto é perfeitamente lógico, já que os coeficientes de uma matriz representam a “força” da conectividade entre os pontos discretos do domínio de solução. Coeficientes de baixa magnitude em uma direção comparados com os coeficientes de outra direção (estas direções

só existem em malhas estruturadas) fazem cair a taxa de convergência dos métodos iterativos, pois não é eficiente iterar na direção dos baixos coeficientes. Logo, o desejável é ter matrizes com coeficientes isotrópicos, o que requer que as malhas mais grossas sejam construídas com base nos coeficientes e não na geometria apenas. Este assunto será visto em maior detalhe nos próximos capítulos.

Os métodos multigrid geométricos baseiam-se somente na geometria do problema para efetuar a construção das malhas mais grossas, dos operadores de restrição e interpolação, que fazem a transferência das variáveis da malha fina para a grossa, e da grossa para a fina, respectivamente, e da matriz de coeficientes da malha grossa. Como não levam em consideração as características do fenômeno físico envolvido e constroem as malhas grossas em um formato pré-definido de acordo com a geometria, esses métodos multigrid podem, em certos casos, não ser tão eficazes.

Já nos métodos multigrid algébricos os operadores são construídos considerando somente os coeficientes do sistema de equações. As malhas grossas são obtidas através de procedimentos que levam em conta a magnitude dos coeficientes a fim de aglomerar as células (volumes de controle) que possuem coeficientes com valores semelhantes. Assim, a correção calculada em um bloco (célula) da malha grossa é mais adequada para todas as células da malha fina que estão contidas neste bloco.

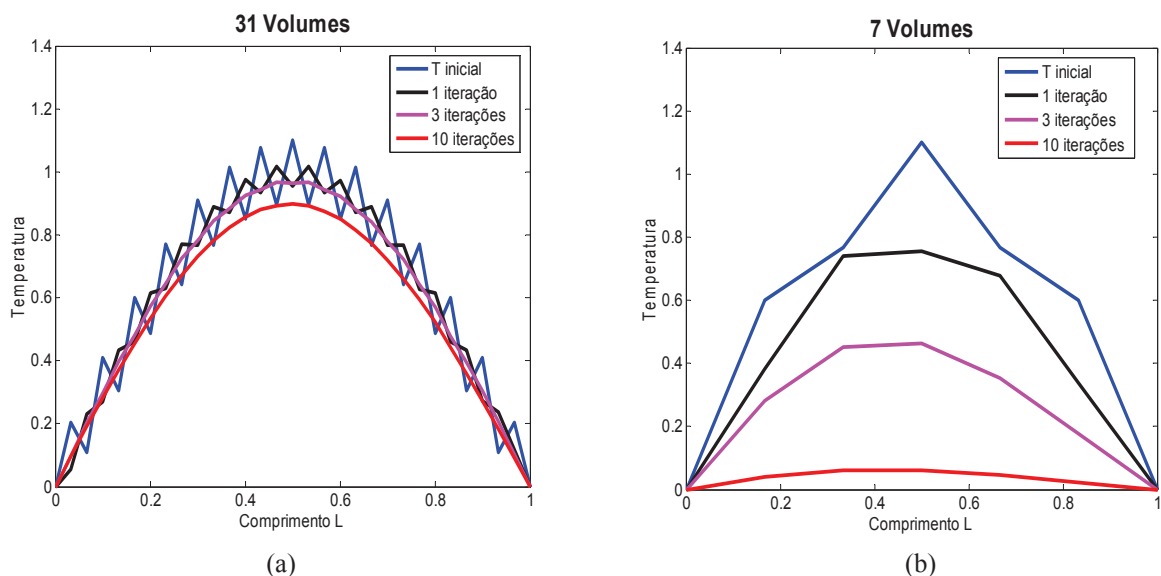


Figura 2.1 Comportamento do *solver* na redução dos modos de frequência de erro para malhas de (a) trinta e um volumes e (b) sete volumes.

A seguir discutem-se elementos importantes na construção de algoritmos multigrid baseados na teoria disponível para métodos multigrid gerais e cujas conclusões são possíveis de estender aos métodos multigrid algébricos.

## 2.1 Malhas

Define-se malha como o conjunto de pontos discretos que representam um domínio onde as variáveis a serem calculadas são armazenadas. Este domínio pode ser dividido em pontos (no método de Diferenças Finitas), elementos (no método de Elementos Finitos) e volumes (no método de Volumes Finitos). Ainda, o domínio pode ser dividido em elementos, os quais dão origem aos volumes de controle, onde são realizados os balanços das propriedades físicas no método de Volumes Finitos baseado em Elementos que é o método utilizado neste trabalho e que será explicado em mais detalhes no capítulo cinco.

As malhas podem ser divididas em dois grandes grupos: estruturadas e não-estruturadas. As malhas estruturadas são obtidas através de um processo de discretização que segue uma ordenação através de coordenadas globais. Os volumes de controle (no caso do método de Volumes Finitos) ou os pontos (no caso de Diferenças Finitas) da malha possuem uma lei de construção e aparecem numerados de maneira seqüencial, sendo que os volumes (ou pontos) internos possuem sempre o mesmo número de vizinhos.

Se a malha, mesmo estruturada, for numerada aleatoriamente pode dar origem a uma matriz de coeficientes similar às matrizes obtidas no caso de problemas aproximados em malhas não-estruturadas. No entanto, isso não é usual, pois a principal vantagem das malhas estruturadas é a fácil ordenação dos volumes (ou pontos) que facilita a implementação de *solvers* iterativos.

Já as malhas não-estruturadas são utilizadas nos métodos de Elementos Finitos e Volumes Finitos baseado em Elementos. Este tipo de malha é aproximado por meio de elementos de diferentes formatos e tamanhos, sem qualquer tipo de ordenação. No método de Volumes Finitos baseado em Elementos, os elementos dão origem a volumes de controle também de diversos formatos e tamanhos e sem ordenação impossibilitando o uso de alguns *solvers*. A principal vantagem do uso da discretização por elementos e conseqüentemente do uso de malhas não-estruturadas é sua flexibilidade para discretizar geometrias irregulares.

Para malhas não-estruturadas, os métodos multigrid geométricos apresentam certas complicações, como, por exemplo, partindo da malha fina, definir a seqüência de malhas grossas adequadas e os operadores que farão transferência de informações entre as malhas. Estes problemas não ocorrem se for usado um método multigrid algébrico, pois as malhas grossas, bem como os operadores de transferência entre malhas, são obtidos através de regras de aglomeração baseadas nos coeficientes das equações discretizadas, sem necessitar das informações geométricas do problema.

No contexto do método multigrid tradicional visto a seguir, serão consideradas aproximações nos pontos discretos obtidas por meio do método de diferenças finitas e será efetuado um estudo a respeito dos modos de erro, suas autofunções discretas e os operadores imprescindíveis para o bom funcionamento do método multigrid tradicional. Considerar-se-á somente malhas estruturadas a fim de estudar os operadores de interpolação e restrição tradicionais.

## 2.2 Multigrid tradicional

Considerando inicialmente o sistema de equações lineares

$$Au = f, \quad (2.1)$$

onde  $A$  é a matriz de coeficientes,  $u$  a solução exata do sistema e  $f$  o termo independente.

O erro da solução desse sistema é a diferença entre a solução exata  $u$  e a solução aproximada  $v$

$$e = u - v. \quad (2.2)$$

Sendo o erro  $e$  um vetor, sua magnitude pode ser medida aplicando-se a norma infinita

$$\|e\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |e_j|, \quad (2.3)$$

ou a norma euclidiana

$$\|e\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n e_j^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

O resíduo é definido da seguinte forma

$$r = f - Av. \quad (2.5)$$

O resíduo também é um vetor e o seu tamanho pode ser medido pelos mesmos tipos de normas utilizadas para medir o erro. Pela unicidade de solução,  $r = 0$  se e somente se  $e = 0$ .

Assim, partindo da eq. (2.1) e das definições do erro  $e$ , (Eq. (2.2)) e do resíduo  $r$ , (Eq. (2.5)), obtém-se a equação do resíduo

$$Ae = r. \quad (2.6)$$

A Eq. (2.6) é de extrema importância para os métodos multigrid, pois é utilizada para calcular-se o erro nas malhas grossas.

Retomando a Eq. (2.2) pode-se ver que

$$u = v + e. \quad (2.7)$$

Assim, a solução exata nada mais é que a soma de uma solução aproximada com o erro desta aproximação. À medida que o erro calculado na malha grossa é transferido para a malha imediatamente superior, mais fina, e somado à solução aproximada do sistema linear nesta malha, obtém-se uma solução corrigida (mais próxima da solução exata), acelerando a convergência do método numérico.

Utilizando um exemplo clássico para a análise das componentes de erro, considera-se, agora, a equação de Poisson aproximada em diferenças finitas centrais, considerando uma iteração de Gauss-Seidel

$$v_h^{k+1}(x, y) = \frac{1}{4} \left[ h^2 f_h(x, y) + v_h^{k+1}(x-h, y) + v_h^k(x+h, y) + v_h^{k+1}(x, y-h) + v_h^k(x, y+h) \right] \quad (2.8)$$

onde  $v_h$  e  $v_h^{k+1}$  são aproximações da solução exata na iteração anterior e na atual, respectivamente.

Define-se como condição de contorno (em  $x = 0$  e  $x = n$  e em  $y = 0$  e  $y = n$ )

$$v_h(x, y) = f_2(x, y), \quad (2.9)$$

e, utiliza-se uma malha com espaçamento  $h = \frac{1}{n}$ , onde  $n$  é o número de pontos da malha.

Resolvendo as Eqs. (2.8) e (2.9) com o método Gauss-Seidel clássico, após poucas iterações, o erro da solução torna-se suave, ou seja, os modos de mais alta frequência de erro são reduzidos, restando os de baixa frequência que não sofrem alterações.

Aproximando o erro através de uma expansão em série de Fourier pode-se entender melhor este comportamento, já mostrado através do exemplo unidimensional no início deste capítulo. Assim

$$e_h(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n-1} \alpha_{k,l} \text{sen}(k\pi x) \text{sen}(l\pi y) \quad (2.10)$$

onde aparecem as seguintes autofunções discretas

$$\varphi_h^{k,l}(x, y) = \text{sen}(k\pi x) \text{sen}(l\pi y) \quad \text{com } k, l = 1, \dots, n-1. \quad (2.11)$$

Este erro torna-se suave após algumas iterações, o que significa que as componentes de alta frequência de  $\alpha_{k,l} \text{sen}(k\pi x) \text{sen}(l\pi y)$  com  $k$  e  $l$  grandes são reduzidas após poucas iterações enquanto as componentes de baixa frequência de  $\alpha_{k,l} \text{sen}(k\pi x) \text{sen}(l\pi y)$  com  $k$  e  $l$  pequenos não sofrem modificações. Essa distinção entre altas e baixas frequências é bastante importante no contexto do multigrid.

Para a definição de altas e baixas frequências, retorna-se às autofunções  $\varphi^{k,l}$ . Considerando quatro autofunções

$$\varphi^{k,l}, \varphi^{n-k,n-l}, \varphi^{n-k,l}, \varphi^{k,n-l}, \quad (2.12)$$

e uma malha grossa com espaçamento  $H = 2h$ , observa-se que as autofunções coincidem na malha grossa, ou seja, na malha grossa  $2h$  estas quatro autofunções não são distintas (por exemplo, para  $k$  ou  $l = n/2$ ,  $\varphi^{k,l}$  desaparece).

Então, para  $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $\varphi^{k,l}$  é denotado como uma componente de:

- Baixa frequência se  $\max(k,l) < n/2$ ,
- Alta frequência se  $n/2 \leq \max(k,l) < n$ .

Assim, somente as baixas frequências são visíveis na malha grossa  $2h$ , pois todas as altas frequências coincidem com uma baixa em  $2h$ .



Decompondo as freqüências em altas e baixas para a representação de  $e_h(x, y)$  em somas parciais

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} = \sum_{k,l=1}^{altas} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} + \sum_{k,l=1}^{baixas} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l}, \quad (2.13)$$

onde

$$\sum_{k,l=1}^{baixas} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} = \sum_{k,l=1}^{n/2-1} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} \quad (2.14.1)$$

e

$$\sum_{k,l=1}^{altas} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l} = \sum_{k,l=n/2 \leq \max(k,l)}^{n-1} \alpha_{k,l} \varphi^{k,l}. \quad (2.14.2)$$

Pode-se ver que os termos de altas e baixas freqüências estão relacionados à malha considerada. Por exemplo, tomando uma malha grossa com espaçamento  $H = 4h$ , conclui-se que  $\varphi^{k,l}$  é um componente de:

- Baixa freqüência se  $\max(k,l) < n/4$ ,
- Alta freqüência se  $n/4 \leq \max(k,l) < n$ .

De posse dessas informações os princípios básicos do multigrid podem ser enunciados:

i) Princípio da suavização: métodos iterativos clássicos (Gauss-Seidel, Jacobi) possuem um forte efeito de suavização do erro de qualquer aproximação (eliminação dos modos de alta freqüência de erro). Suas propriedades de suavização são dependentes da escolha correta de parâmetros de relaxação e ordenamento dos pontos na malha.

ii) Princípio da malha grossa: o erro suavizado é bem aproximado em uma malha grossa, pois os modos de baixa freqüência de erro da malha fina, tornam-se modos de alta freqüência na malha grossa e podem ser reduzidos, sem ocasionar perda de informação. Além disso, o procedimento executado em uma malha grossa é computacionalmente muito mais barato que em uma malha fina.

### 2.2.1 Seqüência de malhas

Assumindo que  $h = \frac{1}{n}$  e  $n$  é potência de 2 ( $n = 2^p$ , onde  $p$  é um número inteiro) obtém-se a seqüência de malhas  $h, 2h, 4h, \dots, Nh$ , sempre dobrando o tamanho da malha, como pode ser visto na Fig. 2.2. Esta seqüência termina na malha mais grossa.

Como já discutido, a utilização de um *solver* iterativo na malha original  $h$  acarreta na redução e eliminação das componentes de alta freqüência de erro nesta malha, só restando as componentes de baixa freqüência, as quais são visíveis e podem ser aproximadas na malha  $2h$ . Assim, pode-se utilizar uma seqüência de malhas grossas, nas quais o erro é eliminado por um *solver* iterativo, a fim de reduzir-se todas as freqüências de erro. Na malha mais grossa, onde o sistema linear já não deve ser muito grande (a malha deve estar suficientemente grossa) é aconselhável iterar até a convergência completa ou resolver por meio de um método direto. Após este procedimento efetua-se a subida dos níveis, um a um, até atingir a malha mais fina, corrigindo, a cada nível, a solução aproximada.

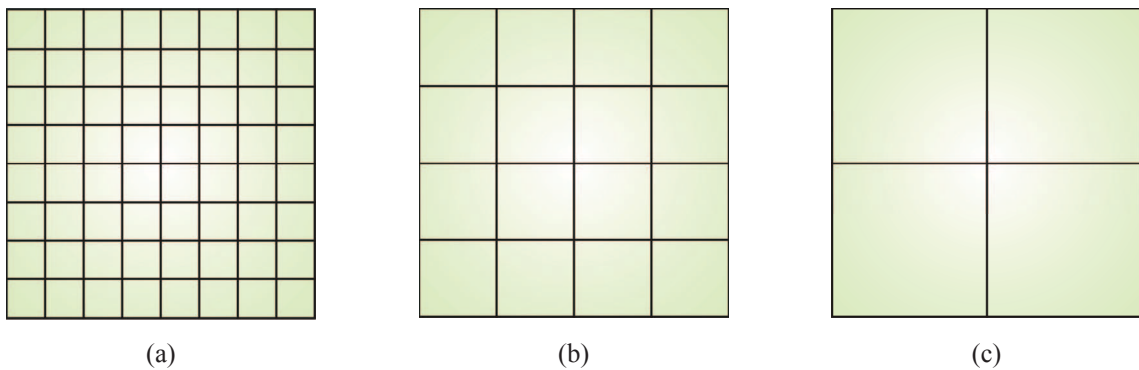


Figura 2.2 Seqüência de malhas com  $h = \frac{1}{8}$ , (a) malha  $h$ , (b) malha  $2h$  e (c) malha  $4h$ .

### 2.2.2 Estrutura de um operador de duas malhas

Agora, são descritos os passos para a implementação de um algoritmo para o multigrid de duas malhas:

1. Relaxar  $n$ -vezes  $A_h u_h = f_h$  com uma estimativa inicial  $v_h$  para suavizar o erro.
2. Calcular o resíduo na malha fina  $h$ :  $r_h = f_h - A_h v_h$
3. Restringir o resíduo (transferi-lo da malha fina para a grossa):  $r_{2h} = I_h^{2h} r_h$

4. Resolver a equação do resíduo na malha grossa  $2h$ :  $A_{2h}e_{2h} = r_{2h}$
5. Interpolar o erro (transferi-lo da malha grossa para a fina):  $e_h = I_{2h}^h e_{2h}$
6. Atualizar (corrigir) a nova aproximação:  $v_h = v_h + e_h$
7. Relaxar  $n$ -vezes  $A_h u_h = f_h$  com a nova estimativa  $v_h$  e retornar ao item 2.

Este processo é repetido  $n$ -vezes até que uma convergência especificada seja atingida.

Pode-se notar que diversos componentes devem ser definidos:

- Procedimento de suavização
- Número de passos de suavização
- Os operadores de restrição (transferem a informação da malha fina para a grossa) e de interpolação (transferem a informação da malha grossa para a fina)
- A forma como é definida (ou gerada) a malha grossa  $2h$
- O operador da malha grossa  $A_{2h}$

A escolha correta destes componentes é de vital importância para a construção dos algoritmos multigrid, assim algumas observações tornam-se necessárias:

- Escolha da malha grossa

A forma padrão para obtenção de malhas grossas nos métodos multigrid tradicionais é feita duplicando-se o espaçamento  $h$  da malha em cada direção. Em  $d$  dimensões a relação entre o número de pontos na malha (negligenciando-se os efeitos dos contornos) é

$$\Omega_{2h} \approx \frac{1}{2^d} \Omega_h \quad (2.15)$$

onde  $\Omega_h$  e  $\Omega_{2h}$  representam domínios computacionais com espaçamento  $h$  e  $2h$  respectivamente.

Outra técnica aplicada para a obtenção da malha grossa é o “semi-engrossamento”. Se o tamanho da malha é dobrado somente em uma direção,  $H = (2h_x, h_y)$ , tem-se o “semi-engrossamento” em  $x$  ou se  $H = (h_x, 2h_y)$  tem-se o “semi-engrossamento” em  $y$ , o qual é útil no caso de coeficientes anisotrópicos em uma dada direção.

- Escolha do operador da malha grossa

A escolha natural é usar para a malha grossa  $2h$  algo diretamente análogo a  $A_h$  da malha fina. Isto significa

$$A_{2h} = \frac{1}{(2h)^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Muitas aplicações também fazem uso do chamado operador de malha grossa de Galerkin

$$A_{2h} = I_h^{2h} A_h I_{2h}^h \quad (2.17)$$

onde  $I_h^{2h}$  e  $I_{2h}^h$  são operadores de transferência apropriados, vistos a seguir.

- Operadores de Transferência

Restrição: o operador de restrição  $I_h^{2h}$  mapeia as funções da malha  $h$  para a malha  $2h$ .

Um operador é o de injeção

$$r_{2h}(P) = I_h^{2h} r_h(P) = r_h(P) \quad (2.18)$$

o qual coloca diretamente nos pontos  $P$  da malha grossa as funções que se encontram localizadas nos mesmos pontos  $P$  da malha fina.

Outro é o *full weighting* que em notação estêncil é

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Aplicando este operador a uma função de malha fina,  $r_h(x,y)$  em um ponto da malha grossa  $(x,y)$  pertencente ao domínio  $2h$ , obtêm-se

$$\begin{aligned}
 r_{2h}(x, y) &= I_h^{2h} r_h(x, y) \\
 &= \frac{1}{16} [4r_h(x, y) + 2r_h(x + h, y) + 2r_h(x - h, y) + 2r_h(x, y + h) + 2r_h(x, y - h) \\
 &\quad + r_h(x + h, y + h) + r_h(x + h, y - h) + r_h(x - h, y + h) + r_h(x - h, y - h)].
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

O terceiro operador de restrição é o *half weighting*

$$I_h^{2h} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{2.21}$$

onde, como pode-se observar, são considerados somente os valores dos quatro vizinhos do ponto escolhido.

Interpolação: o operador de interpolação (prolongamento)  $I_{2h}^h$  mapeia funções da malha  $2h$  para a malha  $h$ . Muito freqüentemente usa-se o método bilinear (Fig. 2.3), o qual é dado por

$$I_{2h}^h e_{2h}(x, y) = \begin{cases} e_{2h}(x, y) & \bullet \\ \frac{1}{2} [e_{2h}(x, y + h) + e_{2h}(x, y - h)] & \square \\ \frac{1}{2} [e_{2h}(x + h, y) + e_{2h}(x - h, y)] & \diamond \\ \frac{1}{4} [e_{2h}(x + h, y + h) + e_{2h}(x + h, y - h) + \\ \quad e_{2h}(x - h, y + h) + e_{2h}(x - h, y - h)] & \circ \end{cases}
 \tag{2.22}$$

onde  $\bullet$  representa os pontos da malha grossa.

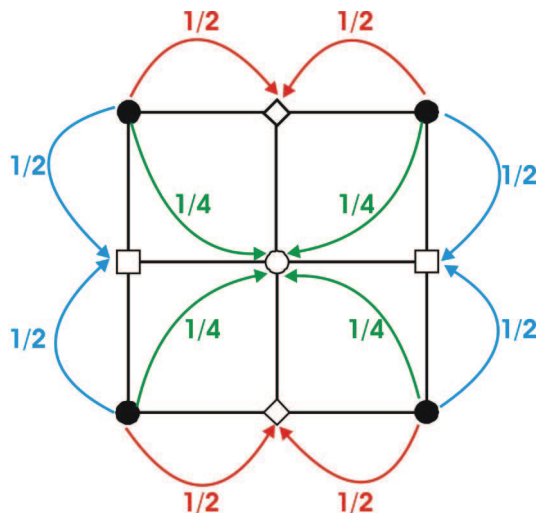


Figura 2.3 Representação dos operadores de interpolação na malha.

E em notação estêncil

$$I_{2h}^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Descreve-se, agora, um ciclo multigrid para resolver a Eq. (2.8). Assumem-se os parâmetros  $n_1, n_2$  (número de passos do *solver* iterativo usado para suavizar o erro nos níveis de malha) fixos. Define-se  $l$  como o parâmetro que especifica qual nível de malha está sendo utilizado ( $l = nh, \dots, 4h, 2h, h$ ) e  $k$  para identificar o tempo anterior e,  $k+1$ , o tempo atual. Iniciando o procedimento na malha fina tem-se:

1. Pré-suavização,  $u$  é suavizado  $n_1$  vezes (na malha  $l$ ):  $v_i^k = \text{Suaviza}^{n_1}(u_i^k, A_l, f_l)$
2. Calcula a correção na malha grossa:
  - a. Computa o resíduo (na malha  $l$ ):  $r_i^k = f_l - A_l v_i^k$
  - b. Restringe o resíduo (da malha  $l$  para a  $l-1$ ):  $r_{l-1}^k = I_l^{l-1} r_i^k$
  - c. Computa uma solução aproximada para a equação do resíduo (na malha  $l-1$ ):
 
$$A_{l-1} e_{l-1}^k = r_{l-1}^k$$
    - Se  $l = 1$  (malha mais grossa), usa um método direto ou iterativo rápido
    - Se  $l > 1$ , resolve a equação acima aproximadamente usando como estimativa inicial zero
  - d. Interpola a correção (da malha  $l-1$  para a  $l$ ):  $e_i^k = I_{l-1}^l e_{l-1}^k$
  - e. Computa a aproximação corrigida (na malha  $l$ ):  $u_i^k = v_i^k + e_i^k$
3. Pós-suavização (na malha  $l$ ):  $u_i^{k+1} = \text{Suaviza}^{n_2}(u_i^k, A_l, f_l)$

Este procedimento é repetido até que a solução do problema seja alcançada.

Vale ressaltar que também é possível construir um método multigrid que trabalhe com aproximações completas da solução discreta na malha grossa, e não com o erro. Este é chamado de *Full Approximation Scheme* (FAS) e é frequentemente usado em problemas não-lineares. No FAS, a solução alcançada em uma determinada malha grossa é uma versão suavizada da solução da malha fina e, é obtida através da restrição e da interpolação de

valores entre diferentes níveis de malha. Logo, não é igual à solução que resultaria se a equação fosse resolvida somente em um determinado nível de malha.

### 2.3 Ciclos Multigrid

Nos itens anteriores, descreveu-se o princípio do multigrid somente para duas malhas. Esta idéia pode ser aplicada recursivamente usando várias malhas uma abaixo da outra e utilizando diferentes tipos de ciclos, os quais definem a ordem como essas malhas são utilizadas na resolução do sistema linear.

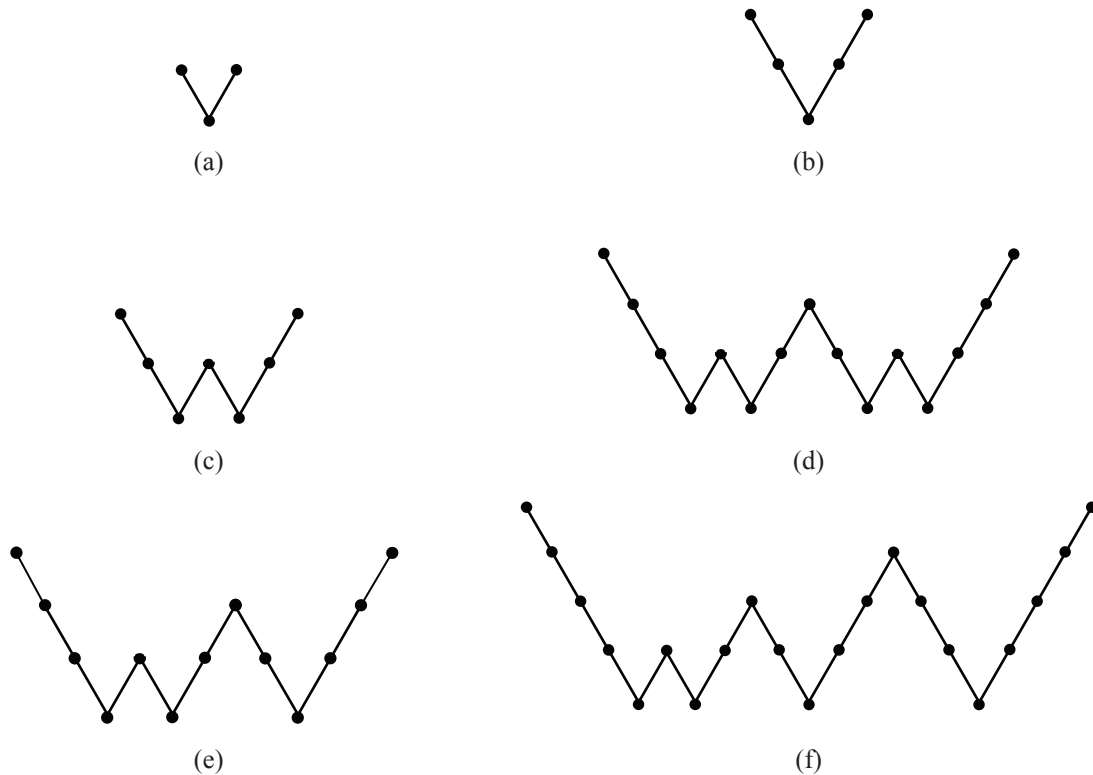
Dentre os ciclos multigrid, cabe citar-se o chamado ciclo flexível. O ciclo flexível inicia com o cálculo do resíduo na malha fina seguido da resolução do sistema linear por meio de um método iterativo. Considerando o resíduo anterior à iteração nessa malha como  $R^k$ , e o resíduo após a iteração como  $R^{k+1}$ , o sistema linear é iterado até que atinja a convergência se satisfizer a condição que na comparação entre os resíduos, o resíduo atual seja  $f$  vezes menor ou igual ao resíduo anterior, sendo  $f$  definido como 0.5 (Hutchinson e Raithby, 1986) ou 0.6 (Phillips e Schmidt, 1984). Assim é medida a taxa de convergência do método e se o resíduo não estiver caindo satisfatoriamente passa-se a utilizar uma malha grossa na qual uma correção para a variável de interesse será calculada. Caso a taxa de convergência (testada nesta malha grossa através da mesma relação entre resíduos que foi testada na malha fina) seja satisfatória, a correção obtida é retornada à malha original, atualizando a variável considerada. Caso contrário parte-se para um próximo nível de malha grossa onde novamente a taxa de convergência é testada. Este procedimento é repetido até atingir uma malha suficientemente grossa onde a taxa de convergência obedeça a relação entre os resíduos. Então é calculada uma correção que é interpolada ao nível de malha superior e assim sucessivamente até atingir o nível de malha mais fino.

Este procedimento, porém, tem a desvantagem que a cada iteração do *solver*, o resíduo deve ser calculado e comparado com o resíduo anterior a fim de se checar a taxa de convergência, o que demanda um tempo de computação considerável.

Para solucionar este problema, surgiram os ciclos fixos do multigrid, dentre os quais pode-se citar os ciclos V, W e F. Nestes, o número de níveis de malha é previamente estabelecido bem como o número de iterações do *solver* a cada nível de malha. Ainda, no nível de malha mais grosso geralmente é obtida a solução exata do sistema linear por meio do uso de um *solver* direto.

Assim como no ciclo flexível, o processo de resolução do sistema linear nos ciclos fixos inicia na malha fina descendo  $n$ -níveis até a malha mais grossa, onde obtém-se a solução

exata do sistema de equações. Então, retorna-se, um nível após o outro, até atingir a malha fina, prolongando-se as correções.



Obs.:A malha fina é sempre a mais superior.

Figura 2.4 Ciclos Multigrid: V com (a) dois e (b) três níveis de malha, W com (c) três e (d) quatro níveis de malha e ciclo F com (e) quatro e (f) cinco níveis de malha.

Na Fig. 2.4 estão representados os ciclos V, W e F, onde cada círculo representa um nível de malha. Pode-se notar que no ciclo V a quantidade de trabalho efetuado em todas as malhas é equivalente. Já nos ciclos W e F a maior parte do trabalho é efetuado nas malhas grossas.

## 2.4 Full Multigrid

A estimativa inicial para um *solver* iterativo está geralmente muito distante da solução do sistema linear considerado. Portanto um procedimento que faz bastante sentido é resolver a equação inicialmente na malha mais grossa para fornecer uma melhor estimativa inicial para as equações aproximadas na malha mais fina. Este é um dos princípios do *Full multigrid* (FMG), ou seja, o ciclo é iniciado na malha mais grossa, onde obtém-se uma estimativa inicial para o próximo nível de malha grossa imediatamente superior e assim subseqüentemente até



atingir malha fina. A literatura mostra que esse esquema é bastante eficiente. (Ferziger e Peric, 1996; Trottenberg, Oosterlee e Schüller, 2001).

Assim, espera-se ter dado ao leitor uma visão da filosofia dos métodos multigrid, acentuando-se algumas características do método multigrid tradicional, que é a base sobre a qual foram e são desenvolvidos os métodos multigrid atuais.

## CAPÍTULO 3

### O MÉTODO MULTIGRID DE CORREÇÕES ADITIVAS

#### 3.1 Comportamento da solução de equações com coeficientes anisotrópicos

Como já mencionado no capítulo dois, os métodos multigrid são aceleradores de convergência da solução de sistemas lineares obtidos por meio da discretização de equações diferenciais, pois reduzem os erros em todo o espectro de frequências através da utilização de várias malhas.

Apresenta-se agora uma breve discussão sobre o desempenho dos métodos iterativos relacionado com a anisotropia dos coeficientes, assunto brevemente comentado no capítulo anterior. Primeiramente deve ser lembrado que os coeficientes da matriz obtida da discretização de um problema físico carregam efeitos geométricos e físicos. Quando as equações são escritas na forma conservativa, seus termos, quando multiplicados pela diferença de potencial, dão origem aos fluxos da propriedade. Por exemplo, considerando um problema de condução de calor, os fluxos dependerão da condutibilidade térmica, das áreas de passagem, da distância entre os nós da malha e da diferença de temperatura. Como as temperaturas são incógnitas, os coeficientes deste problema envolverão a condutibilidade térmica, áreas e distância. De maneira geral podemos dizer, então, que os coeficientes em um problema físico dependem da geometria e da física. Coeficientes anisotrópicos são gerados, então, quando a malha tiver razão de aspecto elevado e quando o transporte das propriedades difere conforme a direção considerada, como acontece em problemas de condução anisotrópicos e com advecção em uma direção dominante em relação à outra.

Conforme já comentado no capítulo anterior, os *solvers* iterativos são lentos na direção dos coeficientes de menor magnitude (problema com coeficientes anisotrópicos). O problema a seguir, de condução de calor com condutibilidade constante em regime permanente, tem seus coeficientes dependendo apenas da geometria. Ele é usado para mostrar a dependência que o método iterativo tem em relação aos coeficientes do problema.

Seja a equação bidimensional de difusão, em regime permanente, sem o termo fonte e com propriedades constantes,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde a variável genérica  $\phi$  representa a temperatura. Utilizando, para a discretização, o método das diferenças finitas para um domínio de cálculo bidimensional e usando diferenças centrais para aproximar as derivadas, obtém-se

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{2+2/C} \phi_{i,j+1} + \frac{1}{2+2/C} \phi_{i,j-1} + \frac{1}{2+2C} \phi_{i+1,j} + \frac{1}{2+2C} \phi_{i-1,j}, \quad (3.2)$$

onde  $C$  é dado por  $(\Delta x/\Delta y)^2$ . Como se pode ver na Fig. 3.1 a razão de aspecto dessa malha é bastante grande quando  $\Delta x \gg \Delta y$ , o que acarreta a anisotropia dos coeficientes.

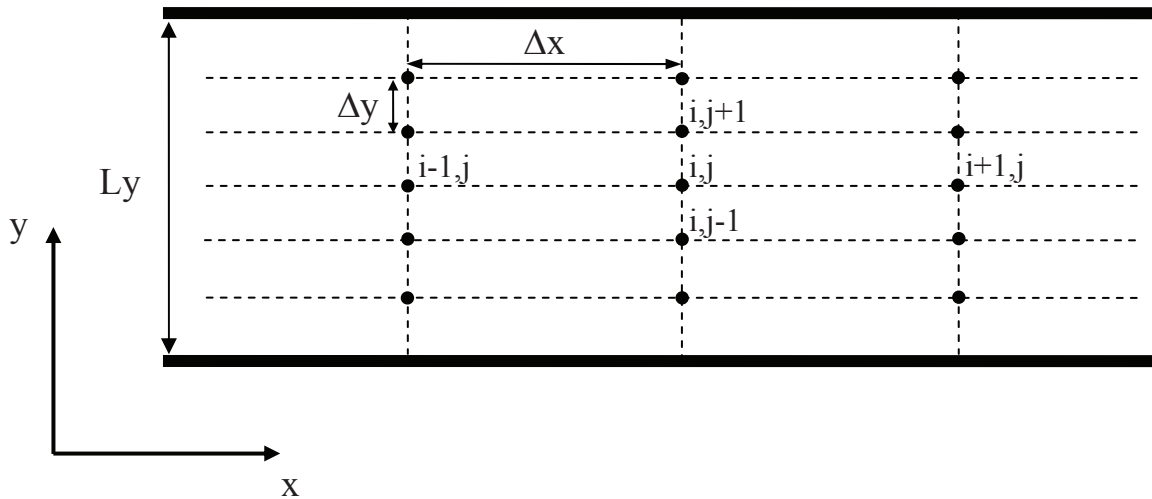


Figura 3.1 Geometria cartesiana para a demonstração do efeito de anisotropia dos coeficientes.

O *solver* Gauss-Seidel (GS) ponto-a-ponto é utilizado para varrer o domínio da esquerda para a direita e de baixo para cima. A aplicação de um *solver* ponto-a-ponto é equivalente a avançar a solução no espaço de uma distância equivalente ao tamanho da malha com um passo de tempo  $\Delta t_{i,j}$ . Deve ser lembrado que mesmo não existindo a coordenada tempo na equação em consideração, as iterações equivalem a um avanço no tempo. Como a equação resolvida pelo método de Gauss-Seidel envolve as variáveis vizinhas nos níveis de tempo atual e anterior, ela é parcialmente implícita. Esta implicitude permite a sobre-relaxação. O tempo de propagação da informação por difusão na direção  $y$  é  $\Delta t^y = C_1 \Delta y^2$  e na direção  $x$  é  $\Delta t^x = C_1 \Delta x^2$ , onde  $C_1$  é uma constante. Se  $\Delta y < \Delta x$  (conforme Fig. 3.1), então  $\Delta t^y < \Delta t^x$  e, assim, o passo de tempo que o método de solução do sistema linear irá utilizar é  $\Delta t_{i,j} \approx \Delta t^y$ . Para uma razão de aspecto  $\Delta x/\Delta y \approx 100$ , o número de iterações para suavizar todos os modos de erro na direção  $y$  é igual ao número de nós nessa direção. Entretanto, leva-se o

tempo  $\Delta t^x = (\Delta x/\Delta y)^2 \Delta t_{i,j}$  para transferir a informação entre nós adjacentes na direção do coeficiente fraco, a direção  $x$ , e assim a suavização das componentes de alta frequência de erro na direção do coeficiente fraco torna-se um processo computacionalmente caro (Hutchinson e Raithby, 1986).

Crescendo a implicitude do solver na direção do coeficiente forte o processo será mais eficiente. No entanto, para problemas complexos, não é possível orientar o *solver* linear na direção do coeficiente forte, pois essa direção varia. Assim deve-se usar uma estratégia alternativa como a aglomeração adaptativa para o método ACM (Elias, 1993), a qual será vista no capítulo 4.

### 3.2 O método Multigrid de Correções Aditivas

O método Multigrid de Correções Aditivas (ACM) difere dos métodos multigrid tradicionais por gerar as equações da malha grossa sem o uso de operadores de interpolação e restrição, pelo menos não no formato que estes são apresentados nos métodos multigrid clássicos. Métodos multigrid clássicos formam as equações da malha grossa discretizando as equações em cada malha e restringindo os resíduos da malha fina para as malhas grossas. Então, a equação para o erro é resolvida (na malha grossa em questão) e uma correção é interpolada para a malha fina (ou para uma malha menos grossa do nível imediatamente superior). Já no método ACM as equações da malha grossa são obtidas adicionando os coeficientes da malha fina evitando assim, problemas de inconsistência entre malhas.

No ACM é executada a adição das equações a fim de formar-se um bloco (uma nova célula) obtendo-se assim uma nova malha, mais grossa. Nesta é calculada uma correção para todo o bloco  $I$  (Fig. 3.2),  $\phi_I^*$ , a qual é somada ao  $\phi$  da malha do nível superior para a obtenção de  $\tilde{\phi}$ , que é a solução corrigida.

Como no método ACM as equações da malha grossa são obtidas somente adicionando os coeficientes da malha fina, a aglomeração adaptativa (que leva em conta o grau de anisotropia dos coeficientes) é uma boa possibilidade. Porém nada impede que os volumes de controle sejam aglomerados de forma a gerar estruturas uniformes (como quadrados, por exemplo, no caso de malhas cartesianas), como uma espécie de aglomeração “geométrica”. É claro que, possuindo uma ferramenta de aglomeração que leve em conta a conexão entre os coeficientes (e possibilite a aglomeração na direção do coeficiente “forte” acelerando a solução do sistema linear na malha grossa) é mais vantajoso fazer uso desta do que

simplesmente aglomerar de forma “geométrica”. Mais detalhes sobre a forma de efetuar a aglomeração são vistos no Cap. 4 e alguns exemplos de aplicação são mostrados no Cap. 6.

Para um melhor entendimento do método toma-se como exemplo uma malha estruturada, bidimensional, com 36 volumes sendo agrupados em blocos de seis volumes, dois na direção horizontal e três na direção vertical, obtendo a primeira malha grossa. Agrupando novamente em blocos de dois volumes na direção vertical obtém-se a segunda malha grossa, como pode ser visto na Fig. 3.2.

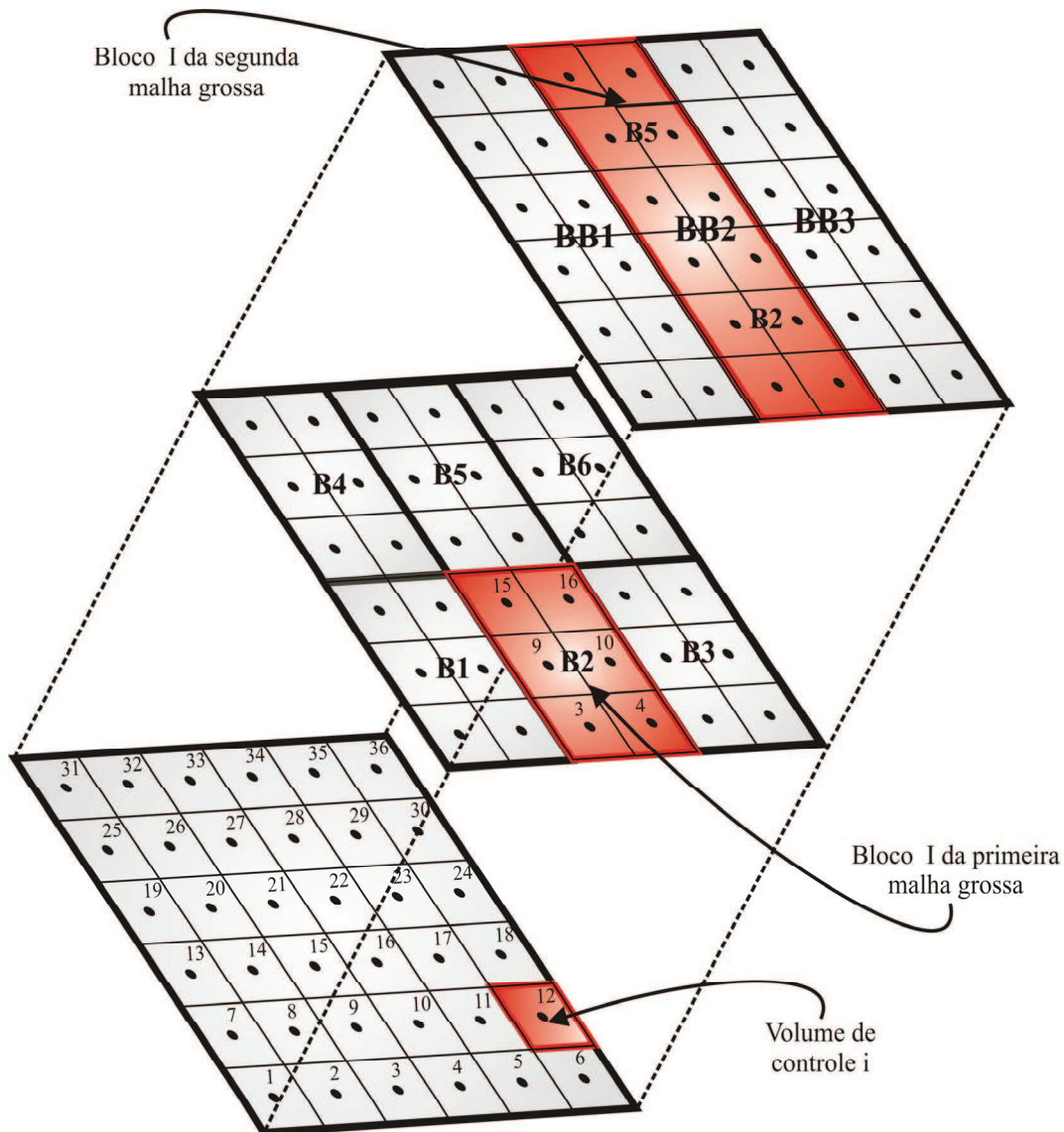


Figura 3.2 Diferentes níveis de malha empregados na resolução de sistemas lineares através do método Multigrid de Correções Aditivas. No nível mais inferior têm-se a malha com 36 volumes, no segundo nível a malha dividida em 6 blocos, e no nível mais superior dividida em 3 blocos.

Para a obtenção da equação de correção parte-se do sistema de equações a ser resolvido na malha fina. Este é aproximado em volumes finitos podendo ser escrito na seguinte forma geral

$$A_p^i \phi_i = \sum_{nb} A_{nb}^i \phi_{nb} + b_i, \quad (3.3)$$

onde o índice  $i$  representa o volume de controle que está sendo analisado,  $nb$  representa os volumes vizinhos e  $p$  o volume central.

O princípio do método ACM consiste em adicionar as correções  $\phi^*$  obtidas na malha grossa à melhor estimativa de  $\phi$  na malha fina

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i + \phi_I^*, \quad (3.4)$$

onde

$\tilde{\phi}_i$  é a solução corrigida na malha fina,

$\phi_I^*$  é a correção para o bloco  $I$  obtida na malha grossa.

A solução corrigida é forçada a ter resíduo zero como uma forma de manter a conservação global das propriedades calculadas

$$\sum_i \tilde{r}_i = 0, \quad (3.5)$$

e assim

$$\tilde{r}_i = -A_p^i \tilde{\phi}_i + \sum_{nb,I} A_{nb}^i \tilde{\phi}_{nb} + b_i. \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. (3.4) em (3.6) obtém-se

$$\tilde{r}_i = -A_p^i (\phi_i + \phi_I^*) + \sum_{nb,I} A_{nb}^i (\phi_{nb} + \phi_{NB}^*) + b_i, \quad (3.7)$$

$$\tilde{r}_i = b_i - A_p^i \phi_i + \sum_{nb,I} A_{nb}^i \phi_{nb} - A_p^i \phi_I^* + \sum_{nb,I} A_{nb}^i \phi_{NB}^*, \quad (3.8)$$

e sabendo que

$$r_i = b_i - A_p^i \phi_i + \sum_{nb, I} A_{nb}^i \phi_{nb} , \quad (3.9)$$

logo

$$\tilde{r}_i = r_i - A_p^i \phi_I^* + \sum_{nb, I} A_{nb}^i \phi_{NB}^* . \quad (3.10)$$

Fazendo o somatório dos volumes de controle  $i$  dentro do bloco  $I$  tem-se

$$0 = \sum_{i, I} r_i - \sum_{i, I} A_p^i \phi_I^* + \sum_{i, I} \left( \sum_{nb} A_{nb}^i \phi_{NB}^* \right) , \quad (3.11)$$

e, rearranjando os termos

$$\sum_{i, I} A_p^i \phi_I^* = \sum_{i, I} \left( \sum_{nb} A_{nb}^i \phi_{NB}^* \right) + \sum_{i, I} r_i . \quad (3.12)$$

Esta é a equação que deve ser resolvida a fim de obter-se a correção  $\phi^*$

$$A_p^* \phi_p^* = \sum_{nb} A_{NB}^* \phi_{NB}^* + b_p^* , \quad (3.13)$$

onde

$$A_p^* = \sum_{i, I} A_p^i - \sum_{nb} A_{nb}^i , \quad (3.14.1)$$

com  $A_{nb}^i$  representando a conexão entre os volumes dentro do mesmo bloco  $I$ .

Os outros coeficientes são dados por

$$A_E^* = \sum_{i, I} A_e^i , \quad (3.14.2)$$

$$A_w^* = \sum_{i,I} A_w^i, \quad (3.14.3)$$

$$A_n^* = \sum_{i,I} A_n^i, \quad (3.14.4)$$

$$A_s^* = \sum_{i,I} A_s^i, \quad (3.14.5)$$

$$b_p^* = \sum_{i,I} r_i. \quad (3.14.6)$$

Para exemplificar, considerando o bloco 2 do segundo nível de malha conforme a Fig. 3.2, obtêm-se as seguintes equações para as células

$$A_p^3 \phi_3 = A_e^3 \phi_4 + A_w^3 \phi_2 + A_n^3 \phi_9 + b_3, \quad (3.15.1)$$

$$A_p^4 \phi_4 = A_e^4 \phi_5 + A_w^4 \phi_3 + A_n^4 \phi_{10} + b_4, \quad (3.15.2)$$

$$A_p^9 \phi_9 = A_e^9 \phi_{10} + A_w^9 \phi_8 + A_n^9 \phi_{15} + A_s^9 \phi_3 + b_9, \quad (3.15.3)$$

$$A_p^{10} \phi_{10} = A_e^{10} \phi_{11} + A_w^{10} \phi_9 + A_n^{10} \phi_{16} + A_s^{10} \phi_4 + b_{10}, \quad (3.15.4)$$

$$A_p^{15} \phi_{15} = A_e^{15} \phi_{16} + A_w^{15} \phi_{14} + A_n^{15} \phi_{21} + A_s^{15} \phi_9 + b_{15}, \quad (3.15.5)$$

$$A_p^{16} \phi_{16} = A_e^{16} \phi_{17} + A_w^{16} \phi_{15} + A_n^{16} \phi_{22} + A_s^{16} \phi_{10} + b_{16}, \quad (3.15.6)$$

onde o superescrito representa o volume de controle que esta sendo analisado.

Para as correções têm-se as seguintes equações

$$\tilde{\phi}_3 = \phi_3 + \phi_2^*, \quad (3.16.1)$$

$$\tilde{\phi}_4 = \phi_4 + \phi_2^*, \quad (3.16.2)$$



$$\tilde{\phi}_9 = \phi_9 + \phi_2^*, \quad (3.16.3)$$

$$\tilde{\phi}_{10} = \phi_{10} + \phi_2^*, \quad (3.16.4)$$

$$\tilde{\phi}_{15} = \phi_{15} + \phi_2^*, \quad (3.16.5)$$

$$\tilde{\phi}_{16} = \phi_{16} + \phi_2^*. \quad (3.16.6)$$

Escrevendo as equações para as soluções corrigidas

$$A_p^3 \tilde{\phi}_3 = A_e^3 \tilde{\phi}_4 + A_w^3 \tilde{\phi}_2 + A_n^3 \tilde{\phi}_9 + b_3, \quad (3.17.1)$$

$$A_p^4 \tilde{\phi}_4 = A_e^4 \tilde{\phi}_5 + A_w^4 \tilde{\phi}_3 + A_n^4 \tilde{\phi}_{10} + b_4, \quad (3.17.2)$$

$$A_p^9 \tilde{\phi}_9 = A_e^9 \tilde{\phi}_{10} + A_w^9 \tilde{\phi}_8 + A_n^9 \tilde{\phi}_{15} + A_s^9 \tilde{\phi}_3 + b_9, \quad (3.17.3)$$

$$A_p^{10} \tilde{\phi}_{10} = A_e^{10} \tilde{\phi}_{11} + A_w^{10} \tilde{\phi}_9 + A_n^{10} \tilde{\phi}_{16} + A_s^{10} \tilde{\phi}_4 + b_{10}, \quad (3.17.4)$$

$$A_p^{15} \tilde{\phi}_{15} = A_e^{15} \tilde{\phi}_{16} + A_w^{15} \tilde{\phi}_{14} + A_n^{15} \tilde{\phi}_{21} + A_s^{15} \tilde{\phi}_9 + b_{15}, \quad (3.17.5)$$

$$A_p^{16} \tilde{\phi}_{16} = A_e^{16} \tilde{\phi}_{17} + A_w^{16} \tilde{\phi}_{15} + A_n^{16} \tilde{\phi}_{22} + A_s^{16} \tilde{\phi}_{10} + b_{16}, \quad (3.17.6)$$

e, substituindo as equações (3.16.1-6) nas equações (3.17.1-6) obtém-se

$$A_p^3 (\phi_3 + \phi_2^*) = A_e^3 (\phi_4 + \phi_2^*) + A_w^3 (\phi_2 + \phi_1^*) + A_n^3 (\phi_9 + \phi_2^*) + b_3, \quad (3.18.1)$$

$$A_p^4 (\phi_4 + \phi_2^*) = A_e^4 (\phi_5 + \phi_3^*) + A_w^4 (\phi_3 + \phi_2^*) + A_n^4 (\phi_{10} + \phi_2^*) + b_4, \quad (3.18.2)$$

$$A_p^9 (\phi_9 + \phi_2^*) = A_e^9 (\phi_{10} + \phi_2^*) + A_w^9 (\phi_8 + \phi_1^*) + A_n^9 (\phi_{15} + \phi_2^*) + A_s^9 (\phi_3 + \phi_2^*) + b_9, \quad (3.18.3)$$

$$A_p^{10}(\phi_{10} + \phi_2^*) = A_e^{10}(\phi_{11} + \phi_3^*) + A_w^{10}(\phi_9 + \phi_2^*) + A_n^{10}(\phi_{16} + \phi_2^*) + A_s^{10}(\phi_4 + \phi_2^*) + b_{10}, \quad (3.18.4)$$

$$A_p^{15}(\phi_{15} + \phi_2^*) = A_e^{15}(\phi_{16} + \phi_2^*) + A_w^{15}(\phi_{14} + \phi_1^*) + A_n^{15}(\phi_{21} + \phi_5^*) + A_s^{15}(\phi_9 + \phi_2^*) + b_{15}, \quad (3.18.5)$$

$$A_p^{16}(\phi_{16} + \phi_2^*) = A_e^{16}(\phi_{17} + \phi_3^*) + A_w^{16}(\phi_{15} + \phi_2^*) + A_n^{16}(\phi_{22} + \phi_5^*) + A_s^{16}(\phi_{10} + \phi_2^*) + b_{16}, \quad (3.18.6)$$

da onde, obtém-se os resíduos

$$\tilde{r}_3 = r_3 - A_p^3 \phi_2^* + A_e^3 \phi_2^* + A_w^3 \phi_1^* + A_n^3 \phi_2^*, \quad (3.19.1)$$

$$\tilde{r}_4 = r_4 - A_p^4 \phi_2^* + A_e^4 \phi_3^* + A_w^4 \phi_2^* + A_n^4 \phi_2^*, \quad (3.19.2)$$

$$\tilde{r}_9 = r_9 - A_p^9 \phi_2^* + A_e^9 \phi_2^* + A_w^9 \phi_1^* + A_n^9 \phi_2^* + A_s^9 \phi_2^*, \quad (3.19.3)$$

$$\tilde{r}_{10} = r_{10} - A_p^{10} \phi_2^* + A_e^{10} \phi_3^* + A_w^{10} \phi_2^* + A_n^{10} \phi_2^* + A_s^{10} \phi_2^*, \quad (3.19.4)$$

$$\tilde{r}_{15} = r_{15} - A_p^{15} \phi_2^* + A_e^{15} \phi_2^* + A_w^{15} \phi_1^* + A_n^{15} \phi_5^* + A_s^{15} \phi_2^*, \quad (3.19.5)$$

$$\tilde{r}_{16} = r_{16} - A_p^{16} \phi_2^* + A_e^{16} \phi_3^* + A_w^{16} \phi_2^* + A_n^{16} \phi_5^* + A_s^{16} \phi_2^*. \quad (3.19.6)$$

Fazendo

$$\sum_i \tilde{r}_i = 0, \quad (3.20)$$

para a malha considerada tem-se que

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i,l} r_i - \phi_2^* (A_p^3 + A_p^4 + A_p^9 + A_p^{10} + A_p^{15} + A_p^{16} - A_n^3 - A_n^4 - A_n^9 - A_n^{10} \\ - A_s^9 - A_s^{10} - A_s^{15} - A_s^{16} - A_e^3 - A_e^9 - A_e^{15} - A_w^4 - A_w^{10} - A_w^{16}) \\ + \phi_1^* (A_w^3 + A_w^9 + A_w^{15}) + \phi_3^* (A_e^4 + A_e^{10} + A_e^{16}) + \phi_5^* (A_n^{15} + A_n^{16}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

e assim obtém-se a equação para a correção

$$A_p^{2*} \phi_2^* = \sum_{nb} A_{NB}^{2*} \phi_{NB}^* + b_2^*, \quad (3.22)$$

onde o superescrito 2 de  $A_p$  e  $A_{NB}$  referem-se ao bloco grosseiro do novo sistema linear que está sendo montado.

$$\begin{aligned} A_p^{2*} = & A_p^3 + A_p^4 + A_p^9 + A_p^{10} + A_p^{15} + A_p^{16} - A_n^3 - A_n^4 - A_n^9 - A_n^{10} \\ & - A_s^9 - A_s^{10} - A_s^{15} - A_s^{16} - A_e^3 - A_e^9 - A_e^{15} - A_w^4 - A_w^{10} - A_w^{16}, \end{aligned} \quad (3.23.1)$$

$$A_w^{2*} = A_w^3 + A_w^9 + A_w^{15}, \quad (3.23.2)$$

$$A_e^{2*} = A_e^4 + A_e^{10} + A_e^{16}, \quad (3.23.3)$$

$$A_n^{2*} = A_n^{15} + A_n^{16}, \quad (3.23.4)$$

$$A_s^{2*} = 0, \quad (3.23.5)$$

$$b_2^* = \sum_{i,I} r_i. \quad (3.23.6)$$

Como foi visto no método Multigrid de Correções Aditivas, as equações das células finas, as quais situam-se numa mesma célula grossa, são somadas. Assim não resta mais nenhum problema com respeito ao tratamento das condições de contorno, transferência de resíduos ou interpolação de variáveis.

Acima foi exemplificado o uso do ACM para malhas estruturadas utilizando o método de volumes finitos. Como é mostrado a seguir, este método é bastante flexível podendo ser estendido a malhas não-estruturadas aproximadas pelo método de Volumes Finitos baseado em Elementos, o qual será apresentado em detalhes no capítulo 5.

Na Fig. 3.3 pode-se ver um exemplo de malha não-estruturada formada por elementos, os quais dão origem aos volumes de controle sobre os quais o sistema de equações é resolvido. Neste caso os volumes de controle são agrupados, na média, em blocos com cinco volumes. Pode-se notar que no caso de aglomeração adaptativa (baseada nos coeficientes das equações) os agrupamentos ocorrem em diferentes direções resultando em uma aglomeração com formas altamente não-estruturadas.

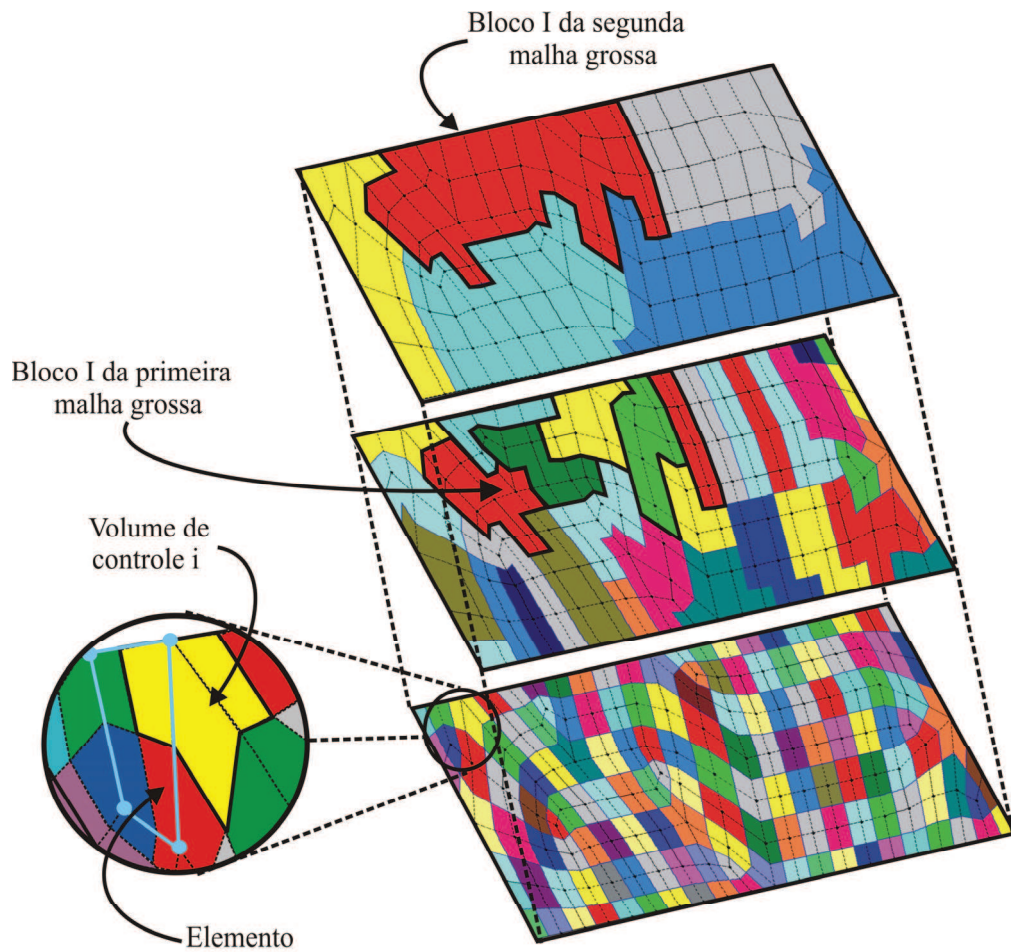


Figura 3.3 Exemplo de aglomeração adaptativa em uma malha não-estruturada.

A dedução da equação de correção para malhas não-estruturadas fica bastante similar ao caso da dedução para malhas estruturadas, somente que aqui não temos mais as direções definidas das células vizinhas:  $A_w$ ,  $A_e$ ,  $A_s$  e  $A_n$ .

Retomando as equações básicas, a Eq. (3.3) da aproximação do sistema de equações, a Eq. (3.4) da correção e a Eq. (3.13) para  $\phi^*$ , tem-se

$$A_p^i \phi_i = \sum_{nb} A_{nb}^i \phi_{nb} + b_i, \quad (3.24)$$

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i + \phi_I^*, \quad (3.25)$$

$$A_p^* \phi_p^* = \sum_{nb} A_{NB}^* \phi_{NB}^* + b_p^*. \quad (3.26)$$

Pode-se ver que as equações gerais do método ACM não sofrem modificações ao tratar dos casos estruturado ou não-estruturado. O que sofre modificações no caso não-estruturado é o modo como os termos que formam a Eq. (3.26) são obtidos. O termo  $b_p^*$  (Eq. 3.27.1) continua igual, somente as parcelas  $A_p^*$  e  $A_{NB}^*$  são calculadas de forma um pouco diferente, como pode ser visto nas Eqs. (3.27.2) e (3.27.3)

$$b_p^* = \sum_{i,I} r_i, \quad (3.27.1)$$

$$A_p^* = \sum_{i,I} A_p^i - \sum A_{nb}^i, \quad (3.27.2)$$

$$A_{NB}^* = \sum_{i,I} A_{nb}^i. \quad (3.27.3)$$

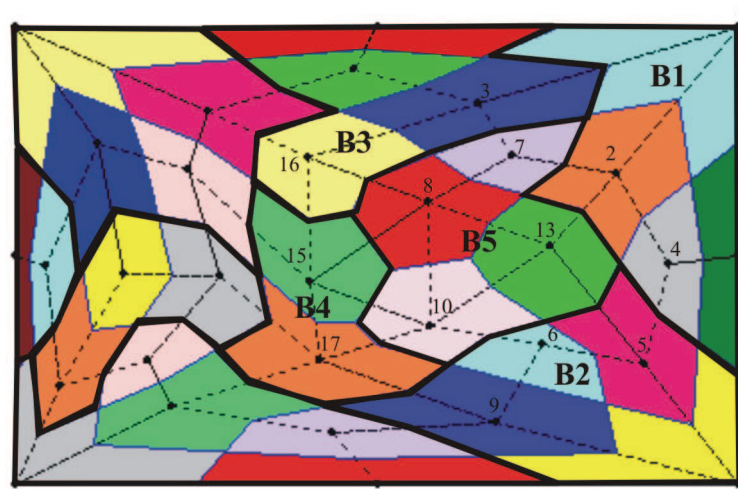
Assim  $\sum A_{nb}^i$  representa a conexão entre os volumes dentro do mesmo bloco  $I$  e  $\sum_{i,I} A_{nb}^i$  representa a conexão com os volumes que situam-se nos blocos  $I$  vizinhos.

Tomando o exemplo da Fig. 3.4, pode-se ver uma malha não-estruturada discretizada por elementos (linhas pontilhadas) que dão origem a volumes de controle pelo método EbFVM. Estes volumes de controle passam por um processo de aglomeração originando novos blocos que formam a malha grossa. A fim de descrever com maior exatidão o processo de formação das equações de correção obtidas da malha grossa analisa-se o bloco  $B5$ . Os blocos vizinhos, bem como os nós dos volumes de controle, os quais entram na formação da equação do bloco  $B5$ , aparecem numerados.

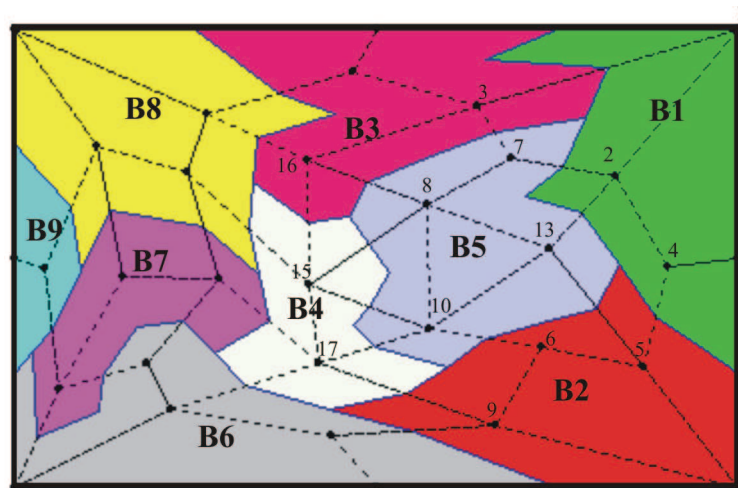
Considerando a matriz geral de coeficientes do problema e destacado as linhas dos volumes de controle 7, 8, 10 e 13 que pertencem ao bloco  $B5$ , tem-se,

$$\begin{array}{l} \dots \\ \text{VC7} \\ \text{VC8} \\ \dots \\ \text{VC10} \\ \dots \\ \text{VC13} \\ \dots \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ C_1 & C_2 & C_3 & & & C_7 & C_8 & & & C_{13} & & & C_{16} & & \dots \\ & D_2 & D_3 & & & D_7 & D_8 & D_{10} & & D_{13} & D_{15} & D_{16} & & & \dots \\ \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & E_5 & E_6 & & E_8 & E_9 & E_{10} & & E_{13} & E_{15} & E_{17} & & \dots \\ \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ F_2 & & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & & F_{10} & & F_{13} & & & & \dots \\ \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots \end{array} \right] \quad (3.28)$$

onde as letras  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  representam os coeficientes dos volumes de controle 7, 8, 10, e 13, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 3.4 Malha não-estruturada, (a) fina subdividida em blocos, (b) grossa.

Assim, tomando-se novamente a Eq. (3.26)

$$A_p^* \phi_p^* = \sum_{nb} A_{NB}^* \phi_{NB}^* + b_p^*, \quad (3.29)$$

para o problema considerado tem-se

$$A_p^{B5^*} = C_7 + D_8 + E_{10} + F_{13} - (C_8 + C_{13} + D_7 + D_{10} + D_{13} + E_8 + E_{13} + F_7 + F_8 + F_{10}), \quad (3.30.1)$$

$$A_{B1}^{B5*} = C_1 + C_2 + D_2 + F_2 + F_4, \quad (3.30.2)$$

$$A_{B2}^{B5*} = E_5 + E_6 + E_9 + F_5 + F_6, \quad (3.30.3)$$

$$A_{B3}^{B5*} = C_3 + C_{16} + D_3 + D_{16}, \quad (3.30.4)$$

$$A_{B4}^{B5*} = D_{15} + E_{15} + E_{17}. \quad (3.30.5)$$

$$b_{B5}^* = \sum_{i,I} r_i, \quad (3.30.6)$$

onde o superescrito  $B5$  refere-se ao bloco grosseiro do novo sistema linear que está sendo obtido.

A Eq. (3.29) deve ser resolvida para obter-se  $\phi_I^*$ . Esta correção deve ser adicionada a cada valor  $\phi_i$  de cada volume de controle que se situa no bloco  $I$  (no caso considerado  $B5$ ), obtendo-se, assim, uma melhor estimativa  $\tilde{\phi}_i$ .

Após esta apresentação do equacionamento do método ACM, mostra-se na Fig. 3.5 um fluxograma geral do método.

Foi definido o uso do ciclo V, uma vez que suas chamadas para os procedimentos de atualização do termo fonte e de resolução do sistema linear são mais simples e por isso de mais fácil entendimento. No ciclo V, o procedimento de atualização do termo fonte inicia na malha fina e desce até a malha mais grossa. Feito isso, tem início o processo de subida (volta) até a malha fina resolvendo o sistema linear e atualizando  $\phi$ . Nos ciclos W e F é necessária a realização de mais trabalho nas malhas grossas, sendo que sua configuração (de subidas e descidas) depende do número de malhas definido para a resolução do problema.

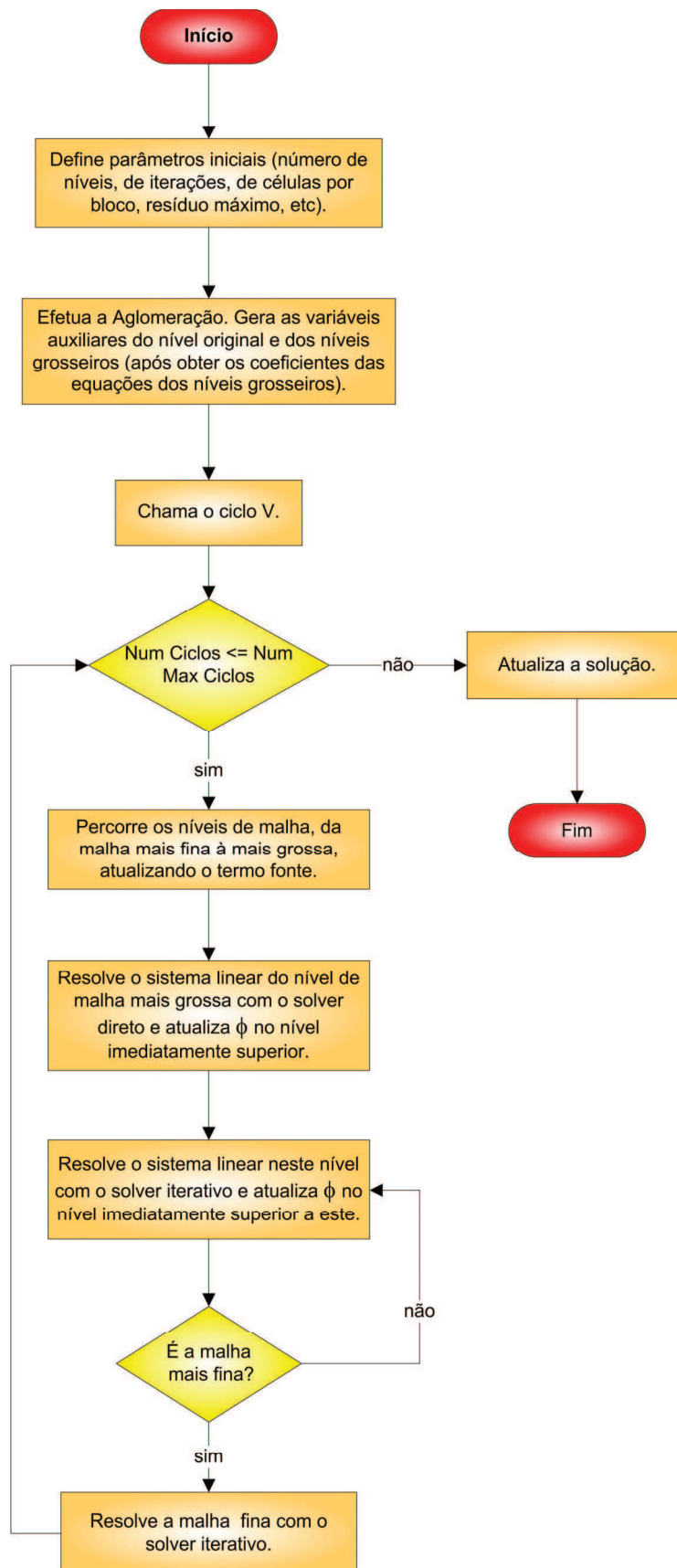


Figura 3.5 Fluxograma geral do método Multigrid de Correções Aditivas.



### 3.2.1 Método Multigrid de Correções Aditivas aplicado a um sistema de equações acopladas

É interessante fazer algumas observações a respeito do método ACM quando este é aplicado a um sistema de equações acopladas.

Até agora o método ACM foi exemplificado para um problema onde existe somente uma variável a ser calculada para cada volume de controle. Já os problemas de escoamento, bidimensionais, aqui considerados são descritos por três equações fundamentais (equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$ , equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $y$  e equação de conservação da massa) e quando aproximados de forma acoplada apresentam as três variáveis (velocidades  $u$  e  $v$  e pressão  $p$ ) ativas nas três equações. Assim, a matriz de coeficientes de cada volume de controle possui nove coeficientes e é formado um sistema linear de  $3xN$  equações a  $3xN$  incógnitas onde  $N$  é o número de volumes de controle do domínio discretizado, conforme pode ser visto na Eq. (3.31).

$$\begin{bmatrix} [A] & [] & [] & [] \\ [] & [A] & [] & [] \\ [] & [] & [A] & [] \\ [] & [] & [] & \cdot \\ [] & [] & [] & \cdot \\ [] & [] & [] & \cdot \\ [] & [A] & [] & \cdot \\ [] & [] & [A] & \cdot \\ [] & [] & [] & [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\phi] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} [A^{uu}] & [A^{uv}] & [A^{uP}] \\ [A^{vu}] & [A^{vv}] & [A^{vP}] \\ [A^{Pu}] & [A^{Pv}] & [A^{PP}] \end{bmatrix} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \\ B^P \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Tem-se, então, que trabalhar com os nove coeficientes da matriz  $A$  da Eq. (3.32) e não somente com um coeficiente como no problema de condução de calor. No entanto, o método ACM é bastante flexível sendo que a metodologia aplicada para uma equação pode ser estendida para um conjunto acoplado de equações.

Assim para a solução dos problemas acoplados criou-se um procedimento um pouco diferenciado. Foi utilizada uma metodologia onde os coeficientes do sistema linear original são divididos em vetores, sendo que cada vetor possui os coeficientes de um volume de controle e os vetores são armazenados na matriz geral do sistema linear. Desta forma tem-se uma matriz “bloqueada”, onde cada “bloco” representa o conjunto de coeficientes de um volume de controle.

Cabe aqui uma observação: a título de ilustração na Eq. (3.31) tem-se a representação da matriz de forma cheia e, por isso, os coeficientes dos volumes de controle também são apresentados em forma de matriz (ao invés de vetor). Essa representação da matriz na forma “cheia” é mostrada aqui somente para facilitar o entendimento do leitor, uma vez que no código desenvolvido as matrizes são armazenadas na forma esparsa.

Para efetuar a aglomeração é escolhido um dos coeficientes ou alguma combinação que envolva estes coeficientes do volume a fim de definir quais volumes de controle serão aglomerados.<sup>1</sup> Definidos os volumes a serem agrupados, procede-se a soma dos seus respectivos coeficientes. Agora têm-se vetores com nove coeficientes a serem somados para cada volume de controle e não somente um valor por volume. O mesmo ocorre para o somatório dos termos fontes. Têm-se três termos fontes para cada volume de controle (um para cada equação) e não somente um termo fonte.

Assim, o procedimento de obtenção de cada sistema linear (de cada malha grossa) é feito de forma a obter sistemas “bloqueados”. Após a obtenção dos coeficientes, os vetores são “abertos” em uma grande matriz, o mesmo ocorrendo para os vetores do termo fonte e das incógnitas. Assim um sistema linear é resolvido em cada nível de malha.

Após a atualização das não-linearidades, o sistema linear é novamente colocado na forma “bloqueada”, sendo ou não realizada uma nova aglomeração. Além da forma “bloqueada” ser utilizada na aglomeração, ela é também necessária para atualizar os coeficientes dos sistemas lineares das malhas grossas.

Feitas estas observações a respeito das modificações necessárias no método ACM com o uso de sistemas acoplados, outro aspecto importante a ser analisado diz respeito aos solvers internos<sup>2</sup> utilizados pelo método multigrid, o que é visto no Apêndice 1 no final do trabalho.

Mais detalhes sobre o método ACM podem ser vistos em Hutchinson e Raithby (1986) e em Maliska (2004) e, no próximo capítulo será apresentado o esquema de aglomeração adaptativa que visa melhorar ainda mais o rendimento do método ACM.

---

<sup>1</sup> Mais detalhes são apresentados no Cap. 4 que trata do processo de aglomeração.

<sup>2</sup> Neste trabalho serão denominados como “solvers internos” do método multigrid, os solvers utilizados para resolver os sistemas lineares nos diversos níveis de malha considerados.

## CAPÍTULO 4

### ESQUEMA DE AGLOMERAÇÃO DO ACM

A natureza dos coeficientes nas equações da malha fina pode afetar drasticamente o comportamento da convergência. Assim um método adaptativo de aglomeração, baseado nos coeficientes da malha fina, deve ser utilizado.

#### 4.1 Performance do método numérico

Continuando o tema do Cap. 3, item 3.1, examina-se aqui com mais detalhes o efeito de alta anisotropia dos coeficientes no comportamento de *solvers* iterativos. Sabe-se que o desempenho do método numérico decai quando os coeficientes do conjunto de equações lineares tornam-se altamente anisotrópicos ou descontínuos. Isto ocorre quando as células da malha têm grande razão de aspecto, quando o transporte advectivo é dominante ou quando, em problemas difusivos, os coeficientes de transporte são anisotrópicos. Conforme já esclarecido, o valor dos coeficientes da matriz é sempre dependente da geometria e da física do fenômeno. Desta forma é possível ter uma malha com grande razão de aspecto e este efeito ser compensado pela existência, por exemplo, de advecção na outra direção, resultando em coeficientes isotrópicos. O problema da camada limite com malhas bastante finas na direção  $y$ , mas com advecção em  $x$  pode resultar em coeficientes isotrópicos, sem a necessidade de aglomerar as malhas na direção  $y$ , como um método multigrid algébrico tenderia fazer.

A queda da performance do *solver* devido aos coeficientes anisotrópicos já foi abordada no Cap. 3 utilizando a equação de Laplace como exemplo. Aprofundando um pouco mais esta questão, quando um *solver* iterativo é utilizado existe um tempo implícito, que para não confundir com a natureza da formulação (explícita/implícita), seria melhor chamar de tempo oculto, correspondente ao tempo de transferência de informação na malha. Esse tempo é um tempo diferente do “tempo físico” que caracteriza o fenômeno considerado.

Para mostrar a existência destas diferentes escalas de tempo, considera-se a equação de difusão de calor unidimensional transiente,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

onde  $c_p$  é o calor específico,  $\kappa$  é a condutividade térmica e  $\rho$  é a massa específica.

Aplicando a análise da ordem de grandeza aos termos da Eq. (4.1), obtém-se

$$\rho c_p \frac{\Delta T}{\tau} \sim \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x^2}, \quad (4.2)$$

onde  $\tau$  representa a escala natural de tempo para transporte da informação do fenômeno físico.

Isolando  $\tau$  na Eq. (4.2) obtém-se

$$\tau \sim \frac{\rho c_p \Delta x^2}{\kappa}. \quad (4.3)$$

Por outro lado, integrando a Eq. (4.1) sobre os volumes de controle para obter a aproximação numérica da equação,

$$\int_t \int_x \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dt = \int_t \int_x \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dt, \quad (4.4)$$

obtem-se

$$\rho c_p (T_p - T_p^o) \Delta x = \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \right) \Delta t, \quad (4.5)$$

que resulta em

$$\frac{\rho c_p \Delta x (T_p - T_p^o)}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\Delta x} T_E + \frac{\kappa}{\Delta x} T_W - 2 \frac{\kappa}{\Delta x} T_P. \quad (4.6)$$

Analisando os coeficientes dos dois lados da Eq. (4.6) é visto que

$$\frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\kappa}{\Delta x}, \quad (4.7)$$

Definindo  $\Delta t = \tau$  e isolando este termo na Eq. (4.7), obtém-se

$$\tau \sim \frac{\rho c_p \Delta x}{\kappa / \Delta x} \sim \frac{m c_p}{\kappa / \Delta x} = \frac{C}{K}. \quad (4.8)$$

onde  $C$  e  $K$  são, respectivamente, a capacitância e a condutância do volume de controle. É lógico que o tempo de propagação da informação física no meio, neste caso da condução de calor, depende da capacidade de reter a informação (numerador) e da capacidade de conduzir a informação (denominador).

Tomando a Eq. (4.6) pode-se ver que  $A_e = \kappa / \Delta x$ , e assim definir a Eq. (4.8) em termos de  $\tau_e$ , que é a escala natural de tempo para transporte de informação entre os nós P e E, por

$$\tau_e = \frac{\rho c_p \Delta x}{\kappa / \Delta x} = \frac{\rho c_p \Delta x}{A_e}. \quad (4.9)$$

Comparando a expressão obtida na Eq. (4.8) para  $\tau$  com a expressão obtida na Eq. (4.3), pode-se ver que as expressões são iguais e que realmente representam a escala natural de tempo para transporte de informação entre os nós da malha.

Estendendo o conceito apresentado acima, na Eq. (4.9), para problemas multidimensionais pode-se definir a escala de tempo para a propagação de informação entre dois nós adjacentes  $i$  e  $j$  em função dos coeficientes do problema como

$$\tau_{i,j} = \frac{\rho c_p \Delta V}{A_{i,j}}. \quad (4.10)$$

No coeficiente no denominador poderão estar incluídos também os efeitos de propagação por advecção, tornando a Eq. (4.10) geral para problemas advectivos e difusivos.

O conceito de escalas de tempo pode ser também usado para determinar o tempo implícito (ou oculto) envolvido nos *solvers* iterativos. Quando um método numérico para a resolução das equações diferenciais é aplicado ao conjunto de equações no formato da Eq. (4.6), a solução convergida é aproximada por propagação de perturbações através do domínio de solução na tentativa de diminuir o resíduo total do conjunto de equações. Para os *solvers* isto implica em um passo de tempo sobre o qual a solução no nó  $i$  é avançada em uma iteração.

Considerando novamente a equação 1D e integrando sobre o espaço e o tempo

$$\frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta t_i} T_P^{k+1} = A_w T_W^{k+1} + A_e T_E^k + \left( \frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta t_i} - A_w - A_e \right) T_P^k, \quad (4.11)$$

onde  $A_w = \kappa / \Delta x$ ,  $A_e = \kappa / \Delta x$  e  $k$  representa o nível de iteração.

Levando em conta a similaridade da Eq. (4.11) com a equação obtida utilizando o solver Gauss-Seidel<sup>1</sup>, observa-se que o passo de tempo que está implícito na varredura do método iterativo é dado por

$$\Delta t_i = \frac{\rho c_p \Delta x}{A_w + A_e}, \quad (4.12)$$

que também pode ser escrito como

$$\Delta t_i = \frac{1}{\frac{A_w}{\rho c_p \Delta V} + \frac{A_e}{\rho c_p \Delta V}} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_w} + \frac{1}{\tau_e}}. \quad (4.13)$$

Pode-se ver, de forma geral, que o passo de tempo do transiente distorcido de uma iteração de Gauss-Seidel no nó  $i$  está relacionado com a escala de tempo de transporte do nó  $i$  para seu nós vizinhos  $j$ , da seguinte forma

$$\Delta t_i = \frac{1}{\sum_{j \in NB} \frac{1}{\tau_{i,j}}}, \quad (4.14)$$

e, ocorrendo uma variação significativa nas escalas de tempo de transporte da informação do nó  $i$  para seus nós vizinhos, a Eq. (4.14) se reduz a

$$\Delta t_i = \min(\tau_{i,nb}) \approx \min\left(\frac{1}{A_{i,nb}}\right), \quad (4.15)$$

---

<sup>1</sup> O solver Gauss-Seidel produz a seguinte aproximação  $T_P^{k+1} = \frac{A_w T_W^{k+1} + A_e T_E^k}{A_p}$ . Maiores detalhes sobre o método são apresentados no capítulo 4.

o que implica que o passo de tempo do *solver* Gauss-Seidel será dominado pelas menores escalas de tempo de transporte de informação.

Conclui-se, assim, que existe uma escala natural de tempo associada com as equações discretizadas, a qual é requerida para o transporte de informação entre dois nós adjacentes na malha e é inversamente proporcional ao coeficiente que conecta esses nós. A aplicação do *solver* Gauss-Seidel em um nó  $i$  é equivalente a avançar um problema transiente por um passo de tempo  $\Delta t_i$ , sendo o passo de tempo do *solver* dado pela menor escala de tempo de transporte de informação entre o nó  $i$  e seus vizinhos.

Portanto, a escolha da forma como é feita a aglomeração afeta os coeficientes da malha grossa influenciando a performance do *solver* nesta malha. A variação na escala de tempo de transporte em uma célula da malha grossa irá ser reduzida se as células da malha fina que são “vizinhas” e possuem uma pequena escala de tempo de transporte de informação (coeficiente grande) forem adicionadas. Simultaneamente devem ser excluídas as células adjacentes (da malha fina) que possuem uma escala de tempo de transporte de informação grande (coeficiente pequeno). A definição do que seria “grande” ou “pequeno” em termos de coeficientes é determinado tomando-se por base a ordem de grandeza de todos os coeficientes presentes no problema considerado.

## 4.2 Esquema de aglomeração

Como já comentado na seção anterior o princípio do algoritmo de aglomeração consiste em adicionar células com escalas de tempo de transporte de informação “pequenas” (coeficientes “grandes”) a fim de melhorar o desempenho do *solver* utilizado.

O esquema de aglomeração adaptativo começa com uma única célula na malha fina e através de um conjunto de regras determina quais os vizinhos devem ser incluídos em cada novo bloco da malha grossa. Os novos membros da célula (bloco) grossa são examinados para determinar quais dos seus vizinhos devem ser incluídos, e assim sucessivamente até que a célula grossa alcance o tamanho desejado, ou não haja mais nenhum vizinho a ser adicionado.

Utilizando a nomenclatura proposta por Elias (1993) (e bastante empregada na área computacional para determinar hierarquias), a célula da malha fina cujos vizinhos estão sendo examinados é conhecida como “pai”, e estes vizinhos são conhecidos como “filhos”. E o “pai” do corrente “pai” é conhecido como “avô”.

Pode-se ver o processo de aglomeração sistematizado nas Figs. 4.1 e 4.2. Na Fig. 4.1 o esquema de aglomeração é apresentado de modo geral. O processo inicia com a escolha de um novo “pai”. Para simplificar, os primeiros “pais” de cada novo bloco são selecionados na

mesma ordem de varredura do solver iterativo. É procurada uma célula que possui o maior coeficiente de ligação com a célula “pai”, que aqui será denominada de “possível filho”. Se esta é encontrada, é efetuada a primeira aglomeração. No momento da primeira aglomeração é definida que a antiga célula “pai” torna-se célula “avô”. A célula “filho” torna-se novo “pai”.

Em seguida é efetuado o teste se o número de células aglomeradas no bloco é menor que um número pré-definido de células por bloco. Se sim, o processo de aglomeração continua.

Seguindo o esquema descrito na Fig. 4.1, pode-se ver que a procura pelo “melhor filho” deve ser feita de acordo com o procedimento da Fig. 4.2. Esta figura descreve uma função que retorna o “melhor filho”, se ele existe. Existem duas possibilidades de escolha do “melhor filho”: a primeira é a célula que possui boa posição geométrica no bloco e ainda um coeficiente de conexão com a célula “pai” relativamente “grande” (com valor próximo ao do coeficiente de maior conexão com a célula pai), sendo denominada de  $S2$ . Se não for possível obter uma célula com boa posição geométrica, o melhor filho fica sendo a célula com a maior conexão com a célula pai, o  $S1$ .

A condição de boa posição geométrica no bloco refere-se ao fato da célula ter outros vizinhos no bloco além do “pai”.

De qualquer forma, a célula escolhida deve obrigatoriamente satisfazer duas regras fundamentais: a regra um e a dois (Elias, 1993). A regra um estabelece que o coeficiente que conecta o “pai” com o “possível filho” deve ser da mesma ordem ou maior que a metade do valor do coeficiente que conecta o “pai” com o “avô”, ou seja,

$$\max(A_{fs}, A_{sf}) \geq \max(A_{gf}, A_{fg}) / 2, \quad (4.16)$$

onde o subscrito  $f$  representa a célula “pai”,  $s$  a célula “possível filho” e  $g$  a célula “avô”.

Se esta regra for satisfeita parte-se para efetuar o teste da regra dois. Um “possível filho” pode ser aglomerado com o “pai” se o coeficiente que conecta o “pai” com o “possível filho” é da mesma ordem ou maior que metade do valor do coeficiente que conecta o “possível filho” com seu “melhor vizinho”, conforme pode ser visto na equação abaixo

$$\max(A_{fs}, A_{sf}) \geq \max(A_{sn}, A_{ns}) / 2, \quad (4.17)$$



onde novamente o subscrito  $f$  representa a célula “pai”,  $s$  a célula “possível filho” e  $n$  a célula “melhor vizinho”.

No caso do possível “filho”  $S2$ , ainda é necessário que o coeficiente que o conecta com o “pai” seja maior que o coeficiente que conecta o possível “filho”  $S1$  com o “pai” dividido por quatro. Isto para garantir que a célula além de estar bem posicionada no bloco, tenha um coeficiente de conexão relativamente grande.

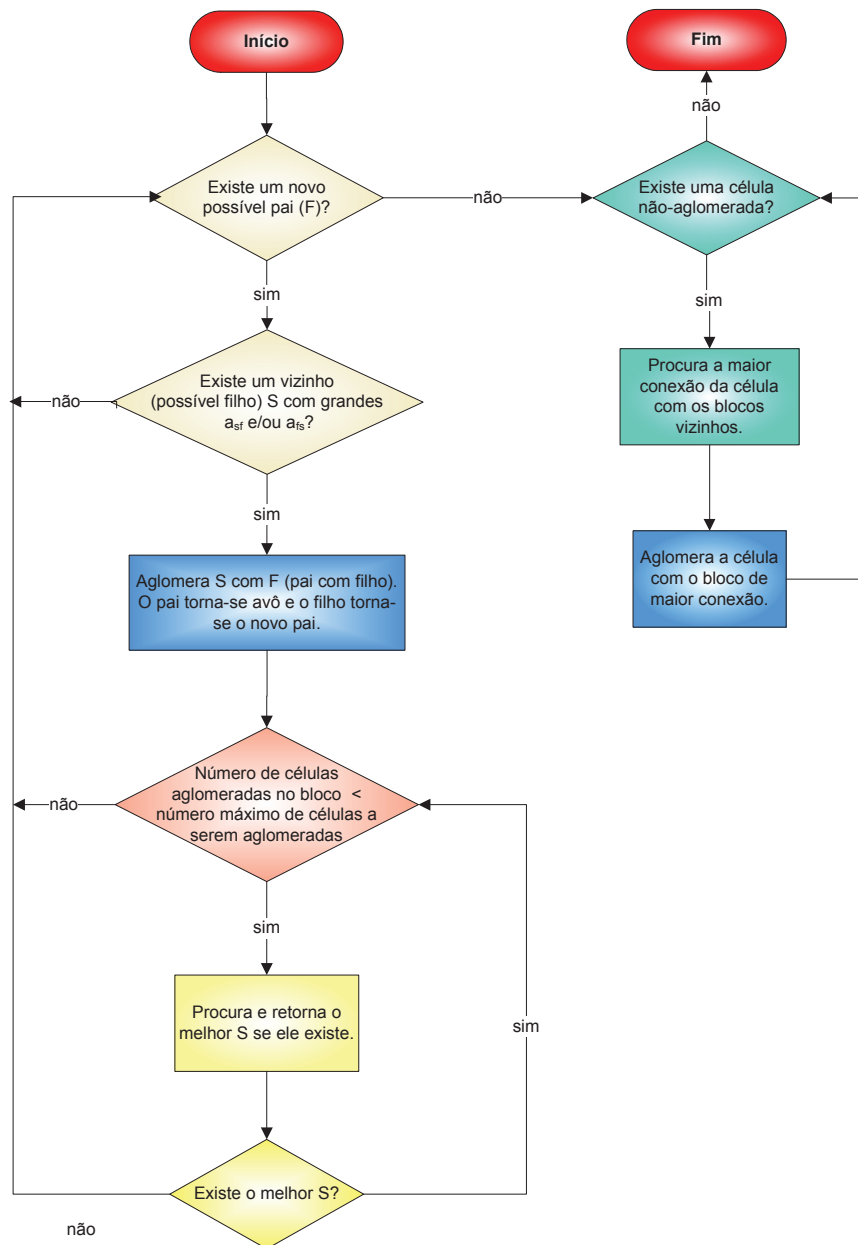


Figura 4.1 Fluxograma do esquema de aglomeração adaptativo.

Assim, este procedimento continua até a célula grossa atingir o tamanho especificado ou não ter mais vizinhos a serem adicionados. Então, um novo “pai” é escolhido dando

origem a uma nova célula (bloco) grossa e o processo aglomeração continua até que a última célula seja examinada.

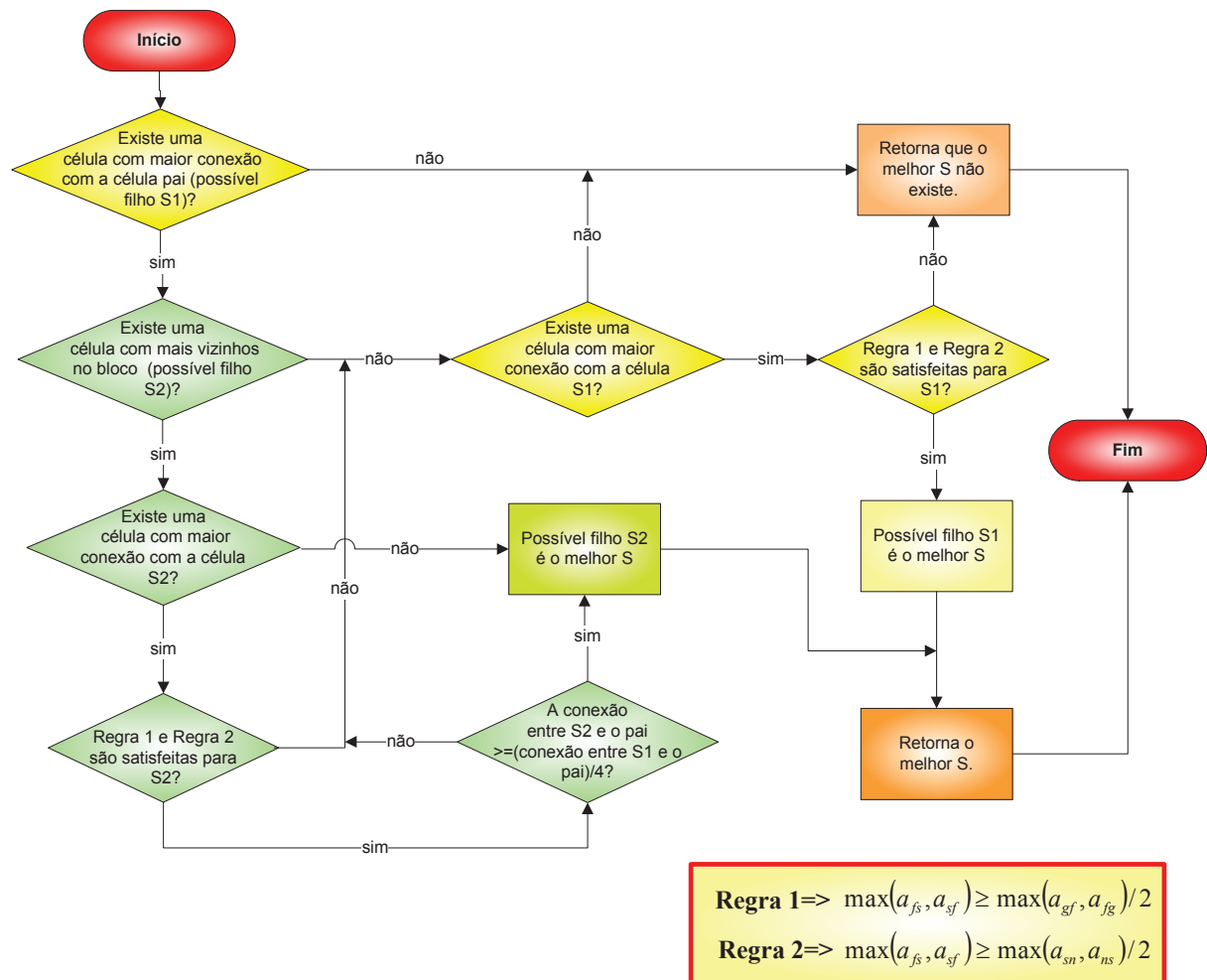


Figura 4.2 Procedimento de procura para o “melhor filho”.

Como pode ser notado, considera-se para as duas regras, um fator de  $1/2$ , e para a comparação entre o “possível filho” com boa posição geométrica e o com maior coeficiente o fator de  $1/4$ , os quais podem ser modificados, dependendo do quão criteriosa deseja-se que seja a escolha das células a serem aglomeradas.

Seguindo o procedimento de aglomeração da Fig. 4.1, é possível que tenham restado células que não satisfizeram as regras e não foram aglomeradas em nenhum bloco. Para eliminar este grande esforço computacional com essas células sozinhas, estas são forçadas a juntar-se à célula (bloco) da malha grossa de seu vizinho com o qual possuem a mais forte conexão.

O tamanho do agrupamento é outro fator que deve ser considerado. Tipicamente a aglomeração do multigríd clássico cria células grossas com blocos de  $2 \times 2$  células. Assim

fazendo-se um paralelo, pode-se criar aglomerações com quatro ou cinco células. Ainda, o uso de agrupamentos com um pequeno número de células faz com que o valor da correção para o bloco seja menos distorcido.

Assim, são necessários vários níveis hierárquicos de malhas grossas dependendo principalmente do quão fina é a malha original.

Considerando um problema de condução de calor onde temos somente uma variável a ser calculada fica óbvia a escolha de qual coeficiente será utilizado como base para efetuar a aglomeração, porém no caso de problemas acoplados o esquema de aglomeração das células deve ser feito baseado nos coeficientes da variável ou nos coeficientes do conjunto de variáveis que melhor represente o problema físico considerado e, as demais variáveis presentes no problema são aglomeradas seguindo o mesmo esquema. No caso de problemas de escoamentos, a variável mais importante, geralmente, é a pressão, porém são feitos testes utilizando todas as variáveis presentes no problema além de normas, traço e determinante da matriz para comprovar quais técnicas trarão melhores resultados. No próximo item serão explicados alguns esquemas de aglomeração que foram testados.

### 4.3 Esquemas de aglomeração em problemas acoplados

Conforme visto no Cap. 3, considerando um problema de escoamento bidimensional, onde o conjunto de equações (equações da conservação da quantidade de movimento linear nas direções  $x$  e  $y$  e equação de conservação da massa) é aproximado de forma acoplada obtém-se um sistema de  $3xN$  equações a  $3xN$  incógnitas (com  $N$  igual ao número de volumes de controle). Este sistema linear é dividido em “blocos” onde cada um dos blocos representa um dos volumes de controle com seus nove coeficientes.

A matriz de coeficientes e os vetores das incógnitas e dos termos independentes são mostrados novamente na Eq. (4.18) a fim de relembrar o leitor.

$$[A] = \begin{bmatrix} [A^{uu}] & [A^{uv}] & [A^{uP}] \\ [A^{vu}] & [A^{vv}] & [A^{vP}] \\ [A^{Pu}] & [A^{Pv}] & [A^{PP}] \end{bmatrix} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \\ B^P \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Têm-se a tarefa de escolher entre os nove coeficientes da matriz  $A$  (da Eq. (4.18) acima) ou entre alguma possível combinação que envolva estes coeficientes, qual será o valor base utilizado para realizar a aglomeração.

Neste trabalho foram testados os nove coeficientes da matriz acima, além de alguns tipos de normas e o determinante de matriz, os quais são vistos em mais detalhes a seguir.

#### 4.3.1 Norma de Frobenius

A norma de Frobenius de uma matriz é definida por

$$\|A\|_F = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.19)$$

Esta consiste no somatório de todos os elementos da matriz elevados ao quadrado, sendo então extraída a raiz do somatório.

#### 4.3.2 Norma da Soma (colunas):

A norma da soma de uma matriz é definida por

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (4.22)$$

e corresponde ao máximo dos somatórios dos módulos dos elementos das colunas.

#### 4.3.3 Norma do Máximo (linhas):

A norma do máximo de uma matriz é definida por

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \quad (4.23)$$

e corresponde ao máximo dos somatórios dos módulos dos elementos das linhas.

#### 4.3.4 Norma Euclidiana:

A norma euclidiana de uma matriz é definida por

$$\|A\|_2 = [\rho(A^H A)]^{1/2} = [\rho(AA^H)]^{1/2}. \quad (4.24)$$

onde  $\rho(A)$  designa o raio espectral da matriz  $A$ .

O raio espectral de uma matriz  $A$  é definido como

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|, \quad (4.25)$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A$ .

Assim, o raio espectral de uma matriz é definido como o módulo do autovalor de maior módulo dessa matriz.

#### 4.3.5 Traço da matriz

O traço de uma matriz quadrada, de ordem  $n$ :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (4.26)$$

#### 4.3.6 Determinante da matriz

O determinante da matriz, no caso aqui considerado, de ordem  $n = 3$ .

Os resultados obtidos por meio da aplicação dos esquemas acima citados (normas, determinante, traço da matriz) bem como utilizando os coeficientes da matriz vista na Eq. (4.18) como esquemas de aglomeração são apresentados no capítulo 6.

No próximo capítulo será mostrado o esquema numérico o qual será utilizado para aproximar o sistema de equações e no qual o método ACM com aglomeração adaptativa será testado.

## CAPÍTULO 5

### O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS (EbFVM)

O método de Volumes Finitos baseado em Elementos (*Element based Finite Volume Method* – EbFVM) foi o método escolhido para efetuar a aproximação das equações utilizadas para resolver os problemas de escoamento de fluidos e transferência de calor. Neste método, o domínio computacional é coberto por elementos (com o mesmo conceito utilizado no método de Elementos Finitos), e a partir deles são construídos os volumes de controle.

Os volumes de controle são criados utilizando-se o método das medianas, o qual consiste em juntar-se o centro dos elementos com as suas medianas. O volume de controle resultante é, então, formado por subvolumes de controle (SVC) de elementos vizinhos. Os fluxos obtidos da integração das equações de conservação são avaliados nos pontos de integração. Várias regras de integração podem ser usadas para representar melhor os fluxos na superfície usando pontos de integração e esquemas de interpolação.

Para que o esquema numérico permita a varredura por elementos, o cálculo de qualquer propriedade ou informação geométrica no ponto de integração deve depender somente dos valores da variável e dos dados geométricos armazenados nos nós os quais definem o elemento.

Na Fig. 5.1 temos um exemplo de uma geometria discretizada por quadriláteros, enfatizando as diferenças entre elementos (quadriláteros) e volumes de controle, os quais são construídos ao redor dos nós da malha. O elemento é definido por meio das coordenadas dos nós da malha e nos nós estão armazenadas as incógnitas do problema.

Cada elemento na malha é tratado de forma individual no EbFVM não importando quão distorcido o elemento possa estar em termos de coordenadas globais. Isto é possível devido ao uso de coordenadas locais.

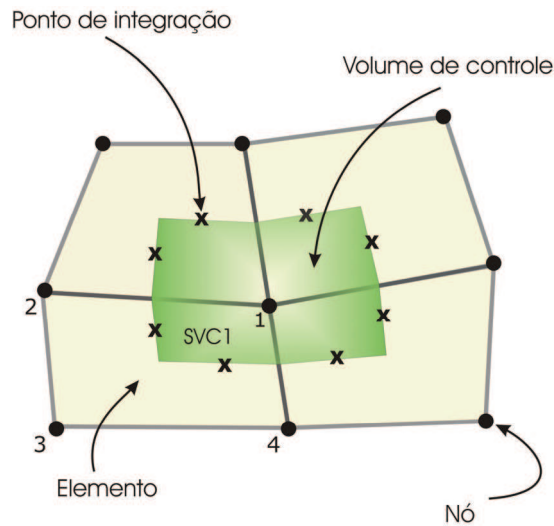


Figura 5.1 Elemento e volume de controle no EbFVM.

Na Fig. 5.2 podemos ver um exemplo de transformação de um elemento do plano físico  $(x,y)$  para o plano computacional  $(\xi, \eta)$ , cujos eixos variam de  $-1 \leq \xi \leq 1$  e  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

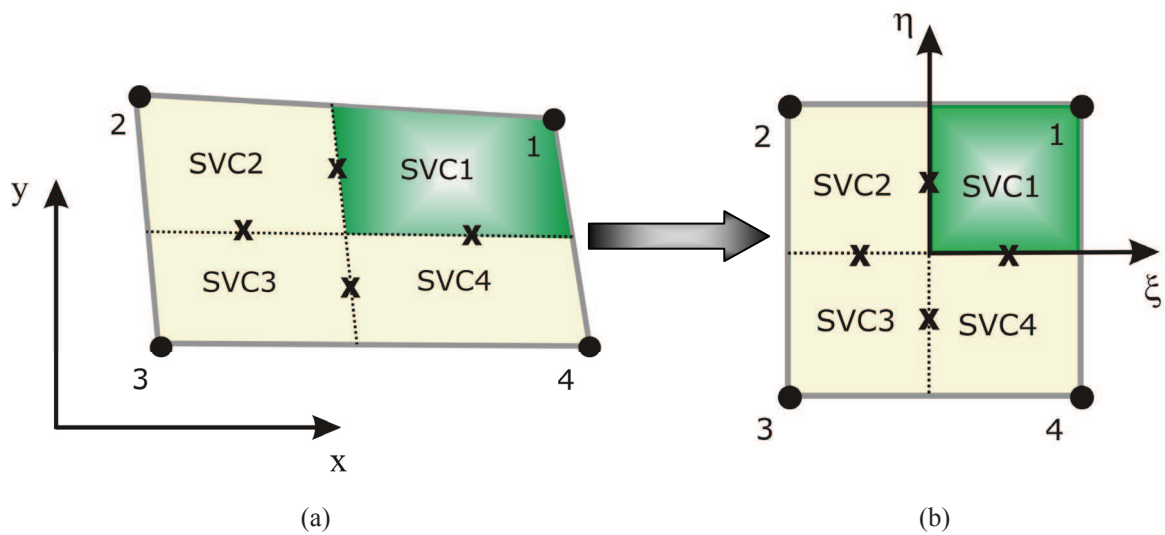


Figura 5.2 Domínios (a) físico e (b) computacional.

Assim pode-se definir

$$\xi = \xi(x, y), \tag{5.1}$$

$$\eta = \eta(x, y), \tag{5.2}$$

onde as diferenciais  $d\xi$  e  $d\eta$  podem ser escritas como

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy, \quad (5.3)$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy, \quad (5.4)$$

ou colocando-se na forma de matriz

$$[d^T] = [A][d^F], \quad (5.5)$$

onde

$$[d^T] = \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$[d^F] = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix},$$

e  $d^T$  e  $d^F$  representam os comprimentos nos planos físico e transformado (computacional).

De forma inversa também podemos escrever

$$[d^F] = [B][d^T], \quad (5.6)$$

onde  $d^T$  e  $d^F$  foram definidos acima e  $B$  é dado por

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$



Comparando as Eqs. (5.5) e (5.6) podemos ver que

$$[A] = [B]^{-1}, \quad (5.7)$$

onde

$$[B]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} & -\frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \\ -\frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} & \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \end{bmatrix}.$$

Sabendo que o Jacobiano é dado por

$$J = \det[A] = \frac{1}{\det[B]}, \quad (5.8)$$

então

$$J = \frac{\left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]}{\left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]} = \frac{1}{\left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]}. \quad (5.9)$$

Assim das Eqs. (5.7), (5.8) e (5.9) tem-se que

$$[A] = [B]^{-1} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

onde obtêm-se as métricas da transformação de coordenadas

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (5.11.1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -J \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad (5.11.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -J \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (5.11.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = J \frac{\partial x}{\partial \xi}. \quad (5.11.4)$$

Pode-se também definir as coordenadas  $x$  e  $y$  no plano transformado em função das coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  de nó  $i$  do plano físico

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad (5.12.1)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i. \quad (5.12.2)$$

onde  $N_i$  são as funções de forma que podem ser usadas para descrever as variações das coordenadas globais bem como as variações da incógnita do problema em função do elemento. Considerando-se quadriláteros, as funções de forma  $N_i$  são definidas por

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (5.13.1)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (5.13.2)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (5.13.3)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta). \quad (5.13.4)$$

Partindo-se de uma variável genérica  $\phi$  pode-se representá-la, bem como suas derivadas, em coordenadas locais por

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \phi_i, \quad (5.14)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\xi, \eta} = \sum_{i=1}^4 \left. \frac{\partial N_i}{\partial x} \right|_{\xi, \eta} \phi_i, \quad (5.15.1)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\xi, \eta} = \sum_{i=1}^4 \left. \frac{\partial N_i}{\partial y} \right|_{\xi, \eta} \phi_i. \quad (5.15.2)$$

As derivadas das funções de forma  $N$  em relação às coordenadas globais  $x$  e  $y$  são dadas por

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right], \quad (5.16.1)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = J \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right], \quad (5.16.2)$$

e as derivadas de  $N$  relacionadas às coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  são

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (5.17.1)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (5.17.2)$$

O Jacobiano e as métricas da transformação de coordenadas foram apresentados anteriormente nas Eqs. (5.9) e (5.11.1-4). Assim, têm-se todas as relações geométricas necessárias para que as equações de conservação possam ser integradas. Deve ser observado

que as funções de forma interpolam os valores dos nós para qualquer ponto no interior do elemento através de funções bilineares das variáveis no plano transformado. Portanto, quando os elementos são muito distorcidos estas aproximações podem não ser adequadas.

### 5.1 Equações de conservação

O conjunto das equações diferenciais parciais que regem os fenômenos de mecânica de fluidos e transferência de calor pode ser representado pela seguinte equação, escrita em uma forma geral

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S^\phi, \quad (5.18)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $t$  o tempo,  $u_j$  são as componentes cartesianas do vetor velocidade e  $x_j$  as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O índice  $j$  implica no somatório dos termos dentro da equação. Têm-se, ainda as variáveis genéricas, as quais são representadas conforme a equação considerada, com  $\phi$  representando as velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  para as equações da conservação da quantidade de movimento linear nas direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , respectivamente,  $T$  na equação da conservação da energia e  $I$  na conservação da massa;  $\Gamma^\phi$  representa a viscosidade dinâmica  $\mu$  na equação da conservação da quantidade de movimento, a razão entre a condutividade térmica e o calor específico  $\kappa/c_p$  na equação da conservação da energia e  $0$  na equação da conservação da massa;  $S^\phi$  é o termo fonte nas equações da conservação da energia e da quantidade de movimento (incluindo o termo  $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ ) e  $0$  na conservação da massa.

Para os objetivos deste trabalho considera-se o escoamento incompressível com propriedades constantes e em regime permanente, mas mesmo assim os termos transientes são mantidos para efeitos de melhor controle dos processos iterativos. As equações, mantendo a forma conservativa, podem ser escritas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + S^{u_i}, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S^T. \quad (5.21)$$

Na Eq. (5.20) pode-se notar a presença de uma parcela a mais do tensor tensão, denotada com a barra superior. Esta parcela é importante, mas poderia ter sido desprezada, já que estamos considerando o escoamento incompressível com  $\mu$  constante. Ela é mantida para manter implicitamente em todas as equações do movimento a influência das três componentes do vetor velocidade a fim de melhorar o acoplamento entre as equações quando não se deseja empregar métodos segregados para tratar o acoplamento pressão-velocidade.

Para escoamentos bidimensionais sem transferência de calor, como é o caso dos problemas tratados neste trabalho, as equações apresentam-se no seguinte formato

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right), \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right), \quad (5.24)$$

Logo a seguir será visto o processo de discretização das Eqs. (5.22), (5.23) e (5.24) pelo método de Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM).

## 5.2 Integração das equações de conservação

A discretização das equações diferenciais sobre os volumes de controle pode ser obtida por meio da integração das equações diferenciais na forma conservativa sobre o volume de controle ou aplicando-se os balanços das propriedades em questão nos volumes de controle. No presente trabalho optou-se pela primeira alternativa. Efetuando-se a integração sobre a equação no formato geral (Eq. (5.18)), tem-se

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \phi) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV + \int_V S^\phi dV. \quad (5.25)$$

Definindo-se o vetor normal à superfície de integração considerando o sentido de integração anti-horário como pode ser visto na Fig. 5.3

$$dn_j = \Delta y \vec{i} - \Delta x \vec{j}, \quad (5.26)$$

$$\Delta x = x_b - x_a, \quad (5.27)$$

$$\Delta y = y_b - y_a, \quad (5.28)$$

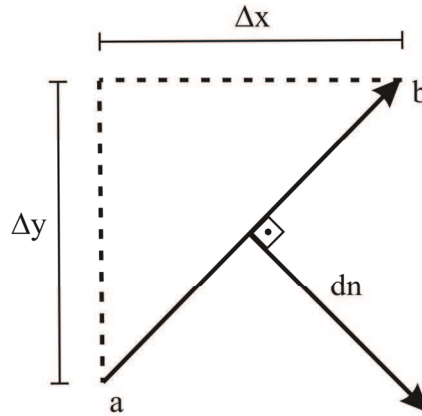


Figura 5.3 Vetor normal à superfície de integração.

Agora utilizando o teorema da divergência de Gauss, os termos advectivos e difusivos podem ser representados sob a forma de integral de área ao invés de volume. Assim a Eq. (5.25) assume a forma

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_S (\rho u_j \phi) dn_j - \int_S \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dn_j - \int_V S^\phi dV = 0 \quad (5.29)$$

e obtém-se

$$\frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + \sum_{pi} [(\rho u_j \phi) \Delta n_j]_{pi} - \sum_{pi} \left[ \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \Delta n_j \right]_{pi} - S^\phi \Delta V = 0, \quad (5.30)$$

onde o sub-índice  $P$  representa o nó considerado,  $p_i$  são os pontos de integração,  $M_p$  é a massa no volume de controle, o sobrescrito “o” significa o valor no tempo anterior e  $\Delta n_j$  é definido como  $\Delta y$  quando  $j=1$  e  $-\Delta x$  quando  $j=2$ .

A equação para cada volume de controle é obtida pelo somatório dos subvolumes de controle relacionados a cada nó. Na Fig. 5.4 tem-se uma malha de quatro elementos, cada qual sendo dividido em quatro partes pelo método das medianas, dando assim origem aos subvolumes de controle que formam cada um dos elementos considerados.

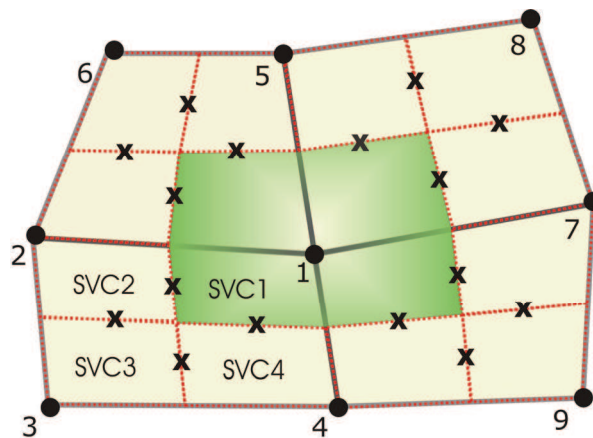


Figura 5.4 Representação do volume de controle e dos elementos pelos quais este é formado.

Assim, tem-se uma descrição geral da metodologia EbFVM. Cabe agora, decidir quais funções de interpolação serão utilizadas.

Independentemente da metodologia empregada para a discretização das equações governantes, o problema do acoplamento pressão-velocidade existe, sendo que a solução segregada das equações introduz instabilidades na solução e é dependente do passo de tempo estabelecido com base na experiência do analista numérico. Uma alternativa é a utilização de métodos acoplados, os quais são mais robustos em termos de convergência e estáveis, porém exigem maior capacidade de processamento e armazenamento de memória.

Dentre as metodologias de volumes finitos baseado em elementos e dentre os métodos que possibilitam a utilização da solução acoplada temos o método FIELDS (*Finite Element Differential Scheme*) o qual será utilizado no trabalho e é visto a seguir.

### 5.3 Solução acoplada das equações de conservação

#### 5.3.1 Discretização das equações de conservação

Considerando um problema bidimensional, na Eq. (5.29) o diferencial de volume torna-se diferencial de área. Acrescentando-se o termo da pressão que está presente nas equações da conservação da quantidade de movimento linear, tem-se

$$\int_A \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} da + \int_S (\rho u_j \phi) dn_j - \int_S \left( \Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) dn_j + \int_S p dn_i - \int_A S^\phi da = 0. \quad (5.31)$$

A equação geral é, então, separada em partes para que possa ser melhor analisada. Por convenção, todas as variáveis nodais serão escritas em letras maiúsculas e as variáveis nos pontos de integração em minúsculas, o mesmo sendo válido para os coeficientes que multiplicam estas variáveis. Todos os coeficientes são identificados pelos superescritos e subscritos.

O primeiro superescrito identifica qual a equação, o segundo qual variável o coeficiente está multiplicando e o terceiro qual termo é representado.

Já, o primeiro subscrito representa o número do subvolume de controle (SVC) e o segundo o número do nó da variável multiplicada se o coeficiente está em letra maiúscula, ou o número do ponto de integração se o coeficiente estiver em letra minúscula.

Considerando o subvolume de controle  $I$  da Fig. 5.4, obtém-se para o termo transiente

$$\int_{SVC1} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} da = \rho J_1 \left( \frac{\Phi_1 - \Phi_1^o}{\Delta t} \right), \quad (5.32)$$

onde o superescrito “o” se refere ao valor de  $\Phi$  no passo de tempo anterior e o subscrito  $I$  se refere ao valor de no nó  $I$ . Assim no formato compacto a Eq. (5.32) pode ser escrita como

$$\int_{SVC1} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} da = \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{\phi,\phi,t} \Phi_j - B_1^{\phi,t}, \quad (5.33)$$

onde  $A$  representa os coeficientes para a equação de  $\phi$  (indicado no primeiro termo do superescrito), multiplicando a variável  $\phi$  (indicado no segundo termo), do termo transiente



(indicado no terceiro termo do superescrito). O termo  $B$  possui o mesmo significado, só que não multiplica a variável  $\phi$ , assim o segundo superescrito não se faz presente na equação.

Com relação aos subscritos, o primeiro de  $A$  e  $B$  representa o subvolume de controle e o segundo de  $A$  indica a qual nó o coeficiente pertence.

Assim, para exemplificar

$$A_{1,1}^{\phi,\phi,t} = \frac{\rho J_1}{\Delta t}, \quad (5.34.1)$$

$$A_{1,2}^{\phi,\phi,t} = A_{1,3}^{\phi,\phi,t} = A_{1,4}^{\phi,\phi,t} = 0, \quad (5.34.2)$$

$$B_1^{\phi,t} = \frac{\rho J_1}{\Delta t} \Phi_1^o. \quad (5.34.3)$$

Já o termo fonte torna-se

$$-\int_{SCV1} s_\phi da = -s_\phi \Big|_{(1/2,1/2)} J_1 = B_1^{\phi,s}, \quad (5.35)$$

onde  $S_\phi \Big|_{(1/2,1/2)}$  é o termo fonte em  $(\xi, \eta) = (1/2, 1/2)$ , ou seja, avaliado no centro do volume de controle. O segundo superescrito em  $B$  indica que o valor é do termo fonte.

Avaliando-se agora o termo advectivo em  $SVCI$ , este deve ser considerado nas sub-superfícies de controle  $SS1$  e  $SS2$ , conforme pode-se ver na Fig. 5.5. Para  $SS1$  a integral torna-se

$$\int_{SS1} (\rho u_j \phi) dn_j = \rho u_1 \phi_1 \Delta y_1 - \rho v_1 \phi_1 \Delta x_1, \quad (5.36)$$

onde  $u, v$  e  $\phi$  escritos em letras minúsculas são os valores nos pontos de integração. O subscrito  $l$  indica o valor no ponto de integração  $l$ ,  $pl$ , como está mostrado na Fig. 5.5.

Pode-se escrever uma expressão similar para  $SS2$  e obter-se a soma de  $SS1$  e  $SS2$

$$\int_{SS1+SS2} (\rho u_j \phi) dn_j = \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{\phi,\phi,a} \phi_j, \quad (5.37)$$

onde  $a$  em letra minúscula indica que o coeficiente pertence a uma variável do ponto de integração e o segundo subscrito de  $a$  e o primeiro de  $\phi$  indica qual o ponto de integração. O superescrito  $a$  indica que o termo é advectivo.

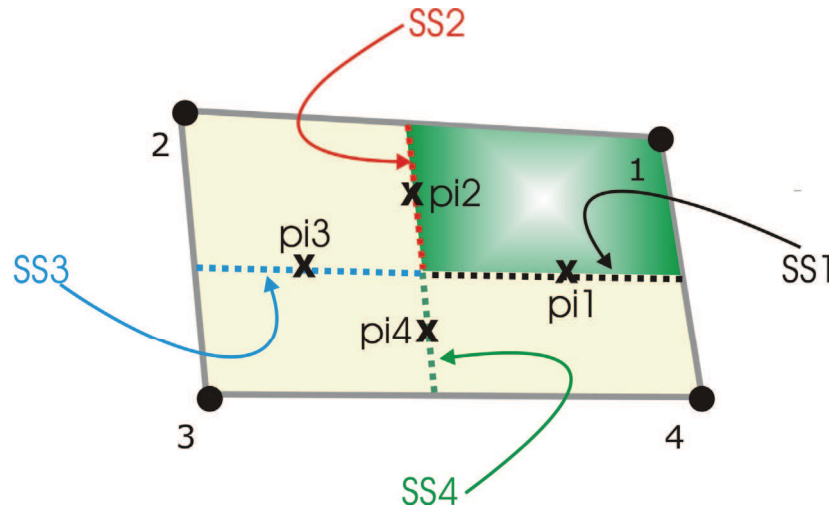


Figura 5.5 Representação dos pontos de integração e das sub-superfícies de controle em um elemento.

Para o termo da pressão tem-se

$$\int_{SS1+SS2} p dn_1 = p_1 \Delta n_1 - p_2 \Delta n_2 = \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{\phi pp} p_j, \quad (5.38)$$

onde  $a$  em letra minúscula indica que o coeficiente pertence a uma variável do ponto de integração e o segundo subscrito de  $a$  e o primeiro de  $p$  indica qual o ponto de integração. Os superescritos indicam que a equação é para  $\phi$ , a variável multiplicada é a pressão no termo de pressão.

O termo difusivo na sub-superfície  $I$  pode ser representado, por

$$-\int_{SS1} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dn_j = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{pi1} \Delta y_1 + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{pi1} \Delta x_1, \quad (5.39)$$

onde as derivadas são avaliadas no ponto de integração  $I$ .

Utilizando as funções de forma obtém-se

$$-\int_{SS1} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dn_j = -\Gamma \left( \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j \right) \Delta y_1 + \Gamma \left( \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial y} \Phi_j \right) \Delta x_1, \quad (5.40)$$

cujas derivadas são avaliadas em  $(\xi, \eta) = (1/2, 0)$ . Adicionando a este termo, um similar para  $SS2$ , pode-se representar a soma da seguinte forma

$$-\int_{SS1+SS2} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dn_j = \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{\phi,\phi,d} \Phi_j, \quad (5.41)$$

onde o terceiro superescrito indica que o termo é difusivo.

Então para um subvolume de controle arbitrário  $i$

$$\sum_{j=1}^4 (A_{i,j}^{\phi,\phi,t} + A_{i,j}^{\phi,\phi,d}) \Phi_j + \sum_{j=1}^4 a_{i,j}^{\phi,\phi,a} \phi_j = B_i^{\phi,t} + B_i^{\phi,s}. \quad (5.42)$$

Esta é a equação de uma parte de um volume de controle. Adicionando as equações dos quatro subvolumes de controle e escrevendo na forma matricial, obtêm-se

$$(A_{i,j}^{\phi,\phi,t} + A_{i,j}^{\phi,\phi,d}) [\Phi_j] + (a_{i,j}^{\phi,\phi,a}) [\phi_j] = [B_i^{\phi,t}] + [B_i^{\phi,s}], \quad (5.43)$$

onde os parênteses representam matrizes e os colchetes, vetores. A linha na matriz indica o subvolume de controle e a coluna, o nó (no caso de letra maiúscula) ou o ponto de integração (no caso de letra minúscula).

### 5.3.2 O princípio básico do FIELDS

Um aspecto bastante importante a ser considerado é a respeito da interpolação de variáveis nos pontos de integração. Em funções de interpolação do tipo diferenças centrais (que possuem um erro de segunda ordem) podem ocorrer oscilações numéricas para problemas predominantemente advectivos e, em esquemas do tipo *upwind* (onde as propriedades são avaliadas em função da propriedade a montante) a difusão numérica introduzida é muitas vezes proibitiva.

A idéia básica do método FIELDS é propor as próprias equações do movimento para as variáveis armazenadas nos pontos de integração, fazendo com que os efeitos da física do escoamento sejam incorporados. Razões para isto seriam, segundo RAW (1985), que se o

efeito do gradiente de pressões entre os nós for incluído nas equações das velocidades dos pontos de integração, o desacoplamento dos campos de pressões não é possível e, ainda, se todos os termos da equação de transporte tiverem influência direta sobre as velocidades nos pontos de integração, a modelagem da advecção será mais precisa. O que se procura, na verdade, é uma função de interpolação que seja a solução analítica da equação diferencial parcial da variável a ser interpolada. Como isto não é possível, a função de interpolação utilizada é a própria equação diferencial discretizada da variável de interesse, a qual é introduzida na equação diferencial para a aproximação das variáveis nos pontos de integração. Não é necessário que esta discretização seja conservativa, já que ela apenas representa o valor aproximado da variável no ponto de integração. No método FIELDS utiliza-se para os termos difusivos uma função de interpolação do tipo diferenças centrais e para os termos advectivos do tipo *upwind*, o que representa bem a física do problema.

Para a interpolação dos termos advectivos é necessária uma função do tipo *upwind*, que independentemente do formato da malha e complexidade do escoamento consiga identificar e avaliar a direção do escoamento, diminuindo a difusão numérica. Têm-se, então, os chamados *skew schemes*, formas de discretização que identificam e interpolam as propriedades físicas na direção do escoamento, aplicando a função de interpolação alinhada com as linhas de corrente do mesmo.

No próximo item é mostrado como são aproximadas as equações da conservação da quantidade de movimento linear nas direções  $x$  e  $y$  nos pontos de integração.

### 5.3.3 Operadores nos pontos de integração

Neste item será vista a forma de criação das equações para os pontos de integração na forma bidimensional. Considerando as propriedades físicas constantes e supondo novamente a equação genérica para  $\phi$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + S^\phi. \quad (5.44)$$

Deve-se observar que quando a Eq. (5.44) representar a equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$ ,  $\phi$  representará a velocidade  $u$  e a derivada de  $p$  será em relação à  $x$ , e quando representar a equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $y$ ,  $\phi$  representará a velocidade  $v$  e a derivada de  $p$  será em relação à  $y$ .

Cada termo da Eq. (5.44) deve ser aproximado algebricamente em cada ponto de integração. Um procedimento similar ao que foi efetuado para realizar a discretização das equações governantes será adotado aqui. Na notação agora utilizada os operadores são representados pelas letras  $C$  e  $c$  e serão usados nos pontos de integração. Assim o primeiro subscrito não mais representará o subvolume de controle e sim o ponto de integração.

### 5.3.3.1 Termos transiente e fonte

A aproximação do termo transiente é facilmente obtida para o ponto de integração  $i$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{pii} = \rho \frac{(\phi_1 - \phi_1^0)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^4 c_{i,j}^{\phi,\phi,t} \phi_j - d_i^{\phi,\phi,t}, \quad (5.45)$$

onde  $\phi_1^0$  representa o valor da variável no nível de tempo anterior.

O termo fonte é dado por

$$s_\phi \Big|_{pii} = d_i^{\phi,s}. \quad (5.46)$$

### 5.3.3.2 Termo de pressão

No caso da equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{pii} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial x} P_j = \sum_{j=1}^4 C_{i,j}^{u,p,p} P_j. \quad (5.47)$$

Tem-se uma aproximação similar para o termo da pressão na equação na direção  $y$ .

### 5.3.3.3 Termo difusivo

O termo de derivada segunda não pode ser representado pelas funções de forma pois elas são lineares. Desta forma, uma representação alternativa é buscada. O termo difusivo para todas as variáveis ( $u$ ,  $v$  e  $T$ ) pode ser representado pelo Laplaciano de uma variável genérica  $\phi$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (5.48)$$

Sabendo-se que

$$\phi = \sum_{j=1}^4 N_j \Phi_j, \quad (5.49)$$

A aproximação algébrica do Laplaciano é dada por

$$\nabla^2 \phi \Big|_{pii} = \frac{\sum_{j=1}^4 N_j \Phi_j - \phi_i}{L_d^2} = \sum_{j=1}^4 C_{i,j}^{\phi,\phi,d} \phi_j + \sum_{j=1}^4 C_{i,j}^{\phi,\phi,d} \Phi_j, \quad (5.50)$$

onde  $L_d$  é a escala de comprimento.

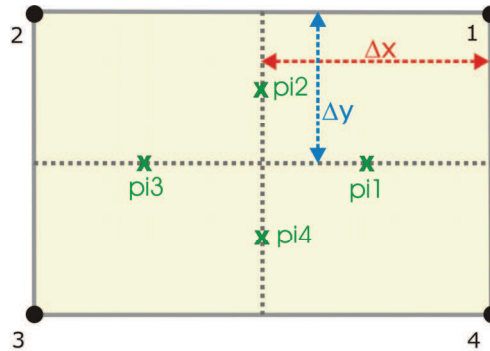


Figura 5.6 Escala de comprimentos para o cálculo de  $L_d$ .

Considerando uma malha regular como da Fig. 5.6 com  $\phi$  variando somente na direção  $x$ , o Laplaciano pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1/2(\Phi_1 + \Phi_4) - \phi_1}{1/2 \Delta x} - \frac{\phi_1 - 1/2(\Phi_2 + \Phi_3)}{3/2 \Delta x} \right\} \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ \Phi_1 + \Phi_4 + \frac{1}{3} \Phi_2 + \frac{1}{3} \Phi_3 - \frac{8}{3} \phi_1 \right\} \\ &= \frac{\frac{3}{8}(\Phi_1 + \Phi_4) + \frac{1}{8}(\Phi_2 + \Phi_3) - \phi_1}{\frac{3}{8}(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Por equivalência

$$L_{d_x}^2 = \frac{3}{8}(\Delta x)^2. \quad (5.52)$$

Considerando a variação somente a direção  $y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\left(\frac{3}{4}\Phi_2 + \frac{1}{4}\Phi_1\right) + \left(\frac{3}{4}\Phi_3 + \frac{1}{4}\Phi_4\right) - 2\phi_1}{(\Delta y)^2} \\ &= \frac{1}{(\Delta y)^2} \left\{ \frac{3}{4}\Phi_2 + \frac{3}{4}\Phi_3 + \frac{1}{4}\Phi_1 + \frac{1}{4}\Phi_4 - 2\phi_1 \right\} \\ &= \frac{\frac{3}{8}(\Phi_1 + \Phi_4) + \frac{1}{8}(\Phi_2 + \Phi_3) - \phi_1}{\frac{1}{2}(\Delta y)^2}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Por equivalência

$$L_{d_y}^2 = \frac{1}{2}(\Delta y)^2. \quad (5.54)$$

Somando-se as Eqs. (5.52) e (5.54) obtém-se um valor para  $L_d$  que considera os efeitos em ambas as direções  $x$  e  $y$ :

$$L_d^2 = \frac{3}{8}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\Delta y)^2. \quad (5.55)$$

A Eq. (5.55) foi derivada considerando-se um retângulo alinhado com o eixo  $xOy$ . Para um quadrilátero qualquer esta aproximação não é válida, devendo-se substituir  $\Delta x$  e  $\Delta y$  pelos comprimentos tangencial e perpendicular, respectivamente, à face considerada. A distância  $\Delta x$  torna-se o comprimento da face enquanto que  $\Delta y$  deve ser aproximado por

$$\Delta y = \frac{|J|}{\Delta x}, \quad (5.56)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação.

### 5.3.3.4 Termo advectivo

O termo mais complexo a ser aproximado trata-se do termo advectivo. Este pode ser escrito na direção da linha de corrente  $\xi$  da seguinte forma

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \rho V \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad (5.57)$$

onde

$$V = (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad (5.58)$$

e

$$d\xi = \frac{u}{V} dx + \frac{v}{V} dy. \quad (5.59)$$

Modelando a Eq. (5.57) como uma diferença *upwind* e discretizando o termo advectivo no ponto de integração  $I$ , obtém-se

$$\rho V \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{pi1} = \rho V \frac{\phi_1 - \phi_u}{L} = \sum_{j=1}^4 C_{1,j}^{\phi,\phi,a} \phi_j + \sum_{j=1}^4 C_{1,j}^{\phi,\phi,a} \Phi_j. \quad (5.60)$$

onde o subscrito  $u$  significa *upwind* e o valor de  $V$  é conhecido das velocidades da iteração anterior.

Agora serão mostrados dois esquemas propostos por Raw (1985) para o tratamento do  $\phi_u$ . O primeiro é denominado *Skew upstream difference scheme* (Suds) e define que  $\phi_u$  é avaliado sobre o ponto de intersecção da linha de corrente  $\xi$  com uma das bordas do subvolume de controle considerado. Sendo assim,  $\phi_u$  é sempre aproximado em função das variáveis conhecidas e mais próximas do  $\phi$  considerado, seja no ponto de integração ou nos nós do elemento.

Se a direção do fluxo é dada como na Fig. 5.7, tem-se



$$\phi_u = \frac{a}{b}\Phi_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right)\Phi_1, \tag{5.61}$$

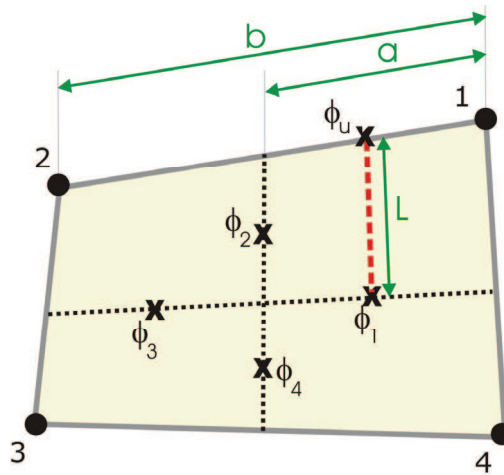


Figura 5.7 Operador advectivo 1.

Na Fig. 5.8 tem-se a representação de uma linha de corrente mais inclinada que no caso anterior. Isto dá origem a uma diferente função de interpolação para  $\phi_u$

$$\phi_u = \frac{a}{b}\phi_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right)\phi_4. \tag{5.62}$$

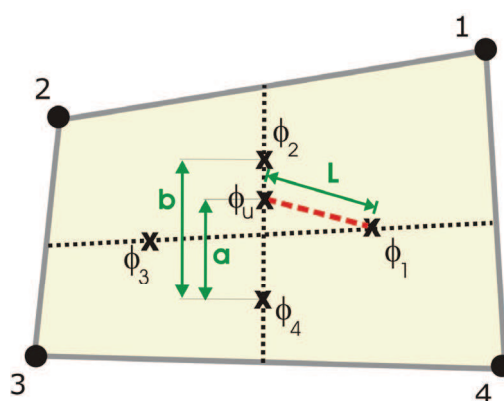


Figura 5.8 Operador advectivo 2.

A regra geral para o cálculo de  $\phi_u$  e o comprimento de escala  $L$  é tomar a linha de corrente local, passando através do ponto de integração no sentido *upwind* até interceptar a

borda do subvolume de controle e então considerar os valores nos nós ou nos pontos de integração (ou ambos) do elemento a fim de aproximar o  $\phi_u$ .

Uma outra alternativa também sugerida por Raw (1985) e Souza (2000) é o esquema denominado de *Skew upstream weighted difference scheme* (Suwds), um esquema que utiliza a razão entre os fluxos de massa avaliados em dois pontos de integração de cada subvolume de controle, ou seja, a relação entre as massas que estão saindo e entrando no volume de controle.

Considerando-se o subvolume de controle  $I$  com massa entrando, existem três possibilidades de relações entre os fluxos de massa  $m_1$  e  $m_2$ :

i) no primeiro caso,  $m_1$  e  $m_2$  possuem sinais diferentes com relação ao subvolume de controle  $I$ , conforme Fig. 5.9. Se  $|m_2| \geq |m_1|$  pode-se dizer que o fluxo de massa  $m_1$  que passa por  $SS1$ , depende diretamente de  $m_2$  que cruza  $SS2$  e assim  $\phi_1$  depende somente de  $\phi_2$ .

$$-\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} > 1, \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (5.63)$$

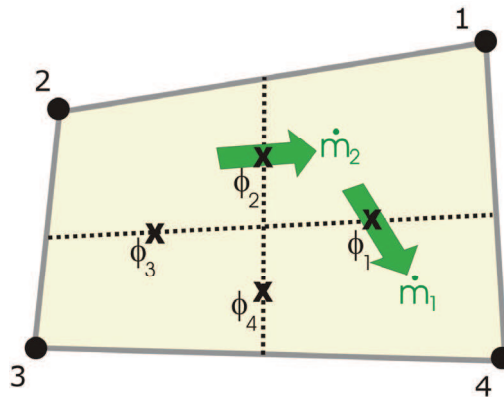


Figura 5.9 Operador advectivo do caso 1.

ii) no segundo caso,  $m_1$  e  $m_2$  deixam o subvolume de controle  $I$ . Assim todo o fluxo de massa que atravessa  $SS1$  depende somente do fluxo proveniente do interior do volume de controle e  $\phi_1$  só depende de  $\Phi_I$ , como pode ser visto na Fig. 5.10.

$$-\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} < 0, \quad \phi_1 = \Phi_1 \tag{5.64}$$

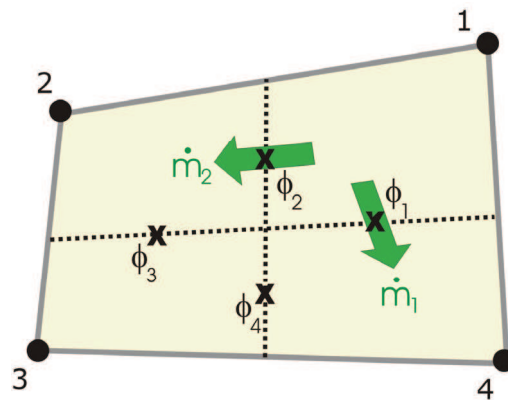


Figura 5.10 Operador advectivo do caso 2.

iii) no terceiro caso, indicado na Fig. 5.11, quando  $|m_2| < |m_1|$ , pode-se dizer que parte do fluxo de massa que atravessa *SSI* depende tanto de  $m_2$  quanto do fluxo interno do volume de controle, assim  $\phi_1$  depende de  $\phi_2$  e de  $\Phi_1$ .

$$0 < -\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} < 1, \quad \phi = -\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \phi_2 + \left(1 + \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1}\right) \Phi_1 \tag{5.65}$$

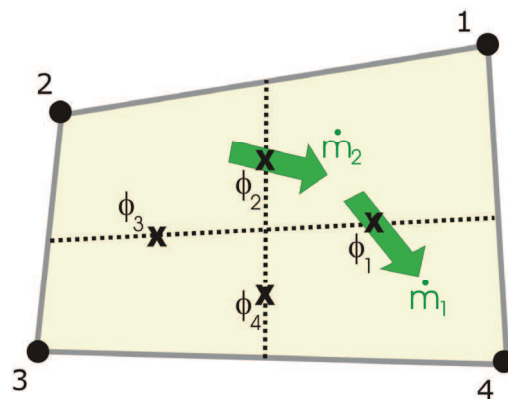


Figura 5.11 Operador advectivo do caso 3.

Estes três casos podem ser combinados na seguinte expressão geral

$$\xi = \max \left[ \min \left( -\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1}, 1 \right), 0 \right], \quad (5.66)$$

e

$$\phi_1 = \xi \phi_2 + (1 - \xi) \Phi_1. \quad (5.67)$$

Assim, o termo advectivo para o ponto de integração  $I$  pode ser avaliado pela expressão

$$\rho V \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{pi1} = \rho V \frac{\phi_1 - [\xi \phi_2 + (1 - \xi) \Phi_1]}{L}. \quad (5.68)$$

Este procedimento é utilizado de forma similar para os fluxos de massas nos demais pontos de integração.

Os dois procedimentos citados para efetuar a aproximação do termo advectivo foram testados neste trabalho. O esquema *Suds* mostrou-se eficiente obtendo facilmente a solução numérica do problema da cavidade com a tampa móvel com altos números de Reynolds, enquanto o esquema *Suuds*, para o problema da cavidade com número de Reynolds igual a 1000, por exemplo, falhou (como será visto no capítulo 6).

### 5.3.4 Fechamento das equações

A última etapa da discretização para a montagem final do sistema linear é a substituição das equações obtidas para os pontos de integração no item 5.3.3 nas equações gerais obtidas no item 5.3.1. Tomando-se a Eq. (5.43) como base, mas agora considerando a equação de conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$ , acrescentando assim um termo para a velocidade  $v$ , tem-se

$$(A_i^{u,u,t} + A^{u,u,d})[U] + (A^{u,v,d})[V] + (a^{u,u,a})[u] + (a^{u,p,p})[p] = [B^{u,t} + B^{u,s}]. \quad (5.69)$$

Pode-se observar que falta determinar o valor das variáveis  $u$  e  $p$  nos pontos de integração.

Assim, a equação de conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$  escrita para os pontos de integração, é obtida a partir da soma das Eqs. (5.45), (5.46), (5.47), (5.50) e (5.60)

$$(c^{u,u,t} + c^{u,u,a} - c^{u,u,d})[u] + (C^{u,u,a} - C^{u,u,d})[U] + (C^{u,p,p})[P] = [d^{u,t} + d^{u,s}]. \quad (5.70)$$

É importante não confundir a Eq. (5.69) com a Eq. (5.70). A Eq. (5.70) significa uma aproximação algébrica escrita para os pontos de integração e são usados  $C$  e  $c$  para os coeficientes das matrizes e  $d$  para os vetores. Já a Eq. (5.69) representa balanços de fluxos de quantidade de movimento para os subvolumes de controle e são usadas as letras  $A$  e  $a$  para os coeficientes das matrizes e  $B$  para os vetores.

Isolando  $u$  na Eq. (5.70)

$$[u] = (c^{u,u,t} + c^{u,u,a} - c^{u,u,d})^{-1} * \{(C^{u,u,a} - C^{u,u,d})[U] + (C^{u,p,p})[P] - [d^{u,t} + d^{u,s}]\} \quad (5.71)$$

e escrevendo em termos de coeficientes condensados ( $CC$ ) tem-se

$$[u] = (CC^{u,u})[U] + (CC^{u,p})[P] + [RCC^u]. \quad (5.72)$$

De forma similar para a equação da pressão

$$[p] = (CC^{p,p})[P], \quad (5.73)$$

onde

$$(CC^{p,p}) = (N_j|_{pii}). \quad (5.74)$$

Finalmente pode-se substituir as Eqs. (5.72) e (5.73) na Eq. (5.69), obtendo-se a forma final da equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$

$$\begin{aligned} & \left\{ (A_i^{u,u,t} + A^{u,u,d}) + (a^{u,u,a})(CC^{u,u}) \right\} [U] + (A^{u,v,d}) [V] + \\ & \left\{ (a^{u,p,p})(CC^{p,p}) - (a^{u,p,a})(CC^{u,p}) \right\} [P] = [B^{u,t} + B^{u,s}] - (a^{u,u,a}) [RCC^u]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Aplicando também na Eq. (5.75) o formato condensado

$$(E^{u,u}) [U] + (E^{u,v}) [V] + (E^{u,p}) [P] = [R^u]. \quad (5.76)$$

De forma similar pode-se obter a equação da conservação da quantidade de movimento linear na direção  $y$

$$(E^{v,u}) [U] + (E^{v,v}) [V] + (E^{v,p}) [P] = [R^v], \quad (5.77)$$

e a equação da conservação da massa

$$(E^{p,u}) [U] + (E^{p,v}) [V] + (E^{p,p}) [P] = [R^p]. \quad (5.78)$$

Assim, obtém-se o sistema de equações a ser resolvido.

#### 5.4 Observações sobre a montagem da matriz de coeficientes

É importante ressaltar o procedimento para a formação da matriz de coeficientes. A Fig. 5.12 apresenta uma malha formada por quatro elementos quadrangulares, a qual é usada no processo de discretização do Método de Volumes Finitos baseado em Elementos. Cada um dos quatro elementos fornece um conjunto de coeficientes que serão utilizados para a montagem da matriz global. Inicialmente monta-se uma matriz local para cada elemento (para quadriláteros tem-se uma matriz de  $4 \times 4$ ) e logo após é feita a montagem da matriz global, por meio da soma dos coeficientes (dos elementos) que estão nas posições correspondentes na matriz global. A posição dos coeficientes na matriz global é determinada através das conectividades que são fornecidas na ocasião da geração da malha e são as conectividades que definem quais nós da malha formam cada um dos elementos.

Considerando o nó 3 na Fig. 5.12, pode-se ver que ele faz parte dos quatro elementos, assim na matriz global tanto a linha como a coluna três estão preenchidas. Isto ocorre porque o cálculo dos fluxos nos pontos de integração do volume de controle 3 (construído ao redor do nó 3) envolve todos os nós da malha.

Este procedimento de montagem da matriz global é próprio da metodologia de elementos finitos e maiores informações podem ser encontradas na literatura (Hughes, 1987; Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1989).

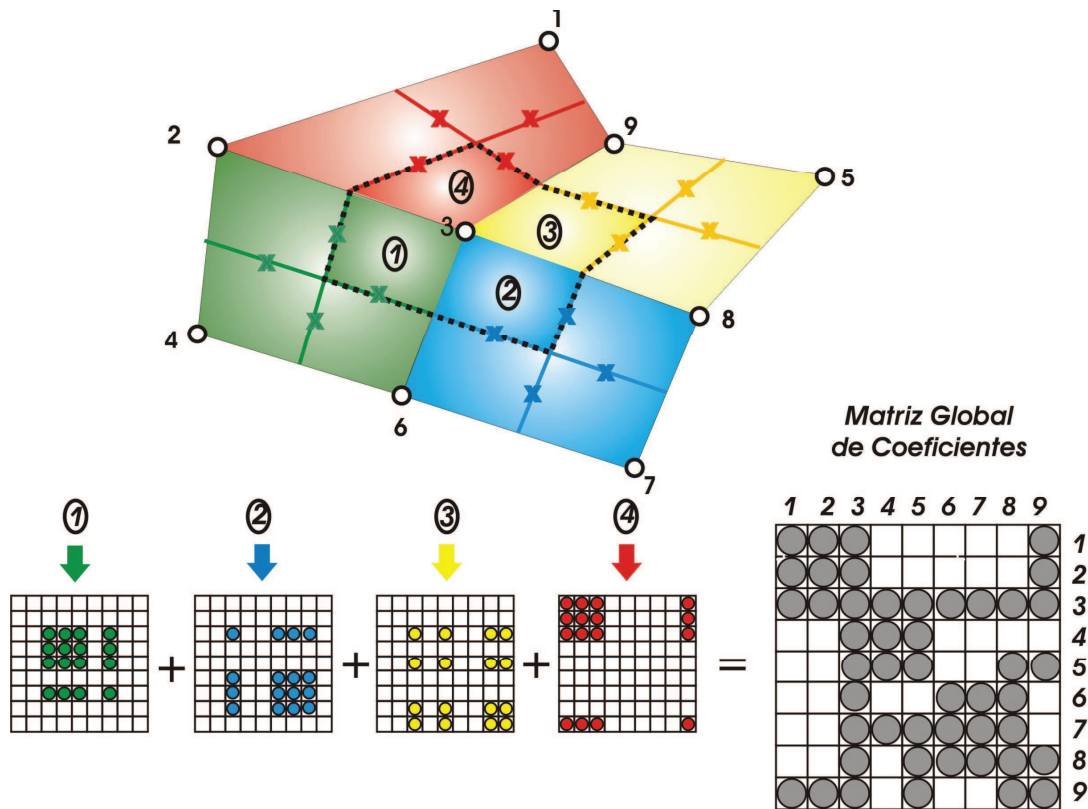


Figura 5.12 Montagem da matriz global de coeficientes.

### 5.5 Observações sobre a função de interpolação no tempo

Definidas as funções de interpolação espaciais cabe agora definir a função de interpolação no tempo. Considerando  $\phi$  a variável de interesse, podemos representar a função da seguinte forma

$$\phi^\theta = \theta\phi + (1-\theta)\phi^o, \tag{5.79}$$

onde  $\theta$  representa a posição no intervalo de tempo onde a variável  $\phi$  é avaliada.

Tem-se a formulação explícita quando  $\theta = 0$ , ou seja, todas as variáveis dos volumes de controle vizinhos são avaliadas no tempo anterior e, portanto, já são conhecidas. Já na formulação implícita, os valores das variáveis calculadas são uma média dos valores no começo e no fim do intervalo de tempo. Um dos métodos bastante conhecidos nessa classe é o de Crank-Nicolson (Maliska, 2004).

A formulação utilizada neste trabalho foi a totalmente implícita, onde  $\theta = 1$ , ou seja, os valores das variáveis são feitas iguais aos valores no fim do intervalo de tempo. Esta formulação é preferida, pois pode-se avançar o problema no tempo com passos de tempo maiores. Entretanto não significa dizer que pode ser usado qualquer tamanho de intervalo de tempo, pois o problema do acoplamento pressão-velocidade pode limitar o passo de tempo.

Outra questão diz respeito à solução do transiente. Quando se deseja resolver o transiente real o termo  $\phi^o$  não deve ser alterado enquanto o campo dessa variável não tiver convergido para o intervalo de tempo considerado. Se somente a solução do regime permanente é desejada (como nos problemas propostos neste trabalho), então não faz sentido resolver o sistema linear com precisão em cada um dos níveis de tempo. Assim o transiente distorcido é resolvido, ou seja, itera-se algumas vezes ou somente uma vez no sistema linear e muda-se o valor de  $\phi^o$ , avançando mais um intervalo de tempo.

## 5.6 Observações sobre o sistema linear resultante

A aproximação numérica de uma equação diferencial parcial dá origem a um sistema de equações lineares. Quando a equação diferencial é não linear, a aproximação também origina um sistema de equações lineares, mas a matriz possui coeficientes dependentes da variável considerada e, portanto, deve ser atualizada ao longo das iterações. Isto faz com que se introduza um nível iterativo a mais no processo de solução para a atualização das não-linearidades.

Assim, considerando o conjunto de equações que representam escoamentos bidimensionais incompressíveis com propriedades físicas constantes, pode-se ter sistemas lineares com o seguinte formato

$$A^u u = B^u, \quad (5.80.1)$$

$$A^v v = B^v, \quad (5.80.2)$$

$$A^P P = B^P, \quad (5.80.3)$$

onde tem-se uma equação para cada variável considerada. Por exemplo, na Eq. (5.80.1) a velocidade  $v$  (no caso bidimensional) e a pressão  $P$  são tratadas explicitamente, pois estão representadas no termo fonte. A variável escolhida para ser tratada implicitamente é a



velocidade  $u$ , neste caso a Eq. (5.80.1) é a equação para  $u$ . De forma similar tem-se a equação (5.80.2) para  $v$  e (5.80.3) para  $P$ .

As equações são resolvidas de forma segregada, atualizando os coeficientes em cada iteração, o que faz com que as não-linearidades e o acoplamento entre as equações seja resolvido.

As soluções segregadas, no entanto, costumam sofrer problemas de instabilidades por avançar somente uma variável, deixando as outras estáticas. Dessa forma, torna-se interessante escrever o sistema linear de forma acoplada como foi visto no item 5.3.4

$$A^{uu}u + A^{uv}v + A^{uP}P = B^u, \quad (5.81.1)$$

$$A^{vu}u + A^{vv}v + A^{vP}P = B^v, \quad (5.82.2)$$

$$A^{Pu}u + A^{Pv}v + A^{PP}P = B^P. \quad (5.83.3)$$

Nas Eqs. (5.81.1-3) todas as variáveis aparecem de forma implícita em todas as equações. Para chegar a este tipo de sistema é necessário introduzir na equação de conservação da massa expressões para as velocidades nos pontos de integração que sejam funções da pressão e deixar o tensor tensão completo (com exceção do divergente da velocidade) nas equações do movimento (Raw, 1985; Maliska, 2004), como já mostrado nos itens anteriores. Este procedimento dá origem a um sistema linear representado da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} A^{uu} & A^{uv} & A^{uP} \\ A^{vu} & A^{vv} & A^{vP} \\ A^{Pu} & A^{Pv} & A^{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \\ B^P \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Tem-se, assim, um sistema de  $3xN$  equações a  $3xN$  incógnitas (em um problema bidimensional) onde  $N$  é o número de volumes de controle do domínio discretizado.

A matriz geral do problema pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} [A] & [ ] & [ ] & [ ] & & & & \\ [ ] & [A] & [ ] & [ ] & & & & \\ & [ ] & [A] & & & & & \\ [ ] & & [ ] & \cdot & & & [ ] & \\ & & & & \cdot & & [ ] & \\ [ ] & & [ ] & [ ] & \cdot & & [ ] & \\ & & [ ] & [ ] & & & [ ] & \\ & [ ] & & & & & & \\ & & [ ] & [ ] & & & & \\ & & & & & & [ ] & [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\phi] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad (5.83)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} [A^{uu}] & [A^{uv}] & [A^{uP}] \\ [A^{vu}] & [A^{vv}] & [A^{vP}] \\ [A^{Pu}] & [A^{Pv}] & [A^{PP}] \end{bmatrix} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \\ B^P \end{bmatrix}. \quad (5.84)$$

O método EbFVM, por utilizar malhas não-estruturadas, apresenta uma configuração onde o volume de controle analisado possui um número indefinido de volumes de controle vizinhos podendo assim, cada linha possuir um número indefinido de matrizes, sendo uma para os coeficientes centrais das variáveis em cada equação e as outras para os coeficientes de conexão com os volumes vizinhos. O vetor de incógnitas  $[\phi]$  é um vetor de  $N$  componentes do tipo  $\{u, v, P\}$  e o vetor de termos independentes tem estrutura semelhante ao vetor de incógnitas.

A solução do sistema dado pelas Eqs. (5.83) e (5.84) fornece os valores de  $u$ ,  $v$  e  $P$  para um determinado conjunto de coeficientes que são funções das variáveis consideradas. Para levar em conta as não-linearidades, a matriz de coeficientes deve ser atualizada. Assim o sistema é resolvido iterativamente até a convergência.

A fim de acelerar a solução do sistema acoplado de equações é aplicado o método ACM, sendo a aglomeração efetuada escolhendo-se o coeficiente mais propício, ou seja, o que melhor represente o problema físico considerado. Após feita esta escolha, são calculadas correções para cada uma das três variáveis de interesse. Como já mencionado anteriormente, Raw (1996) indica o coeficiente da variável pressão na equação para a pressão,  $A^{PP}$ , como o mais representativo do escoamento e, portanto, o que traria melhores resultados em termos de tempo de computação para a solução do problema.

No próximo capítulo serão apresentados resultados da aplicação do método ACM às equações aproximadas pelo Método de Volumes Finitos baseado em Elementos.

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS

A tarefa de apresentar o desempenho do método ACM, juntamente com as contribuições realizadas neste trabalho, é feita resolvendo-se problemas que vão crescendo em ordem de complexidade, iniciando-se com problemas de condução de calor e culminando com problemas advectivo-dominantes.

Como critério para medir o desempenho do método multigrid, bem como do Gauss-Seidel, ILU e GMRES utilizados neste trabalho foram medidos os tempos de processamento para a obtenção da solução do problema. Apesar do tempo de CPU não ser uma medida absoluta, pois muitas operações dependem da forma como feita a implementação, este critério mostrou-se adequado por dar uma informação geral do desempenho de cada método.

#### 6.1 Problemas de condução de calor

Nesta seção problemas simples de condução de calor são resolvidos com dois objetivos: o primeiro é checar a exatidão das implementações dos programas e, o segundo, demonstrar a eficiência do método ACM com o esquema de aglomeração adaptativa para problemas lineares com diferentes *solvers* básicos iterativos.

Os resultados são obtidos usando dois diferentes *solvers*: Gauss-Seidel e ILU. O método multigrid ACM é usado com diferentes níveis de aglomeração. No último nível de malha do multigrid, a mais grossa, as equações são resolvidas com o *solver* direto de fatoração LU enquanto que nos outros níveis é utilizado ou o *solver* ILU ou o *solver* Gauss-Seidel. O resíduo máximo permitido possui norma igual a  $10^{-5}$ . São utilizados os ciclos V, W e F em todos os casos analisados.

**Problema 1:** O primeiro exemplo é um problema de condução de calor, isotrópico, bidimensional em uma geometria quadrada. A geometria e condições de contorno deste problema são apresentadas na Fig. 6.1. A estimativa inicial é zero em todo o domínio. A discretização foi feita usando o Método de Volumes Finitos tradicional (Maliska, 2004) com volumes regulares, sendo utilizadas malhas com  $64 \times 64$ ,  $128 \times 128$ ,  $256 \times 256$  e  $512 \times 512$  volumes. A aglomeração foi efetuada com blocos de quatro volumes (células), sendo que foram utilizados quatro níveis de malha (três malhas grossas, além da original fina) para o

caso de  $64 \times 64$  volumes, cinco níveis de malha para o caso de  $128 \times 128$  volumes, seis níveis para  $256 \times 256$  volumes e sete níveis para  $512 \times 512$  volumes.

Foram, também, efetuados testes para a malha de  $32 \times 32$  volumes (com três níveis de malha), porém como os tempos de computação ficaram em torno de centésimos de segundos tornou-se difícil avaliar o quão precisos eram estes tempos de CPU.

Os resultados foram obtidos usando o método de Gauss-Seidel (GS) com e sem o método ACM. Quando o método ACM com o solver interno Gauss-Seidel<sup>1</sup> é utilizado, aplica-se o solver Gauss-Seidel em todos os níveis de malha menos na mais grossa, onde as equações são resolvidas com o uso do *solver* direto de fatoração LU.

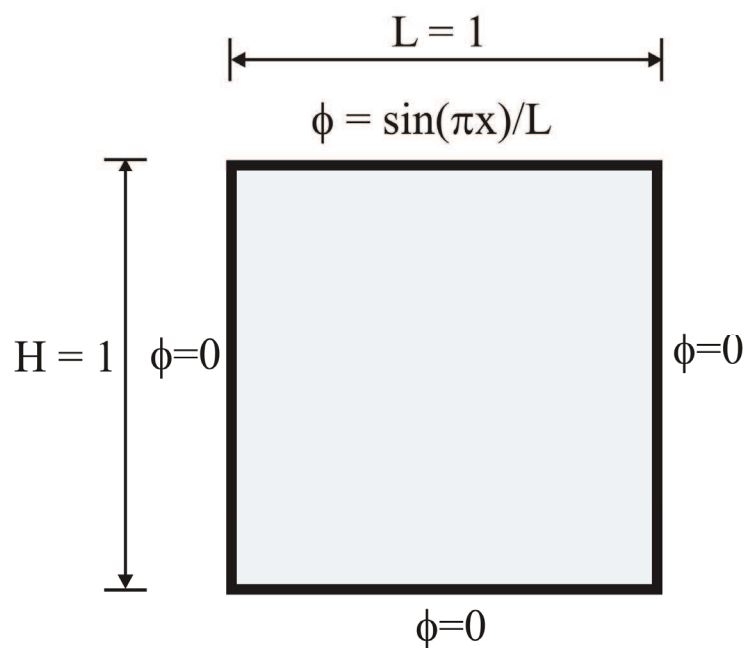


Figura 6.1 Geometria do problema isotrópico de condução de calor.

Utilizando o método ACM/GS, na Tab. 6.1 é mostrado o número de iterações fixas do método de Gauss-Seidel utilizadas para resolver o problema em cada uma das malhas consideradas. Foi usado o mesmo número de iterações de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear na malha fina (inicial) e nas demais malhas grossas, excetuando-se a mais grosseira que, como já mencionado, é resolvida pelo método direto de fatoração LU. Pode-se notar que o ciclo W além de apresentar os melhores resultados em termos de tempo computacional (conforme Fig. 6.2), também é mais estável visto que necessita para isso de somente uma iteração em cada nível de malha para todas as malhas consideradas.

<sup>1</sup> Quando o método ACM utilizar como solver interno o método de Gauss-Seidel, este será denotado pelo acrônimo ACM/GS.

Tabela 6.1 Número de iterações de GS (no método ACM/GS) para o problema isotrópico de condução de calor.

| Malha   | Nº de níveis para | Nº de Iterações | Nº de Iterações | Nº de Iterações |
|---------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|         | a Aglomeração     | Ciclo V         | Ciclo W         | Ciclo F         |
| 32x32   | 3                 | 15              | 1               | 1               |
| 64x64   | 4                 | 15              | 1               | 1               |
| 128x128 | 5                 | 20              | 1               | 1               |
| 256x256 | 6                 | 30              | 1               | 1               |
| 512x512 | 7                 | 35              | 1               | 15              |

Pode-se ver na Fig. 6.2 que para este problema simples, os três ciclos multigrid tiveram desempenhos semelhantes, sendo que o ciclo W obteve um desempenho um pouco melhor, e o método ACM/GS mostrou-se bastante superior ao GS. Aplicando uma linha de tendência do tipo exponencial aos dados do método ACM/GS Ciclo W e de GS determinam-se as retas de regressão (ou tendência),  $y = 9E-08x^{1,9694}$  com coeficiente de determinação,  $R^2 = 1$  para GS e  $y = 3E-05x^{0,9129}$  com  $R^2 = 0,99$  para ACM/GS ciclo W. Os coeficientes de determinação indicam que as curvas de tendência são bastante confiáveis.

Considerando que nas malhas de  $64x64$  e  $128x128$ , o método ACM/GS obteve os resultados em centésimos e décimos de segundos, estes tempos não podem ser considerados precisos. Assim, este gráfico indica uma tendência de comportamento para o método ACM/GS e para o *solver* GS. O método ACM/GS tende a ser um *solver* de primeira ordem ( $O(n^1)$ ) onde  $n$  é o número de nós da malha fina), ou seja, o esforço computacional no método ACM/GS cresce linearmente com o aumento do tamanho da malha, o que é sempre desejável, e o método GS, como esperado, um *solver* de segunda ordem ( $O(n^2)$ ). A conclusão com os resultados deste primeiro problema é que o multigrid associado ao *solver* Gauss-Seidel cumpre os objetivos, ou seja, diminui sensivelmente o tempo de computação para a obtenção da solução e torna o crescimento do tempo de computação do processo iterativo de solução, linear em relação ao grau de refino das malhas consideradas. Logicamente, estas conclusões já eram esperadas.

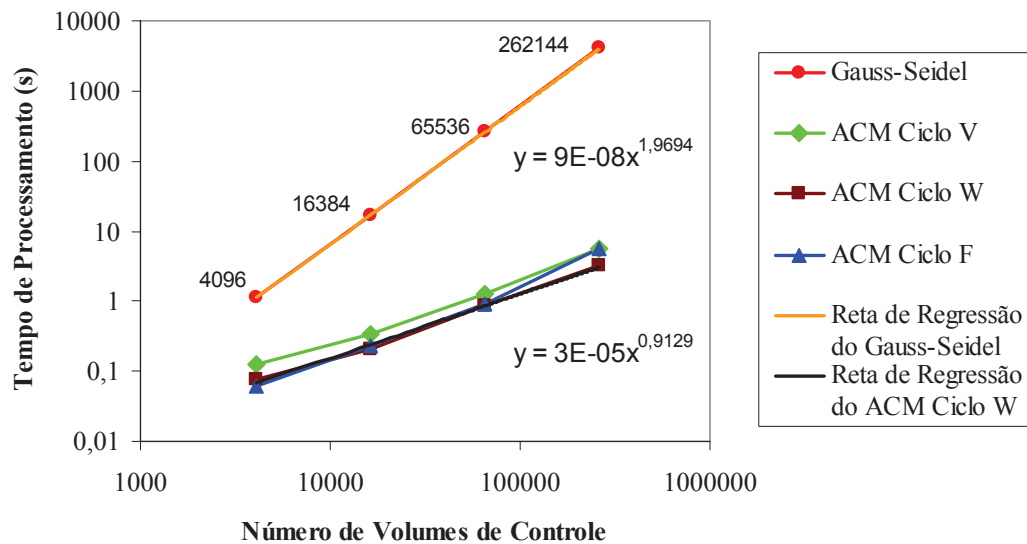


Figura 6.2 Esforço computacional para o problema isotrópico de condução de calor com diferentes malhas.

**Problema 2:** O segundo exemplo é um problema de condução de calor bidimensional em uma geometria quadrada com regiões anisotrópicas com razão máxima de condutibilidade térmica da ordem de  $10^5$ , ou seja, representando um material com grande heterogeneidade. A geometria e condições de contorno deste problema são apresentadas na Fig. 6.3. A estimativa inicial para o campo de temperaturas é zero. A discretização foi feita no tradicional Método de Volumes Finitos (Maliska, 2004) com volumes regulares de  $20 \times 20$  células.

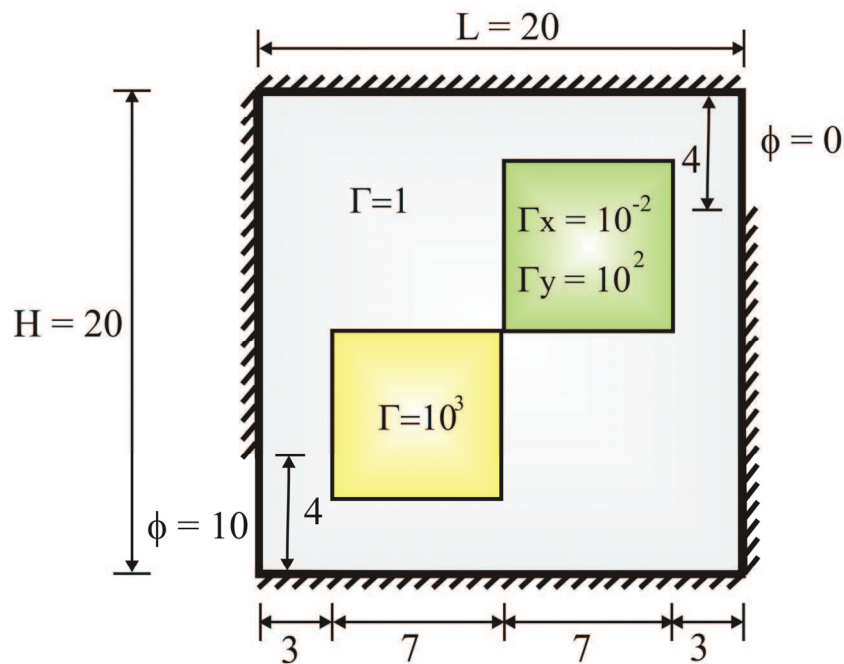


Figura 6.3 Geometria do problema anisotrópico de condução de calor.

A aglomeração dos volumes foi feita utilizando quatro células da malha fina para formar cada nova célula grossa, o que resultou nas malhas mostradas na Fig. 6.4.

Pode-se ver que no primeiro nível de malha grossa, Fig. 6.4(a), as células geradas são razoavelmente regulares. A aglomeração ocorre na direção das pequenas escalas de tempo de transporte (altas difusividades) em zonas anisotrópicas. Na segunda aglomeração, Fig. 6.4(b), os blocos da malha grossa continuam mantendo as três regiões de difusividades diferentes, separadas. Este comportamento é esperado, pois respeita os princípios básicos do esquema de aglomeração que inspiram este trabalho. Ele também foi verificado no trabalho de Elias et al. (1997), que também emprega a anisotropia dos coeficientes para determinar a forma da aglomeração, depois de definido o número de volumes que serão aglomerados. Observa-se que as aglomerações com base nos coeficientes geram malhas completamente diferentes das malhas cartesianas que seriam geradas pelo multigrid algébrico.

Para este problema, os três ciclos multigrid V, W e F foram testados e obtiveram tempos de computação bastante similares. Provavelmente isto ocorre porque a malha inicial utilizada é bastante grossa. Optou-se, então, por apresentar somente a solução do método ACM/GS com o ciclo V, como pode ser visto na Fig. 6.5.

Para resolução dos sistemas lineares em todos os níveis de malha foram utilizadas cinco iterações de GS (no método ACM/GS), menos na malha mais grosseira que foi resolvida pelo método de fatoração LU.

Observando os diferentes níveis de aglomeração pode-se ver que o primeiro nível dá origem a uma malha com 104 volumes, o segundo nível a uma malha com 30 volumes, o terceiro nível a uma malha com 10 volumes e o quarto nível dá origem a uma malha com 3 volumes. Analisando os resultados obtidos na Fig. 6.5, chega-se a conclusão que não é necessário efetuar-se aglomerações até níveis tão grosseiros visto que o melhor resultado, em termos de obtenção de convergência rápida, é obtido utilizando-se somente duas malhas grossas, que são as malhas dos itens (a) e (b) da Fig. 6.4. Isto se deve ao fato que o *solver* direto é bastante eficiente na solução de uma matriz de ordem  $30 \times 30$ , não sendo necessário obter sistemas lineares menores para a sua aplicação e também que a criação de níveis grosseiros gasta um certo tempo computacional.

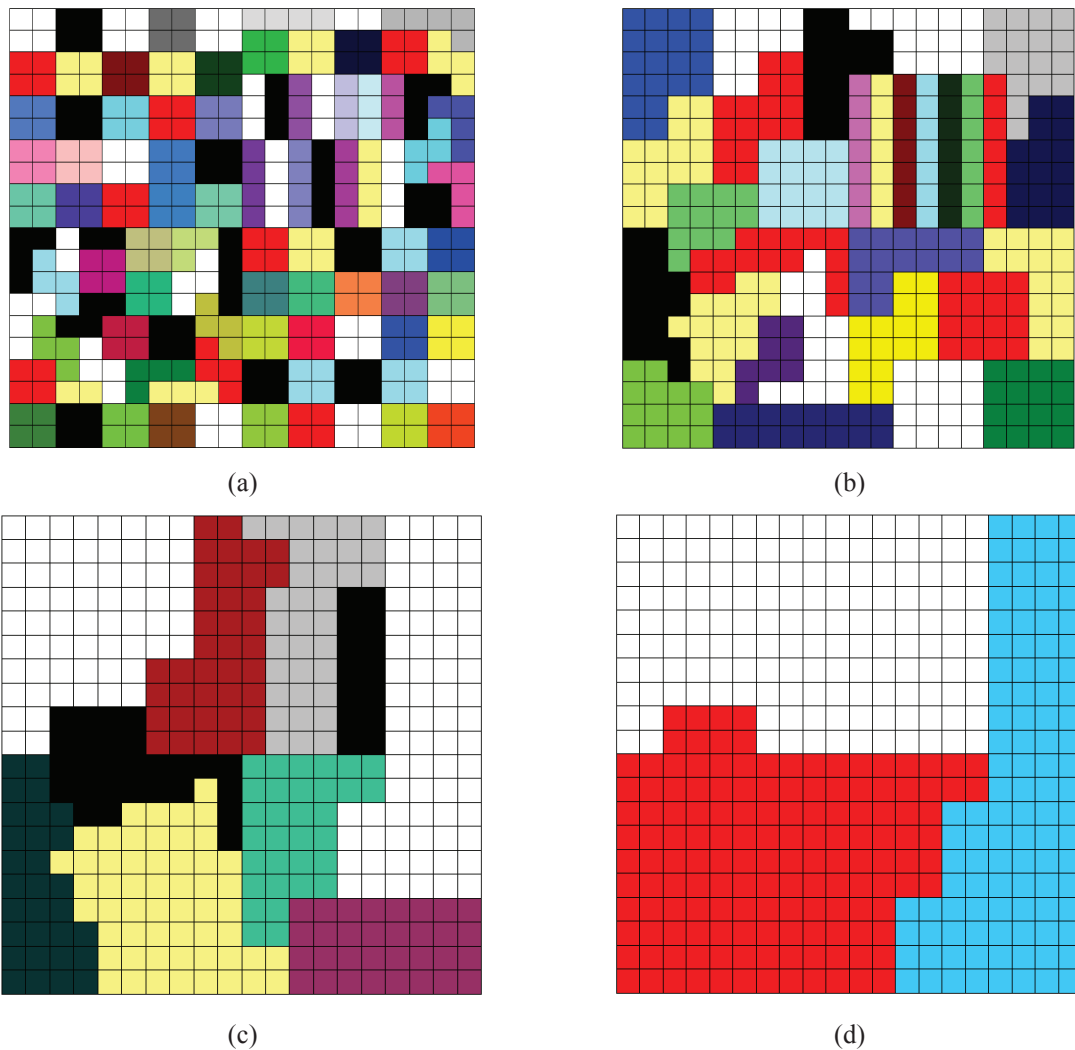


Figura 6.4 Diferentes níveis de aglomeração, (a) primeiro nível, (b) segundo nível, (c) terceiro nível e (d) quarto nível (mais grosso).

Assim, a Fig. 6.5 mostra a comparação entre o comportamento da convergência do problema da Fig. 6.3 obtido pelo *solver* Gauss-Seidel e pelo ACM/GS ciclo V com diferentes níveis de aglomeração. Por tratar-se de uma malha original bastante grossa, fica difícil medir com precisão os tempos de computação, mas mesmo assim é mostrado que o método ACM/GS é mais eficiente que somente o *solver* GS, como esperado, e que a aglomeração adaptativa, que aglomera as células em acordo com as escalas de tempo de transporte de informação (coeficientes) é uma técnica promissora. Neste caso, o método multigrid com três níveis de malha (a original mais duas grossas) demonstrou um desempenho melhor na redução do resíduo (Keller et al., 2004).



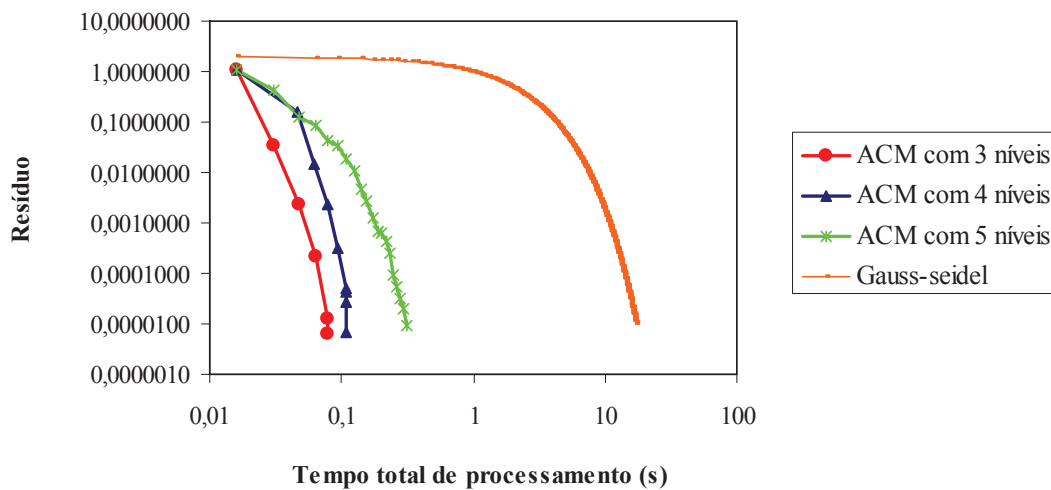


Figura 6.5 Redução do resíduo com o tempo para GS e ACM/GS com diferentes níveis de malhas.

Conforme já comentado, pode-se ainda utilizar uma aglomeração geométrica para este problema, a qual dá origem a blocos regulares. Neste caso os volumes são aglomerados somente levando em conta a melhor posição geométrica dentro do bloco, ou seja, são agrupados volumes que já possuem outros “volumes vizinhos” dentro do bloco<sup>2</sup> e as regras quanto aos valores dos coeficientes de conexão entre os volumes são ignoradas. Considerando o ACM/GS com 3 níveis de malha (e utilizando os mesmos parâmetros utilizados para o ACM/GS com aglomeração adaptativa) obtêm-se as duas malhas grossas que podem ser vistas na Fig. 6.6 para o multigrid geométrico.

Analisando o tempo de computação que o método Multigrid de Correções Aditivas com 3 níveis de malhas leva para obter a solução desejada, pode-se ver pela Fig. 6.7 o desempenho bastante superior do método ACM/GS com aglomeração adaptativa sobre o ACM/GS com aglomeração geométrica.

Isso ocorre porque à medida que as células (volumes) são aglomeradas na direção dos maiores coeficientes, as variações nas escalas de tempo de transporte de informação entre as células da malha grossa são reduzidas facilitando o “trabalho” do *solver* linear e acelerando a obtenção da convergência.<sup>3</sup> Assim, a aglomeração adaptativa (com base nos coeficientes) aproveita dois aspectos importantes na mudança de malhas: primeiro, utiliza o conceito do emprego de malhas de diferentes tamanhos para reduzir os erros em todo o espectro de frequência e, segundo, faz isso aproveitando as direções onde as variações são mais significativas, portanto, com base na física do fenômeno. Provavelmente a comparação do desempenho entre o ACM/GS com aglomeração geométrica com o multigrid geométrico tradicional (não ACM) com GS, apresenta resultados também favoráveis ao primeiro método,

<sup>2</sup> Segundo a definição de melhor vizinho geométrico vista no Cap. 4.

<sup>3</sup> Mais explicações sobre o processo de aglomeração podem ser vistas no Cap.4.

resultado da forma mais fisicamente consistente de obter as equações para as malhas mais grossas.

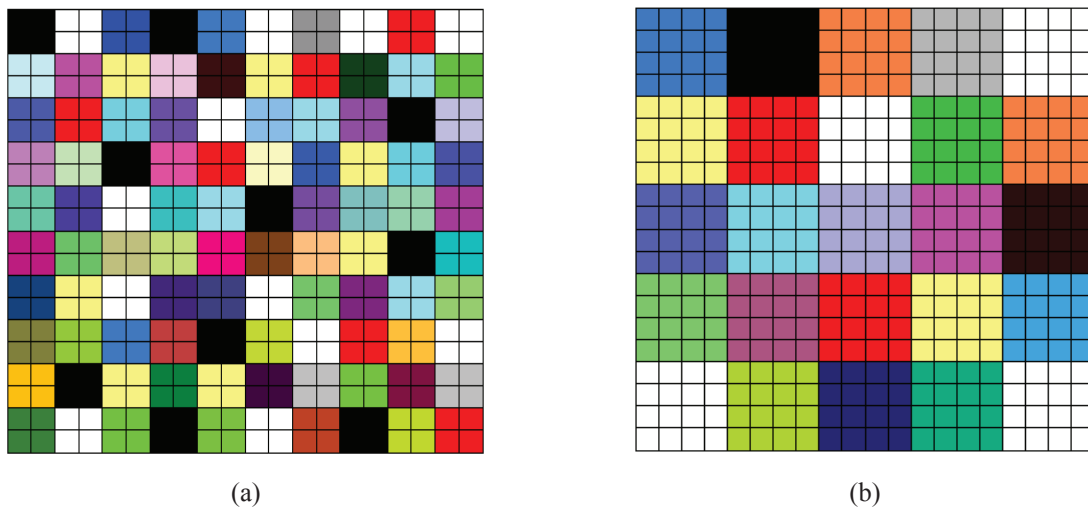


Figura 6.6 Diferentes níveis de aglomeração geométrica: (a) primeiro nível e (b) segundo nível.

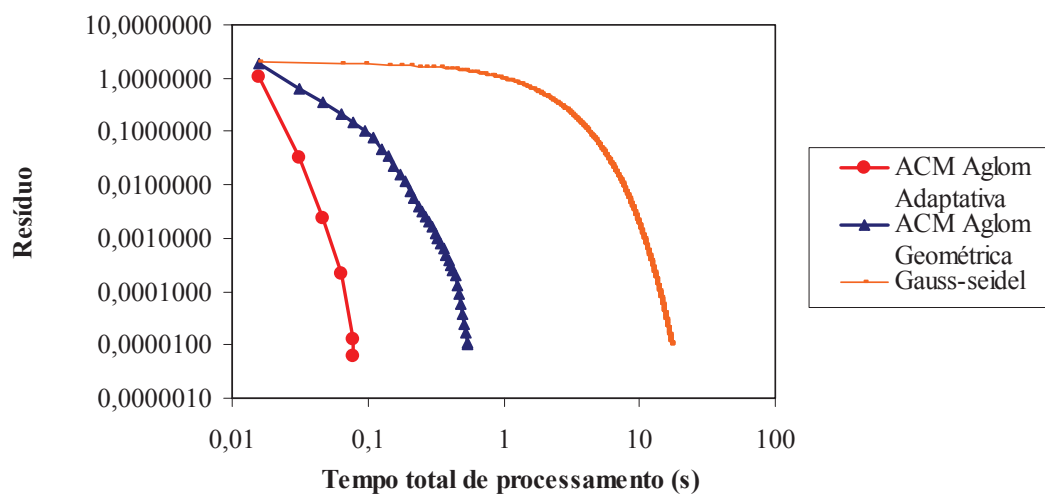


Figura 6.7 Redução do resíduo com o tempo para GS e ACM/GS com aglomeração adaptativa e geométrica.

**Problema 3:** O terceiro problema considerado também é de difusão com as seguintes condições de contorno: na direção  $x$ , os contornos são isolados e na direção  $y$ , parcialmente isolados e parcialmente com temperaturas definidas, como está representado na Fig. 6.8. Neste problema a propagação da informação das condições de contorno se dá mais eficientemente na direção onde têm-se condições de contorno de Dirichlet. O problema foi discretizado através do método EbFVM e, apesar das malhas utilizadas serem geometricamente cartesianas, estas foram tratadas de forma não estruturada. Foram utilizadas malhas com 1024, 4096, 16384 e 65536 nós (ou volumes de controle) igualmente distribuídos

nas direções  $x$  e  $y$ . Devido à geometria do problema, os coeficientes relacionados com os nós no interior do domínio são maiores na direção  $y$  que na direção  $x$ . A aglomeração é sempre feita na direção dos maiores coeficientes.

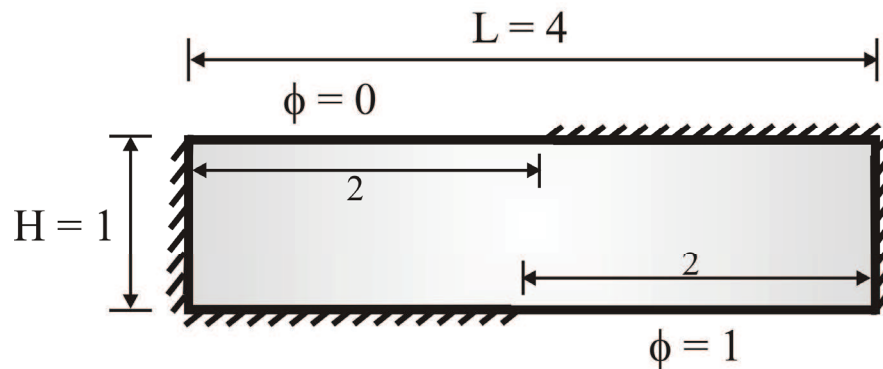


Figura 6.8 Geometria do terceiro problema de difusão.

Nas Figs. 6.9(a) e 6.9(b) é apresentado o tempo total de CPU utilizada pelos métodos ACM, Gauss-Seidel e ILU para reduzir o resíduo do problema proposto na Fig. 6.8 a um valor pré-determinado (neste caso  $10^{-5}$ ). Na Fig. 6.9(a) é feita a comparação utilizando como *solver* interno do método multigrid, o *solver* Gauss-Seidel (ACM/GS) e na Fig. 6.9(b) o *solver* ILU (ACM/ILU<sup>4</sup>), sempre lembrando que a malha do nível de aglomeração mais grosseira em ambos os casos é resolvida pelo *solver* direto LU. Também são apresentados os resultados da utilização do *solver* Gauss-Seidel (GS) na Fig. 6.9(a) e do *solver* ILU na Fig. 6.9(b).

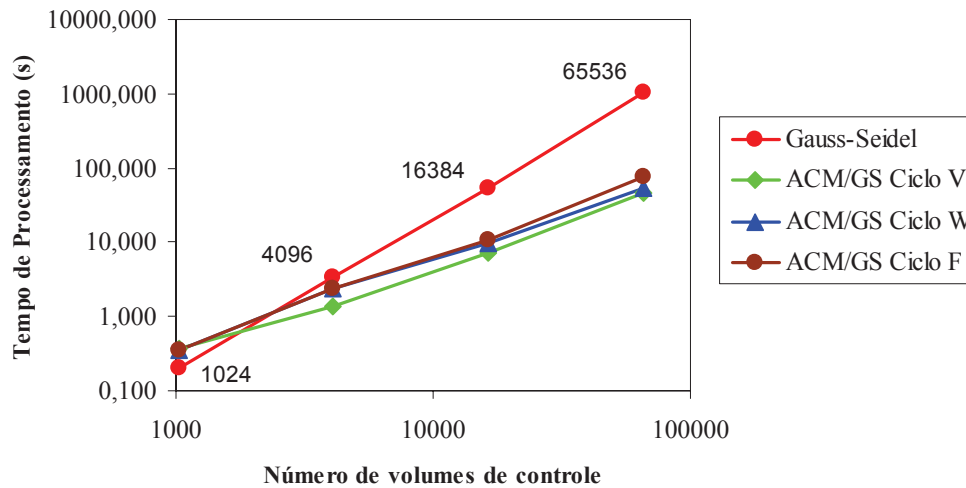
De acordo com essas figuras, no caso da malha com 1024 nós, os métodos Gauss-Seidel e ILU mostraram-se um pouco melhores que os métodos ACM/GS e ACM/ILU, respectivamente, pois além do fato da malha ser relativamente grosseira, os coeficientes da equação discretizada são grandes na direção  $y$  (a escala de tempo de transporte de informação é pequena) e o efeito das condições de contorno de Dirichlet é rapidamente transmitido ao interior do domínio. Assim, tanto o *solver* ILU quanto o GS resolvem suficientemente bem o problema.

Entretanto a partir da malha com 4096 volumes de controle, ACM começa a apresentar uma redução de tempo computacional que vai se tornando mais significativa à medida que o número de volumes das malhas cresce, como no exemplo com malhas de 16384 e 65536 volumes de controle. Devido ao crescimento do número de nós na direção  $y$ , ocorre o esperado, a propagação das condições de contorno de temperatura prescrita (Dirichlet) torna-

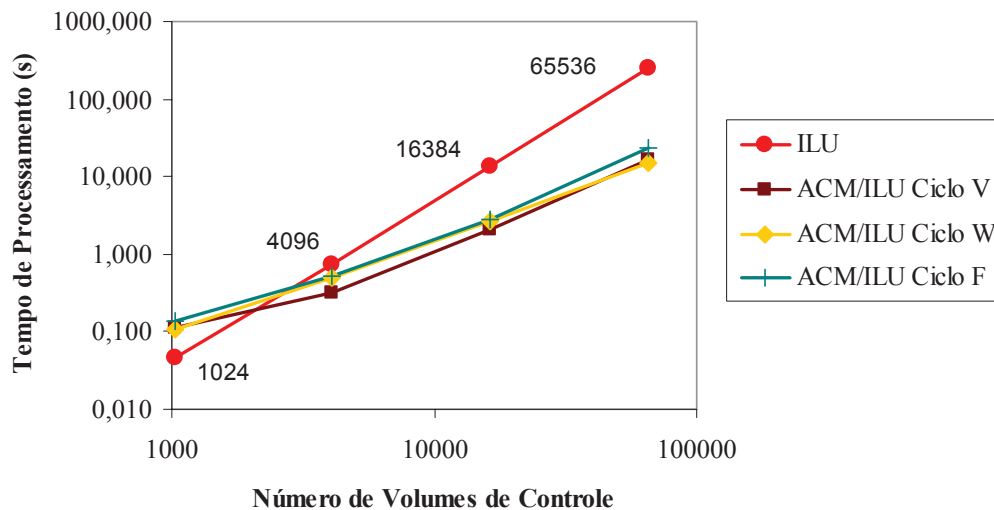
<sup>4</sup> Quando o método ACM utilizar como *solver* interno o método ILU, este será denotado pelo acrônimo ACM/ILU.

se mais lenta quando os *solvers* Gauss-Seidel ou ILU são utilizados. Assim, ACM/GS e ACM/ILU mostram-se mais eficientes por usar a aglomeração adaptativa, a qual facilita a transmissão da informação no interior do domínio.

Nos casos apresentados pode-se notar uma pequena diferença entre os ciclos multigrid V, W e F. Na Fig. 6.9(a) o ciclo V mostrou-se um pouco melhor, seguido do ciclo W e finalmente o ciclo F. Já na Fig. 6.9(b) os ciclos V e W apresentaram desempenho semelhante, sendo um pouco melhores que o ciclo F.



(a)



(b)

Figura 6.9 Esforço computacional no terceiro problema difusivo: (a) comparação de ACM/GS com GS, (b) comparação de ACM/ILU com ILU.

Cabe salientar que costumam ocorrer variações no desempenho dos ciclos de acordo com o ajuste de parâmetros, assim busca-se ainda uma configuração ideal que contemple os diversos problemas e graus de refino de malha utilizados. De forma geral, foram utilizados agrupamentos de quatro volumes, com número de níveis de malhas grossas variável, de modo

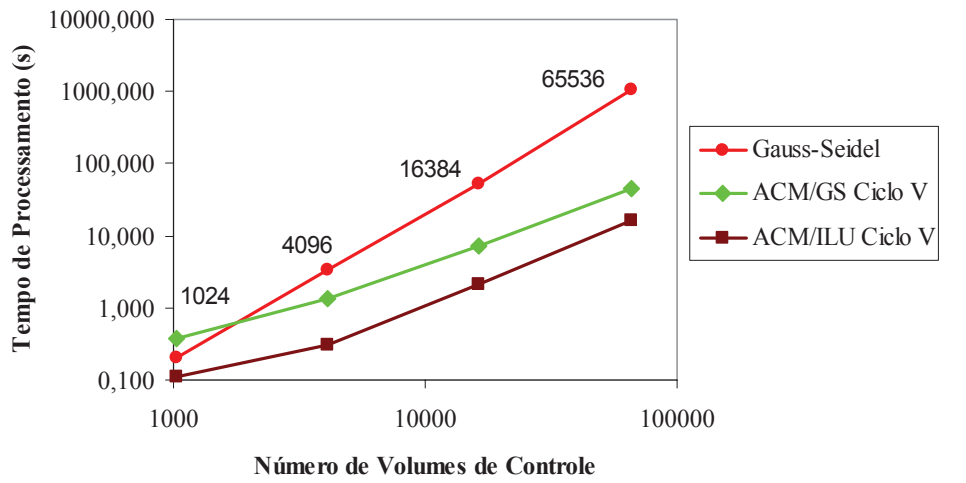
que a malha mais grossa tenha menos de 70 volumes. Os números ótimos de iterações de Gauss-Seidel (no método ACM/GS) e ILU (no método ACM/ILU) foram encontrados realizando-se testes, variando o número de iterações de 5 em 5, em cada uma das malhas para cada tipo de ciclo multigrid. Estes são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 6.2 Número de iterações de Gauss-Seidel (no método ACM/GS) e ILU (no método ACM/ILU) para o terceiro problema de condução de calor.

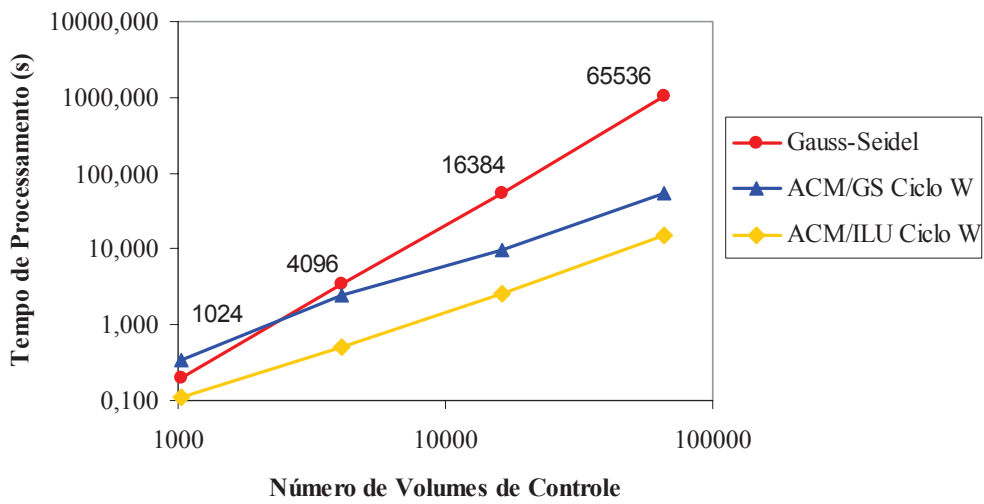
| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomerção | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|----------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                  | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 1024            | 2                                | 350                             | 450     | 550     | 30                     | 50      | 40      |
| 4096            | 3                                | 350                             | 450     | 450     | 30                     | 50      | 60      |
| 16384           | 4                                | 350                             | 300     | 450     | 30                     | 40      | 60      |
| 65536           | 5                                | 425                             | 250     | 450     | 30                     | 30      | 60      |

Analisando a Tab. 6.2 pode-se notar que o número de iterações necessárias de Gauss-Seidel (em ACM/GS) é bem superior ao de ILU (em ACM/ILU), sendo este último um método mais robusto em termos de obtenção da convergência, uma vez que necessita de menos iterações e, ainda, possui uma menor variação entre o número ótimo de iterações de uma malha para outra.

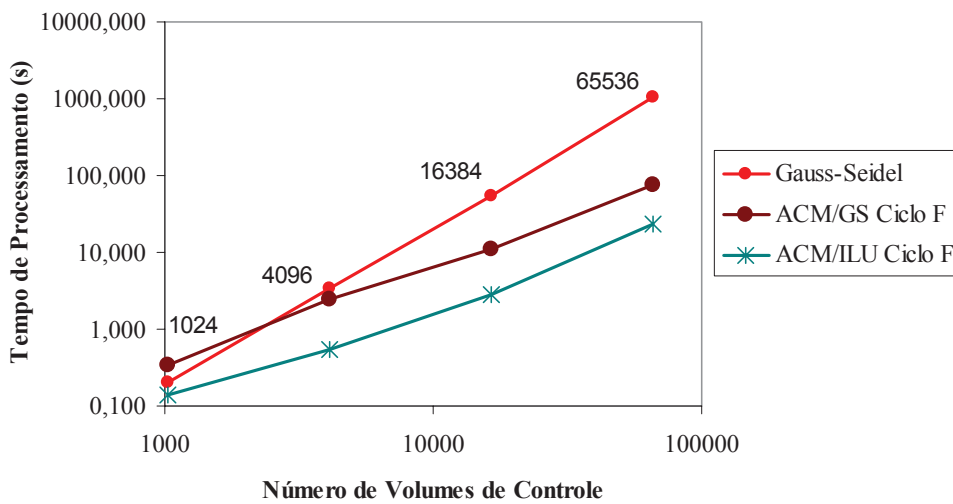
Na Fig. 6.10 é feita a comparação entre os *solvers* internos a fim de se mostrar qual apresenta os melhores resultados para os diferentes ciclos considerados. Como pode-se notar para os ciclos V, W e F o método multigrid com *solver* interno ILU (ACM/ILU) apresentou um desempenho superior em termos de tempo de computação ao método multigrid com *solver* interno Gauss-Seidel (ACM/GS).



(a)



(b)



(c)

Figura 6.10 Comparação entre ACM/ILU e ACM/GS no terceiro problema difusivo para: (a) ciclo V, (b) ciclo W e (c) ciclo F.

Cabe, agora, analisar a questão da aglomeração adaptativa. O exemplo três, mostrado acima, como já mencionado é um exemplo de problema anisotrópico e assim quando a aglomeração adaptativa é utilizada, a aglomeração das células é feita na direção dos maiores coeficientes. Tomando a malha de 1024 volumes, pode-se ver na Fig. 6.11, a malha original formada por elementos (linha tracejada) que dão origem aos volumes de controle (linha contínua) construídos ao redor dos nós dos elementos. Na Fig. 6.12, itens (a) e (b) pode-se ver os blocos (novos volumes de controle) para os dois níveis de malha grosseira obtidos pelo processo de aglomeração adaptativa.

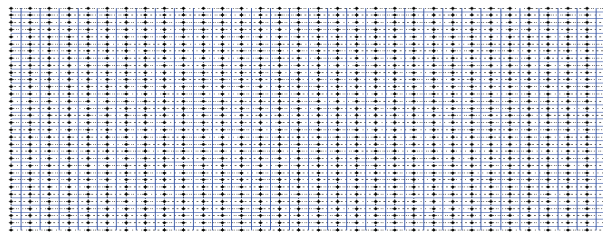


Figura 6.11 Malha original com 1024 volumes de controle.

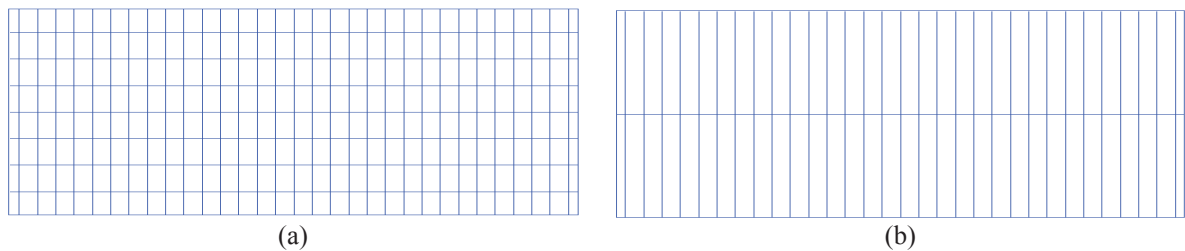


Figura 6.12 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa: (a) 256 volumes e (b) 64 volumes.

Na Fig. 6.13 são apresentadas as malhas grossas obtidas pelo processo de aglomeração geométrica.

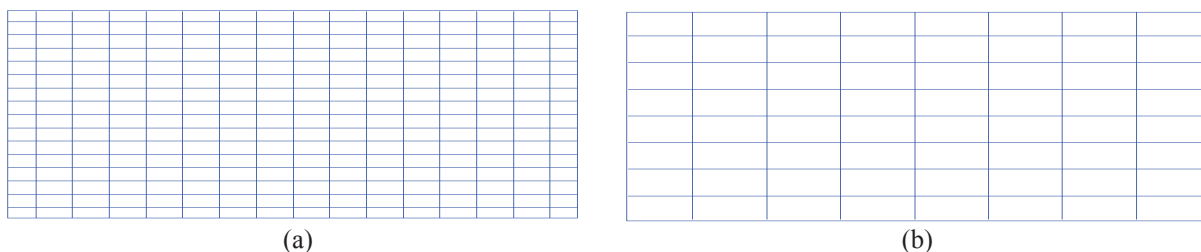


Figura 6.13 Malhas resultantes da aglomeração geométrica: (a) 256 volumes e (b) 64 volumes.

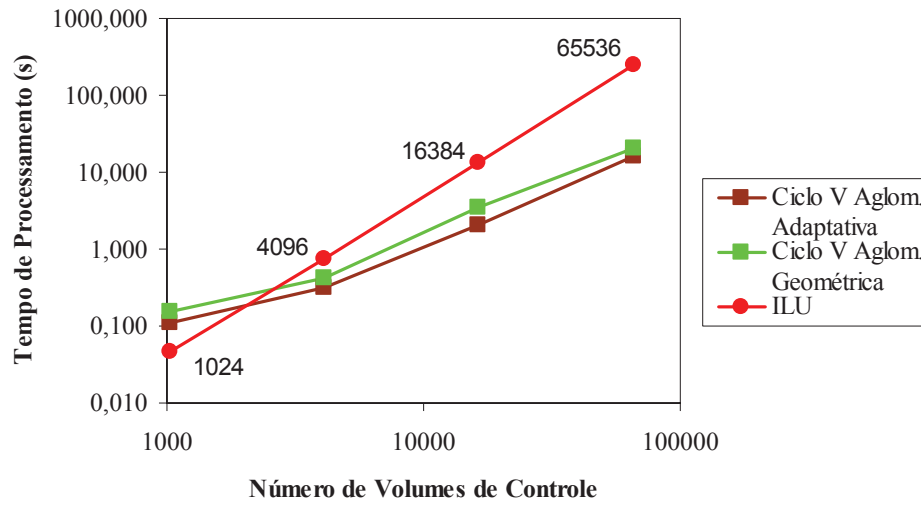
É adequado fazer-se, agora, uma comparação entre os resultados obtidos pela aglomeração adaptativa e pela aglomeração geométrica, o que é mostrado na Fig. 6.14.

Assim, para a obtenção dos tempos de computação do método ACM com aglomeração geométrica foram utilizados os mesmos parâmetros anteriormente usados na aglomeração adaptativa e como *solver* interno foi escolhido o ILU (ao invés de Gauss-Seidel) por este ter obtido melhores resultados nos casos já testados. O número de iterações foi mantido o mesmo da Tab. 6.2 por apresentar bons resultados também.

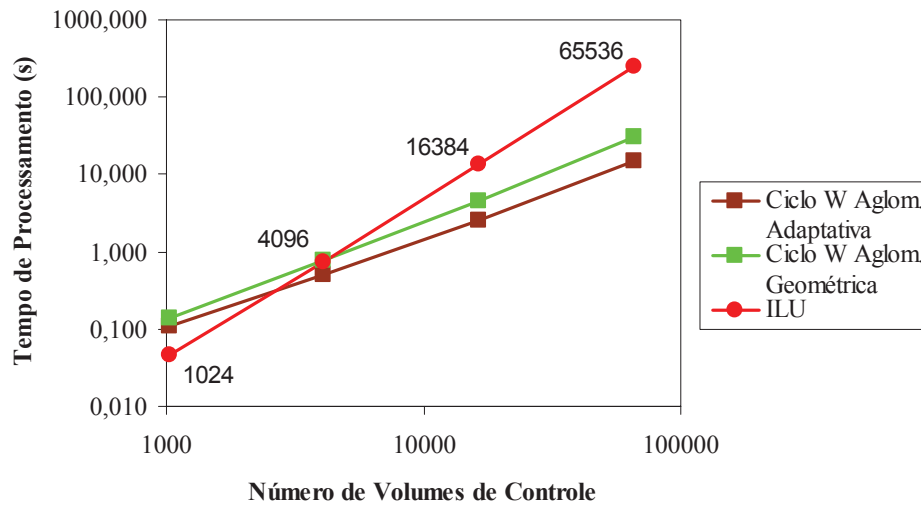
Na Fig. 6.14 foram comparados os ciclos V, W e F sendo que a aglomeração adaptativa mostrou-se melhor que a aglomeração geométrica na maioria dos casos. A aglomeração geométrica só mostrou um pequeno ganho de tempo no caso do ciclo F na malha de 65536 volumes, sendo que o ciclo F apresentou os piores resultados entre os três ciclos conforme pode ser visto na Fig. 6.9.

De forma geral o procedimento para formar os blocos através do uso da aglomeração adaptativa demanda um tempo maior que a geométrica. Talvez essa seja uma das razões que a aglomeração adaptativa não mostrou, nos casos acima, um ganho de tempo grande em relação à geométrica. Outro fator é a natureza do problema considerado, pois quanto maior o grau de anisotropia dos coeficientes, melhor será o desempenho do uso da aglomeração adaptativa.

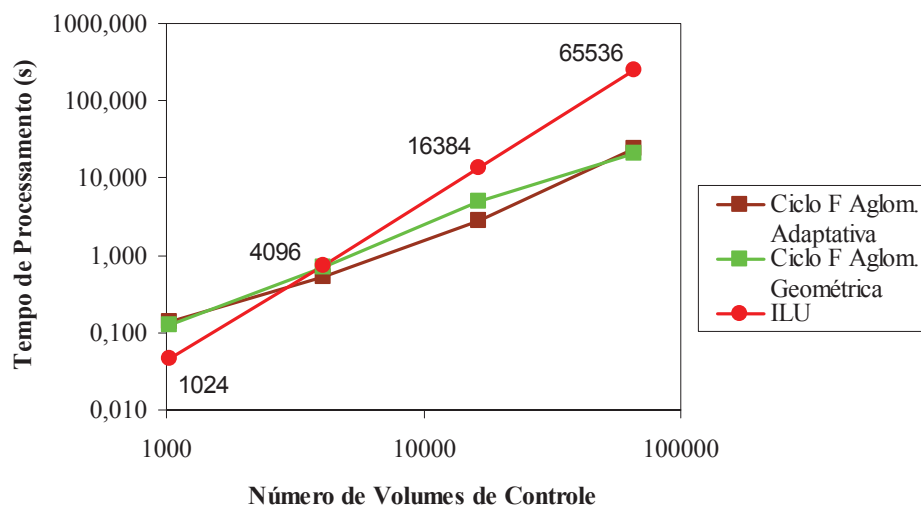




(a)



(b)



(c)

Figura 6.14 Comparação entre ACM/ILU com aglomeração adaptativa e aglomeração geométrica para: (a) ciclo V, (b) ciclo W e (c) ciclo F.

**Problema 4:** O quarto exemplo é similar ao terceiro, exceto pelo fato que as condições de contorno nas direções  $x$  e  $y$  estão trocadas (Fig. 6.15). Neste exemplo, a informação sobre as condições de contorno forte (Dirichlet) é transmitida principalmente na direção dos coeficientes pequenos. Assim é esperado um grande esforço computacional por parte dos métodos Gauss-Seidel e ILU para estes atingirem a convergência.

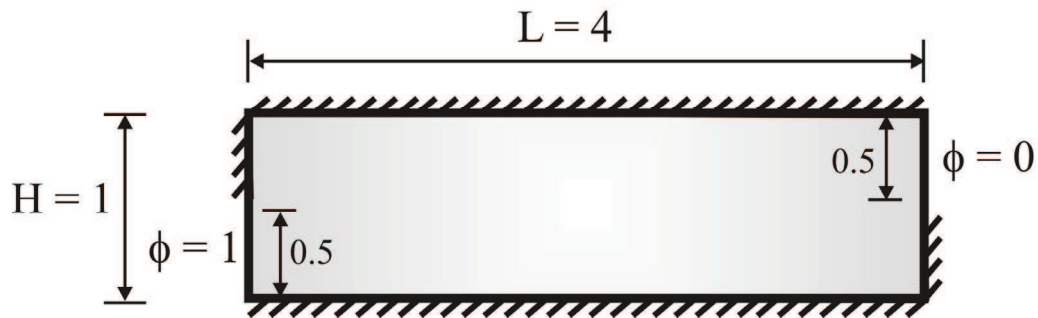


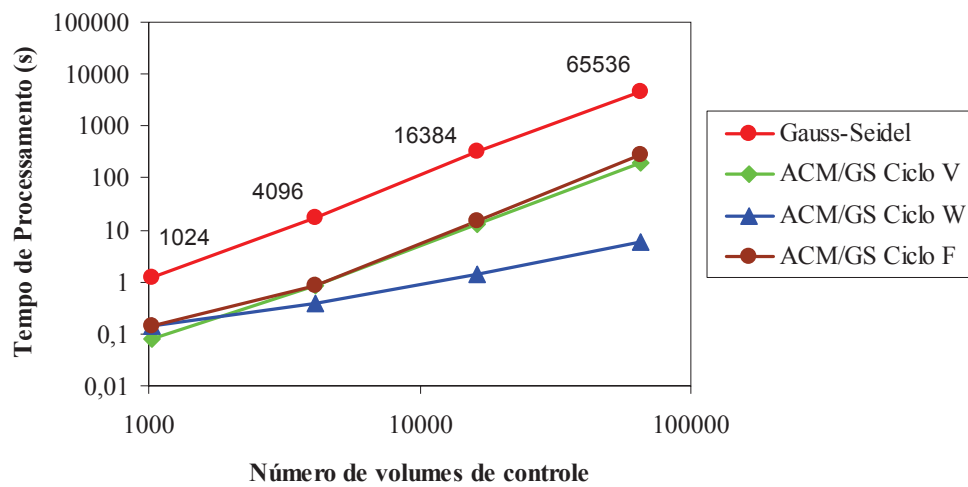
Figura 6.15 Geometria do quarto problema de difusão.

Na Fig. 6.16 pode-se ver o grande ganho em tempo de computação dos métodos ACM/GS e ACM/ILU sobre o método Gauss-Seidel (item (a)) e sobre o método ILU (item (b)), respectivamente, mesmo na malha de 1024 volumes. Nesta figura são apresentados os tempos de CPU dos métodos ACM, Gauss-Seidel e ILU necessários para reduzir a norma do resíduo do problema proposto na Fig. 6.15 ao valor  $10^{-5}$ . Na Fig. 6.16(a) é feita a comparação entre os métodos ACM/GS e GS e na Fig. 6.16(b) entre os métodos ACM/ILU e ILU.

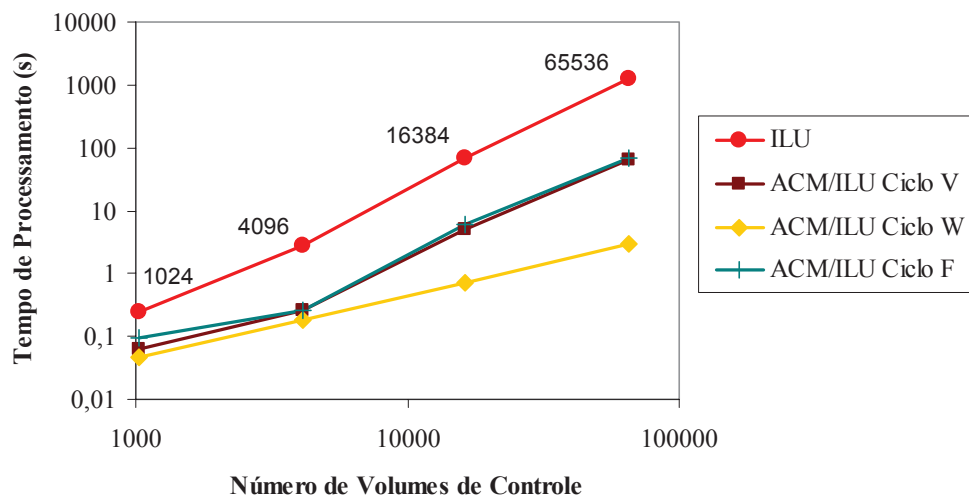
O ganho de tempo do método ACM (tanto o ACM/GS quanto o ACM/ILU) sobre os *solvers* GS e ILU ocorre porque as condições de contorno de Dirichlet são prescritas na direção do coeficiente fraco (direção  $x$ ). Como mencionado no capítulo três, o passo de tempo do *solver* Gauss-Seidel é da ordem do tempo de propagação da informação por difusão na direção  $y$  (menor escala de tempo de propagação de informação), assim  $\Delta t_{ij} \approx \Delta t^y$ . Já na direção  $x$  leva o tempo  $\Delta t^x = (\Delta x / \Delta y)^2 \Delta t_{ij}$  para propagar a informação das condições de contorno de um nó para outro nó adjacente, enquanto que o método ACM propaga a informação sobre todo o domínio em somente uma única iteração, por meio da utilização de diversas malhas. Já o *solver* ILU, devido a sua maior “implicitude” apresenta um desempenho melhor que o Gauss-Seidel, mas ainda bastante inferior ao ACM.

Neste problema, porém, pode-se observar que os ciclos V e F tiveram desempenhos bastante ruins comparados com o ciclo W, tanto considerando a Fig. 6.16(a) de ACM/GS como a Fig. 6.16(b) de ACM/ILU. O melhor desempenho do ciclo W pode ser devido ao fato deste efetuar a maior parte do “trabalho” nas malhas mais grossas, onde o *solver* direto LU é

utilizado para calcular a correção exata do sistema linear, tornando assim, o problema mais estável, sem necessitar de tantas iterações dos *solvers* nos outros níveis de malha.



(a)



(b)

Figura 6.16 Esforço computacional no quarto problema difusivo: (a) comparação de ACM/GS com GS, (b) comparação de ACM/ILU com ILU.

Os parâmetros utilizados para a obtenção dos resultados desse quarto problema foram bastante similares aos do problema anterior. Foram utilizados agrupamentos de quatro volumes, com número de níveis de malhas grossas variável, de modo que a malha mais grossa tenha menos de 70 volumes. O número ótimo de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) é apresentado na Tab. 6.3.

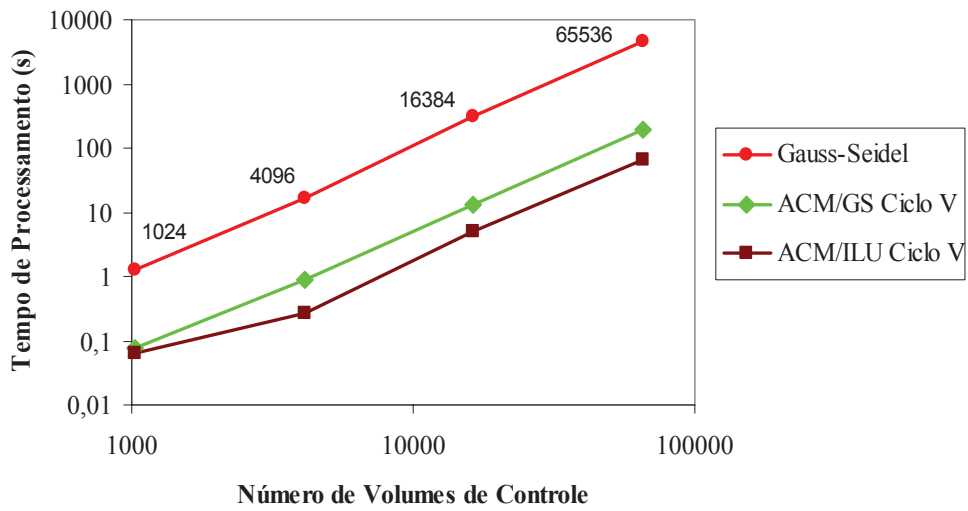
Pode-se observar o crescimento exagerado do número de iterações dos *solvers* Gauss-Seidel e ILU para a solução do problema nas malhas com 16384 e 65536 volumes para a

solução dos ciclos V e F enquanto no ciclo W há um decréscimo do número de iterações necessárias. Conclui-se que a “dificuldade” que o *solver* iterativo possui em resolver esse tipo de problema também aparece em alguns dos ciclos do método ACM, porém o ciclo W é robusto o suficiente para contornar esse tipo de problema. Neste quarto problema observou-se que além de ser necessário aglomerar na direção dos grandes coeficientes, é também importante varrer o domínio de tal forma que as informações das condições de contorno fortes sejam mais facilmente transmitidas para o interior do domínio para acelerar o estabelecimento (convergência) da solução.

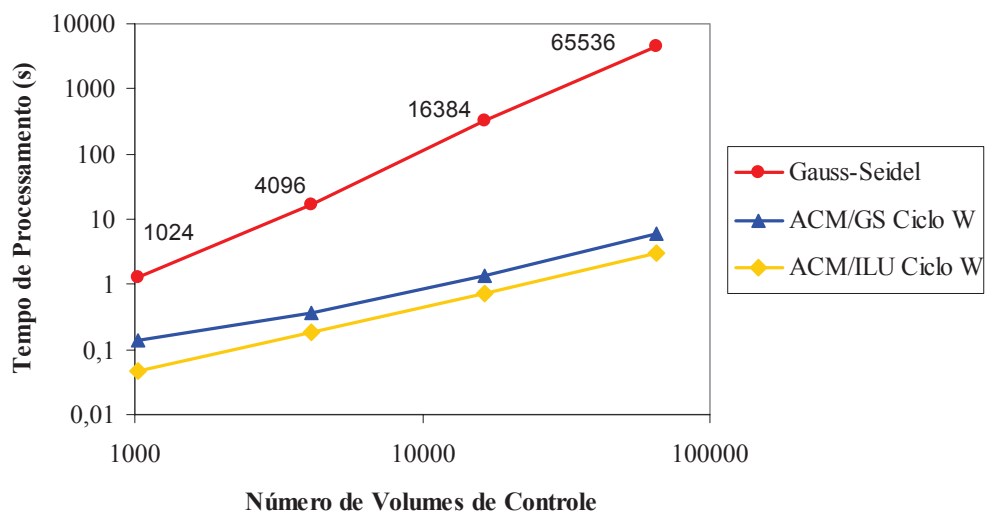
Tabela 6.3 Número de iterações de GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o quarto problema de condução de calor.

| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomerção | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|----------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                  | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 1024            | 2                                | 50                              | 100     | 30      | 3                      | 10      | 20      |
| 4096            | 3                                | 50                              | 30      | 40      | 5                      | 5       | 20      |
| 16384           | 4                                | 1500                            | 30      | 2000    | 300                    | 3       | 300     |
| 65536           | 5                                | 4000                            | 20      | 5000    | 700                    | 3       | 700     |

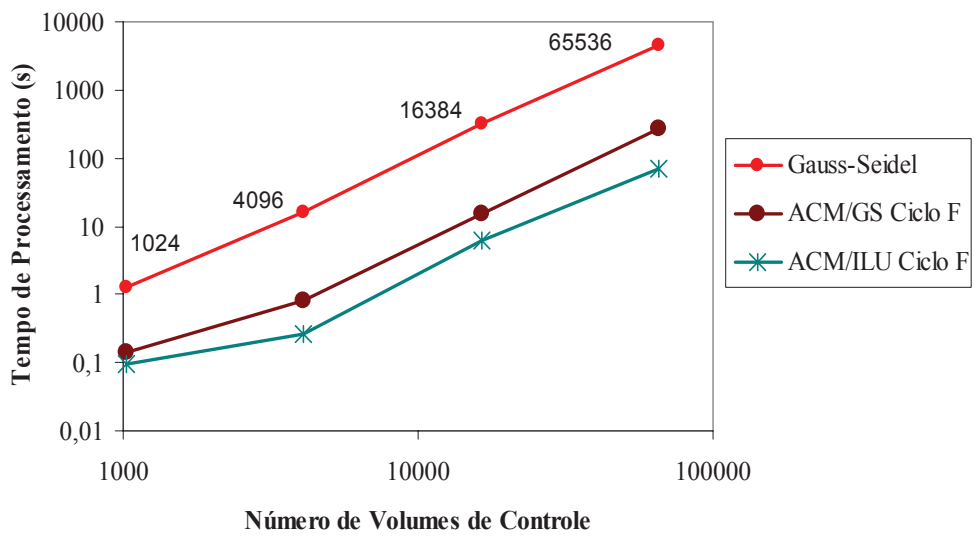
Novamente é feita a comparação entre os *solvers* internos GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) e como no caso anterior, o *solver* ILU mostra ter um desempenho melhor em termos de menor tempo de CPU (como pode ser visto na Fig. 6.17) e também menor número de iterações necessárias para resolver o problema proposto.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.17 Comparação entre ACM/ILU e ACM/GS no quarto problema difusivo para: (a) ciclo V, (b) ciclo W e (c) ciclo F.

Agora é feita a comparação entre a aglomeração geométrica e a adaptativa. São apresentados somente os resultados obtidos para o ciclo W, pois os ciclos V e F com aglomeração geométrica mostraram uma certa “dificuldade” para resolver este problema, uma vez que as taxas de convergência para estes ciclos ficaram aquém do esperado, como ocorreu com o uso da aglomeração adaptativa, cujos resultados foram apresentados nas Figs. 6.16 e 6.17.

As malhas resultantes das aglomerações também não serão mostradas devido a sua similaridade com as obtidas para o terceiro problema difusivo. Como *solver* interno do método ACM foi escolhido o ILU (para a comparação entre as aglomerações) por este ter obtido os melhores resultados nos casos já testados. O número de iterações foi mantido o mesmo da Tab. 6.3.

Como pode ser visto na Fig. 6.18, para este caso, os dois tipos de aglomeração mostraram-se bastante bons sendo que a aglomeração adaptativa obteve um ganho de tempo somente na malha mais grossa.

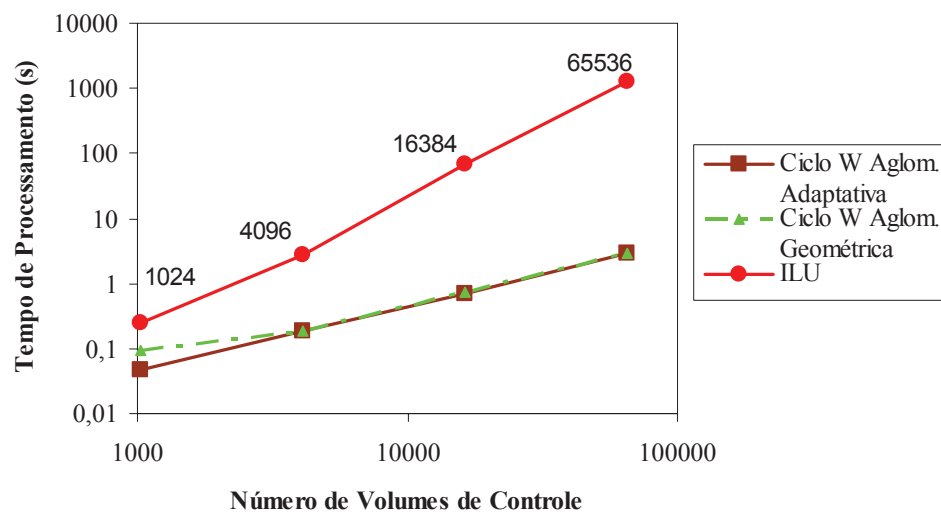


Figura 6.18 Comparação entre ACM/ILU ciclo W com aglomeração adaptativa e com aglomeração geométrica no quarto problema difusivo.

O grande ganho em termos de tempo de computação tanto com a utilização da aglomeração adaptativa como da geométrica no método ACM talvez se deva ao fato dos *solvers* iterativos apresentarem problemas na solução deste tipo de exemplo onde as condições de contorno de Dirichlet são prescritas na direção do coeficiente fraco (direção  $x$ ). Assim, onde os *solvers* iterativos falham, o método multigrid demonstra sua robustez. Pelo menos no que diz respeito ao ciclo W onde a maior parte do trabalho é efetuado nas malhas mais grossas e nestas é utilizado o *solver* direto LU.

Novamente ressalta-se o fato de que a aglomeração adaptativa demanda um tempo maior que a geométrica para efetuar o procedimento de formação das malhas grossas e, talvez, por isso não tenha mostrado um ganho de tempo na solução final do problema em relação à aglomeração geométrica.

Assim pode-se ver o bom desempenho do método ACM para alguns problemas de difusão aqui mostrados. Agora, cabe testá-lo em problemas de mecânica de fluidos envolvendo sistemas de equações não-lineares. Para efetuar os testes foram escolhidos os problemas clássicos da cavidade com tampa móvel e do duto com entrada e saída de massa.

## 6.2 Problema da cavidade com a tampa móvel

O problema da cavidade com tampa móvel é um problema bastante importante para a validação de códigos computacionais, pois apesar de ser um problema bastante simples, possui as principais dificuldades encontradas em soluções numéricas como o tratamento do acoplamento pressão-velocidade e das não-linearidades presentes no problema devido aos termos advectivos. Quando problemas advectivos são tratados, aparece um item importante a ser considerado, a função de interpolação usada para aproximar os termos advectivos.

O problema da cavidade com tampa móvel será inicialmente utilizado para validar o código desenvolvido para o método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) e posteriormente para avaliar o desempenho do método Multigrid de Correções Aditivas (ACM).

Na Fig. 6.19 são mostrados os resultados obtidos pelo EbFVM com os esquemas de interpolação para o termo advectivo, *Suds* (*Skew upstream difference scheme*) e *Suwds* (*Skew upstream weighted difference scheme*) para o número de Reynolds (baseado na velocidade da tampa da cavidade) igual a 100 (problema difusivo-dominante) em uma malha de 1028 elementos que dão origem a 1089 volumes de controle.

Como já mencionado no Cap. 5, no método *Suds* a variável na posição *upwind* é avaliada sobre o ponto de intersecção da linha de corrente  $\xi$  com uma das bordas do subvolume de controle considerado e, no método *Suwds* é utilizada a razão entre os fluxos de massa avaliados em dois pontos de integração de cada subvolume de controle, ou seja, a relação entre as massas que estão saindo e entrando no volume de controle.

No item (a) da Fig. 6.19 pode-se ver a malha utilizada, no item (b) as linhas de corrente e nos itens (c) e (d) os perfis de velocidade os quais são comparados com Ghia (1982) a fim de validar os resultados. Pode-se observar que para este caso, que o número de Reynolds é baixo, o uso de uma malha grossa já nos dá resultados bastante precisos.

Neste caso, as duas funções de interpolação obtiveram resultados bastante similares. Analisando em razão do tempo de computação obtido pelas duas funções de interpolação, o *Suds* mostra-se um pouco melhor levando 3,453s para atingir a convergência desejada enquanto que o método *Suws* leva 4,5s com o uso do *solver* GMRES<sup>5</sup>, o qual será usado nos próximos exemplos para a comparação com o método multigrid aqui utilizado. O critério utilizado para obter a convergência do problema foi a maior diferença entre as velocidades  $u_{atual}$  e  $u_{anterior}$ <sup>6</sup> considerando que em todos os volumes esta diferença deve ser menor que  $10^{-5}$ . Este critério foi empregado porque a faixa de variação da velocidade é conhecida. Quando esta faixa não é conhecida, logicamente critérios percentuais ou mesmo mais específicos devem ser utilizados (Maliska, 2004). O mesmo critério ainda deve ser aplicado para a diferença entre as velocidades  $v$  e a pressão  $p$ . Além, é claro, do critério de convergência aplicado a cada sistema linear resolvido a cada vez que é feita a atualização dos coeficientes das não-linearidades dos termos advectivos. Este critério baseia-se no cálculo do resíduo para cada equação do sistema linear e na aplicação da norma euclidiana para o vetor de resíduos, fazendo com que o resultado desta seja menor que  $10^{-5}$  para atingir a convergência.

Aumentando o número de Reynolds para 400, a função de interpolação *Suws* começa a apresentar problemas de convergência, o que concorda com as conclusões obtidas por Souza (2000) que não conseguiu obter a convergência para o problema da cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 1000 usando esta função de interpolação.

Um das possíveis explicações para esse problema apresentando pela função *Suws* é que como a variável  $\phi_u$ <sup>7</sup> é aproximada em função de dois pontos no máximo (um nó e um ponto de integração) não é possível captar-se corretamente as direções do escoamento, ocasionando lentidão ou não obtenção da convergência.

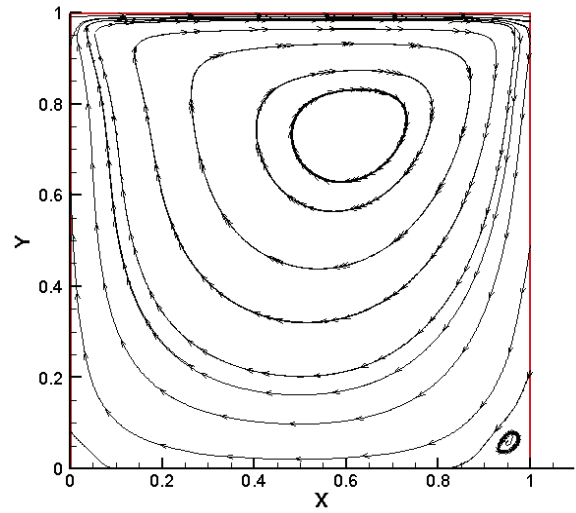
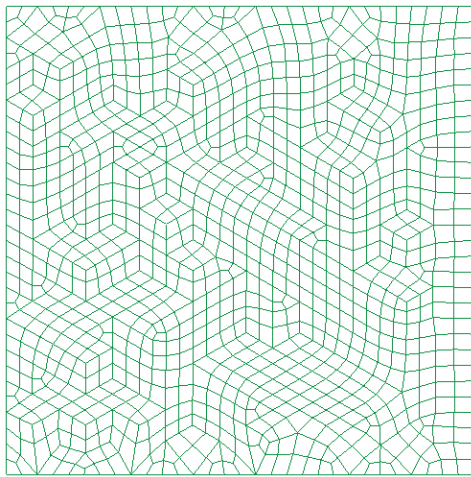
---

<sup>5</sup> O *solver* GMRES - *Generalized Minimal Residual* é um método iterativo não-estacionário bastante utilizado (SAAD, 2000). A versão usada neste trabalho pertence à biblioteca COI-lib e foi baseada nos algoritmos da biblioteca ITL - *The Iterative Template Library*, que é uma biblioteca genérica de componentes que disponibiliza métodos iterativos para a solução de sistemas lineares.

<sup>6</sup> A velocidade  $u_{anterior}$  é a velocidade que foi encontrada na última vez em que o sistema linear foi resolvido. As não-linearidades são atualizadas e dão origem a um novo sistema linear, sendo que com a solução desse novo sistema linear é obtida a velocidade  $u_{atual}$ . O mesmo raciocínio é válido para a velocidade  $v$  e pressão  $p$ .

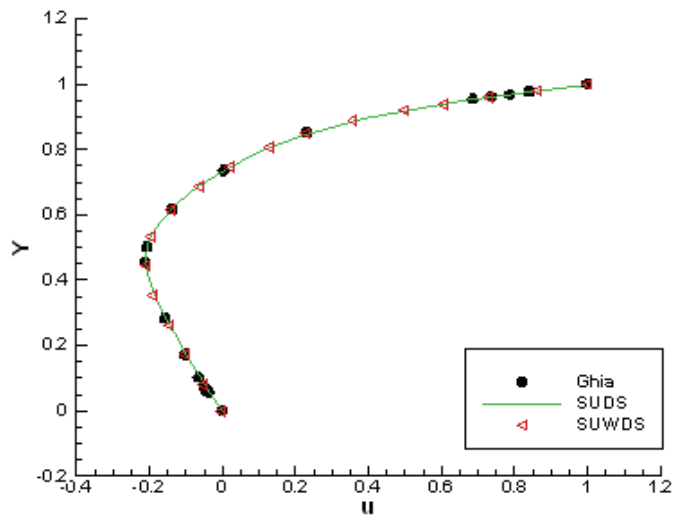
<sup>7</sup> O termo advectivo é modelado como uma diferença *upwind*, sendo  $\phi_u$  definida como a variável que está na posição *upwind* em relação ao ponto de integração que deve ser calculado.



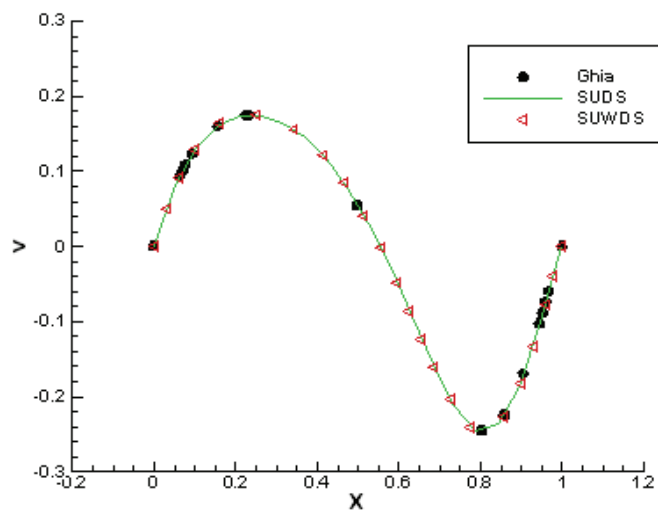


(a)

(b)



(c)



(d)

Figura 6.19 Problema da cavidade quadrada com tampa móvel com  $Re = 100$ : (a) malha utilizada, (b) linhas de corrente, (c) perfil de velocidade  $u$  e (d) perfil de velocidade  $v$ .

Já a função de interpolação  $Suds$ <sup>8</sup> segue apresentado bons resultados. Nesta tem-se uma matriz de coeficientes advectivos para os pontos de integração que relaciona os quatro pontos de integração de cada elemento, além de utilizar também os valores nos nós dos elementos para a melhor aproximação de  $\phi_u$ .

Na Fig. 6.20 são mostradas as linhas de corrente e os perfis de velocidade na cavidade com número de Reynolds igual a 400 obtidos com o uso da função de interpolação  $Suds$  para três diferentes graus de refino de malhas não-estruturadas.

Pode-se ver que mesmo na malha mais grossa de 1089 volumes os perfis de velocidade estão bastante próximos dos pontos obtidos por Ghia (1982), e vão se aproximando mais à medida que é utilizada uma malha mais refinada sendo que na malha com 10167 volumes, os pontos concordam muito bem.

Ainda cabe analisar os resultados para o EbFVM na cavidade com número de Reynolds igual a 1000, pois estes serão os problemas utilizados para avaliar o desempenho do método Multigrid de Correções Aditivas (ACM).

Novamente, mesmo na malha mais grossa considerada (com 1089 volumes) os perfis de velocidade ficam próximos aos obtidos por Ghia (1982). À medida que se refina a malha, o resultado é melhorado, sendo que os perfis concordam muito bem com os pontos de Ghia (1982) quando é utilizada a malha com 10167 volumes.

---

<sup>8</sup> Maiores detalhes sobre as funções de interpolação  $Suds$  e  $Suwds$  são apresentados no Cap. 5

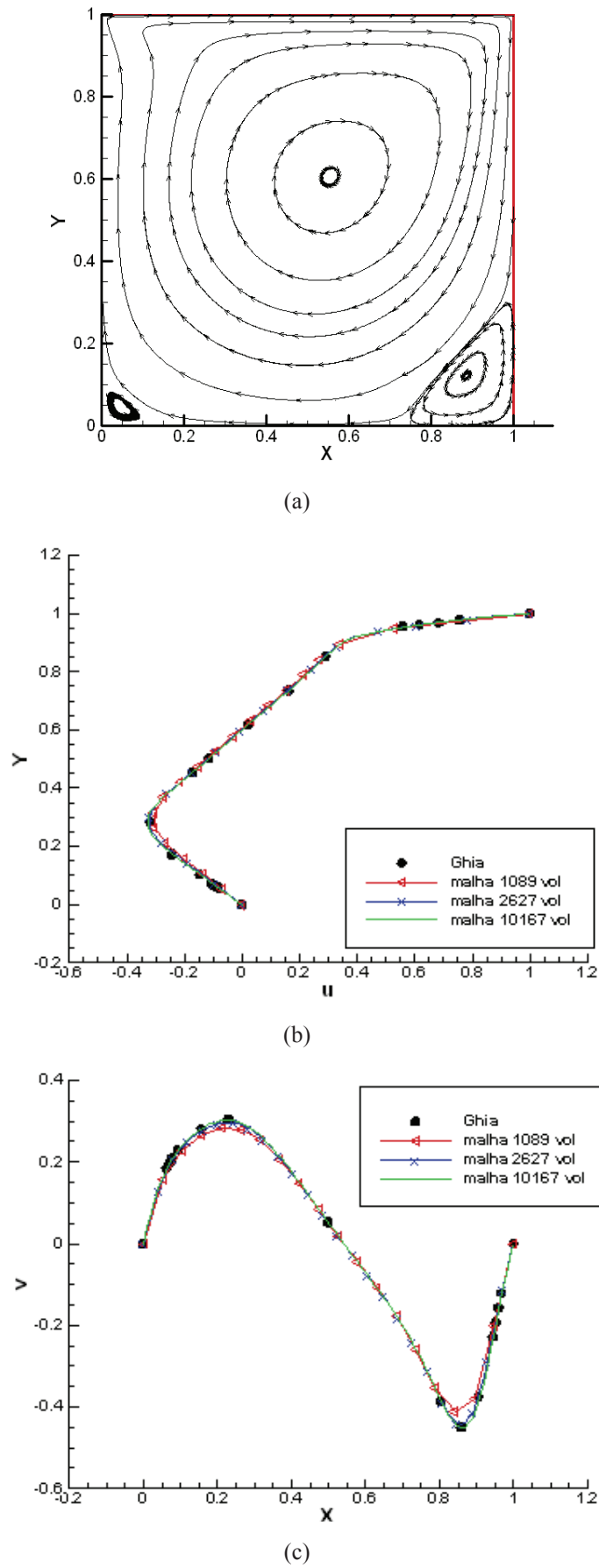
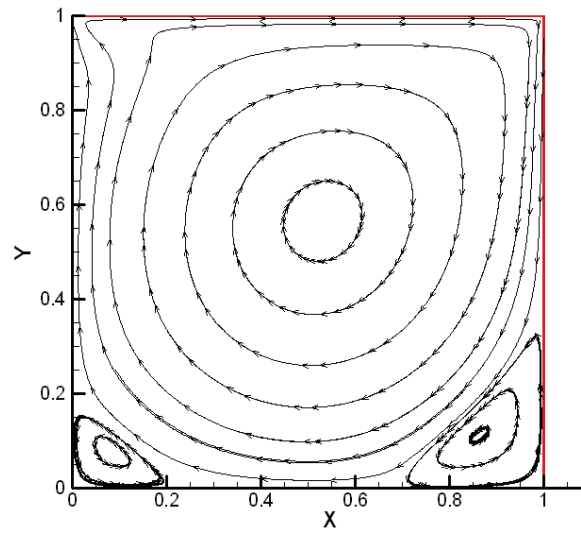
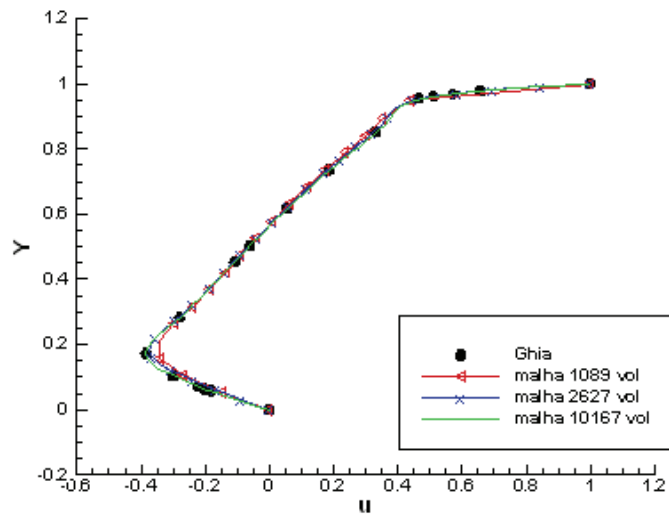


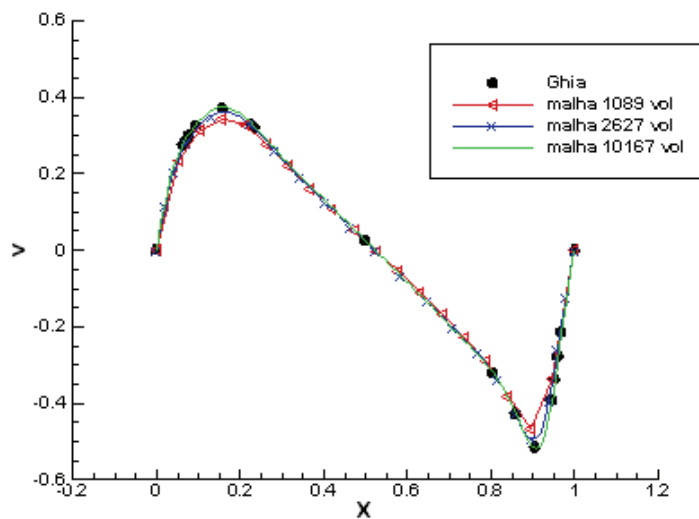
Figura 6.20 Problema da cavidade quadrada com tampa móvel com  $Re = 400$ : (a) linhas de corrente, (b) perfil de velocidade  $u$  e (c) perfil de velocidade  $v$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 6.21 Problema da cavidade quadrada com tampa móvel com  $Re = 1000$ : (a) linhas de corrente, (b) perfil de velocidade  $u$  e (c) perfil de velocidade  $v$ .

Comprovada a correta implementação do método de Volumes Finitos baseado em Elementos para a aproximação das equações de Navier-Stokes e Conservação da Massa em malhas não-estruturadas, cabe iniciar os testes com o método Multigrid de Correções Aditivas, a fim de comprovar seu desempenho em problemas não-lineares. Os seguintes itens serão testados:

- o uso de malhas cartesianas e igualmente espaçadas em ambas as direções  $x$  e  $y$ , de malhas cartesianas com espaçamentos diferentes ( $\Delta x \neq \Delta y$ ) que originam coeficientes anisotrópicos nas equações consideradas e de malhas não-cartesianas;
- problemas com número de Reynolds igual a 100, 400 e 1000;
- número de volumes de controle que darão origem ao novo volume da malha grossa;
- os ciclos multigrid V, W e F;
- uso dos *solvers* internos Gauss-Seidel (ACM/GS) e ILU (ACM/ILU);
- as funções de aglomeração vistas no Cap. 4;
- e as diferenças entre a aglomeração efetuada somente no início do processo de solução do problema e a aglomeração efetuada a cada atualização das não-linearidades.

### 6.2.1 Malhas cartesianas igualmente espaçadas

Inicialmente consideram-se as malhas cartesianas construídas de forma não-estruturada (sem ordenamento na criação dos elementos e conseqüentemente, sem ordenamento na obtenção dos volumes de controle) mostradas na Fig. 6.22.

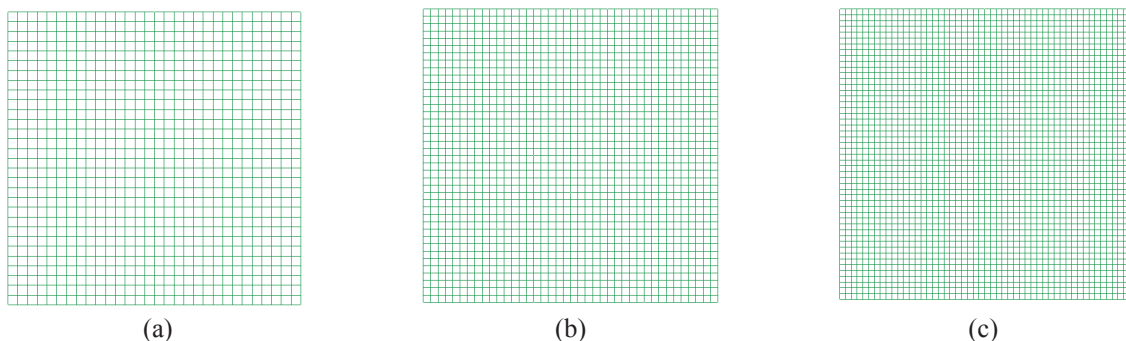


Figura 6.22 Malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com (a) 900 elementos, (b) 1600 elementos e (c) 2500 elementos.

Para os testes ainda são utilizadas malhas com 10000, 25600 e 62500 elementos, não mostradas aqui devido ao seu alto grau de refino dificultar a visualização dos elementos.

O passo seguinte é resolver os problemas em cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 100, 400 e 1000.

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 100**

O primeiro teste a ser efetuado é quanto ao número de células (volumes de controle) que serão aglomeradas para dar origem ao bloco (novo volume de controle) da malha grossa. Para efetuar esse teste inicial foi escolhida a malha mais fina de 62500 elementos (63001 volumes de controle) a fim de obter-se uma diferença mais significativa entre os tempos de computação.

Para dar início aos testes, alguns parâmetros padrão devem ser definidos para que se possa visualizar a diferença entre os tempos de computação obtidos somente com a variação de um parâmetro: o número volumes de controle que serão aglomerados para dar origem ao bloco da malha grossa.

Considerando a experiência adquirida nos problemas lineares anteriormente apresentados e alguns testes preliminares, foi definida a configuração de parâmetros mostrada na Tab. 6.4.

Tabela 6.4 Parâmetros do método ACM utilizados nos testes quanto ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para a cavidade com  $Re = 100$ .

|  |   |
|--|---|
| Tipo de ciclo multigrid                              | W   |
| <i>Solver</i> interno                                | ILU   |
| Número máximo de células para o <i>solver</i> direto | 60  |
| Número fixo de iterações do <i>solver</i> iterativo  | 5   |
| Número máximo de ciclos                              | 50  |
| Aglomera somente no início do processo               | Sim   |
| Resíduo máximo aceito da solução                     | $10^{-5}$   |
| Esquema de aglomeração                               | Coefficiente da variável pressão da equação de conservação da massa |

O tipo de ciclo escolhido foi o ciclo W por mostrar-se mais estável nos problemas anteriormente testados. A mesma idéia foi aplicada na escolha do *solver* interno ILU, para o qual foram definidas cinco iterações fixas em cada nível de malha.

Alguns testes preliminares mostraram que a escolha de 60 células (volumes) como número máximo de células para o *solver* direto gerou bons resultados, então esse critério foi também escolhido. O número máximo de ciclos multigrid para a solução de cada sistema linear foi definido como 50, mas na prática são necessários bem menos ciclos para atingir a convergência desejada. A aglomeração é feita somente no início do processo (com base no primeiro sistema linear), e o coeficiente escolhido como critério para efetuar a aglomeração é o coeficiente da variável pressão da equação de conservação da massa. Este coeficiente foi escolhido porque no caso de problemas de escoamentos, a variável mais representativa é, geralmente, a pressão e também com base em informações obtidas na literatura uma vez que esse coeficiente foi utilizado por Raw (1996) em seus trabalhos apresentando bons resultados. Por fim, o resíduo máximo permitido na solução do sistema linear é  $10^{-5}$ .

Na Tab. 6.5 são apresentados os resultados em termos de tempo de computação obtidos para os diferentes números de células por bloco utilizadas para efetuar a aglomeração e também a quantidade de níveis a serem gerados para satisfazer o critério de “Número máximo de células para *solver* direto” igual a 60, sendo que o *solver* direto deve ser aplicado somente no último nível de malha.

Tabela 6.5 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração.

| Número de células por bloco | Número de níveis de malha | Tempo de CPU (s) |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|
| 3                           | 8                         | 251,25           |
| <b>4</b>                    | <b>7</b>                  | <b>249,265</b>   |
| 5                           | 6                         | 278,156          |
| 6                           | 6                         | 296,875          |
| 7                           | 6                         | 307,469          |
| 8                           | 5                         | 327,61           |

Pela Tab. 6.5 pode-se ver que a aglomeração em blocos de quatro células mostrou ser a melhor alternativa, o que já era esperado visto a sua utilização em geral na literatura tanto nos métodos multigrid tradicionais quanto nos algébricos (Van Doormaal e Hutchinson, 1986, Zdravistch, Fletcher e Behnia, 1997 entre outros).

Definido este parâmetro, pode-se realizar outros testes, como comparações envolvendo os ciclos V, W e F.

Para a próxima comparação alguns parâmetros utilizados no teste anterior serão mantidos, como:

- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  Coeficiente da variável pressão da eq. de conservação da massa

Gauss-Seidel é o *solver* interno utilizado no método ACM (ACM/GS) para estes primeiros testes com os ciclos V, W e F, mostrando um desempenho muito bom para a cavidade com baixo número de Reynolds, conforme pode ser visto na Fig. 6.23 mostrada abaixo.

O ciclo W novamente mostrou ter o melhor desempenho seguido pelo ciclo F e o ciclo V. Aplicando uma linha de tendência do tipo exponencial aos dados de ACM/GS Ciclo W e de GMRES determinam-se as retas de regressão (ou tendência),  $y = 1E-06x^{2,0661}$  com coeficiente de determinação,  $R^2 = 0,99$  para GMRES e  $y = 8,08E-04x^{1,1}$  com  $R^2 = 1$  para ACM/GS ciclo W.

No que diz respeito ao *solver* GMRES, nos resultados obtidos ele se mostrou um *solver* de segunda ordem ( $O(n^2)$ ), ficando aquém do esperado, pois a literatura o indica como um *solver* eficaz e robusto (Saad, 2000). No entanto GMRES possui uma série de parâmetros a serem ajustados como o número de *restarts*, o pré-condicionador utilizado, entre outros. Neste trabalho não foi feito um estudo acerca desses parâmetros, o que leva a crer que os resultados obtidos pelo GMRES poderiam ser melhorados. Porém, mesmo nestas condições não-ideais optou-se por mostrar este *solver*, por tratar-se de uma boa alternativa para a resolução de um sistema de equações acopladas.

Já o método ACM/GS, especialmente com o ciclo W mostrou concordar com a literatura que aponta os métodos multigrid como aceleradores de convergência que levam os *solvers* iterativos a tornarem-se de primeira ordem ( $O(n^1)$ ).



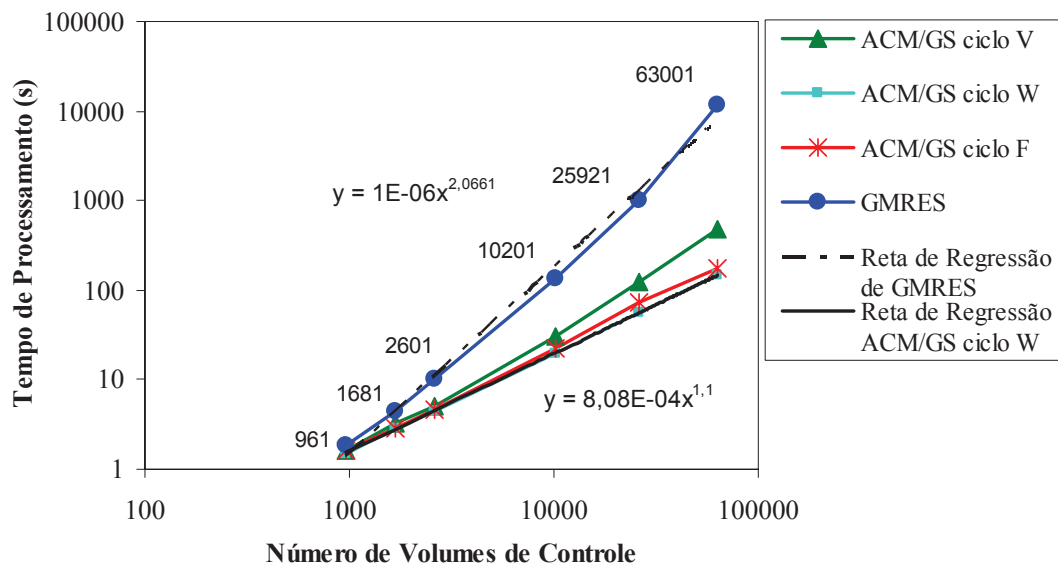


Figura 6.23 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para cavidade com  $Re = 100$ .

Na Fig. 6.24 apresentam-se novos resultados utilizando os mesmos parâmetros do caso anterior, somente alterando o *solver* interno do método ACM, que agora é o ILU.

Neste caso, os ciclos W e F apresentaram resultados bastante similares diferindo apenas em frações de segundos. O ciclo V apresentou um desempenho um pouco inferior aos outros dois ciclos (W e F) como pode ser visto na Fig. 6.24. Traçando a reta de regressão para ACM/ILU ciclo W, obtém-se  $y = 7,94E-04x^{1,13}$  com coeficiente de determinação,  $R^2 = 1$ .

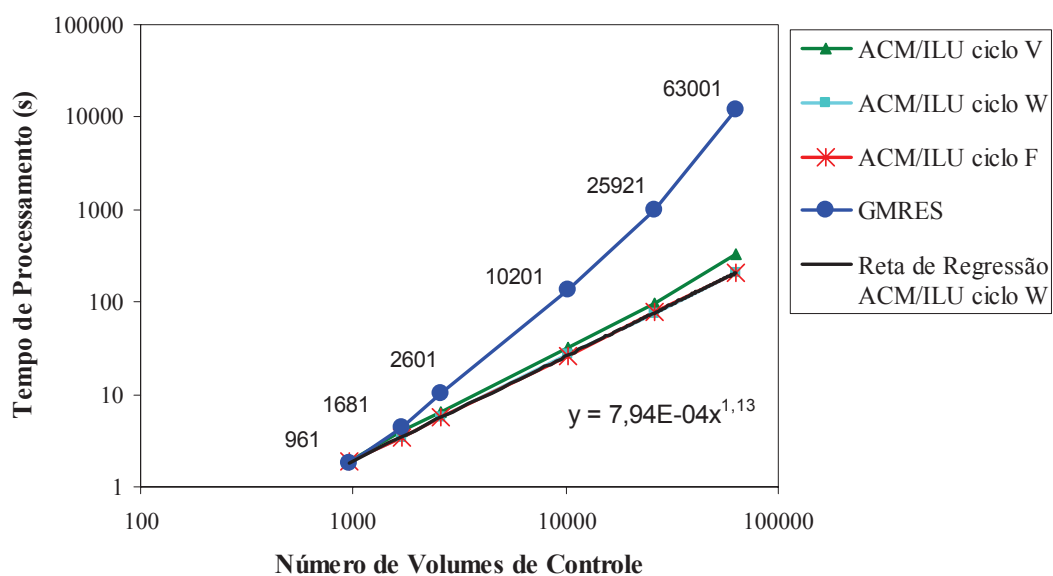


Figura 6.24 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com  $Re = 100$ .

Ainda na Fig. 6.25 são mostradas duas comparações entre o método ACM/GS e ACM/ILU para os dois ciclos que obtiveram melhores resultados, W e F. Tanto na Fig. 6.25(a) onde foi apresentado o ciclo W como na Fig. 6.25(b) onde foi apresentado o ciclo F, o uso de Gauss-Seidel como *solver* interno do multigrid apresentou resultados melhores que o uso do ILU. Esse fato difere do que foi encontrado nos problemas de difusão anteriormente apresentados. Porém analisando as tabelas que contém os números de iterações utilizadas para resolver os problemas lineares (Tab. 6.2 e Tab. 6.3) pode-se ver que estes necessitam de um grande número de iterações tanto de ILU (em ACM/ILU) como Gauss-Seidel (em ACM/GS), enquanto que o problema da cavidade com tampa móvel (não-linear) com número de Reynolds igual a 100 necessita de poucas iterações para a solução de cada um dos sistemas lineares (conforme Tab. 6.6). Levando-se em conta que uma iteração de ILU tem um custo computacional bem mais alto do que uma iteração de Gauss-Seidel, o uso de Gauss-Seidel (no método ACM/GS) em um problema de convergência fácil (onde são necessárias poucas iterações) torna-se uma boa alternativa.

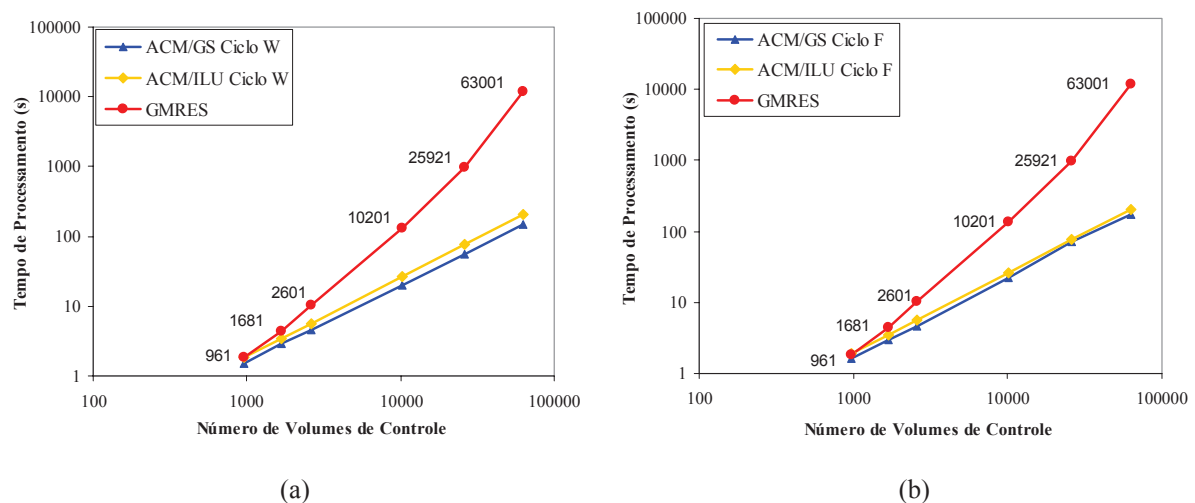


Figura 6.25 Comparação entre o *solver* GMRES e os métodos ACM/GS e ACM/ILU para cavidade com  $Re = 100$  para: (a) ciclo W e (b) ciclo F.

Na Tab. 6.6 são mostradas as quantidades de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) utilizadas para se chegar aos resultados mostrados nas Figs. 6.23 e 6.24. Pode-se ver que o ciclo W do ACM/GS apresentou bons resultados com apenas poucas iterações de Gauss-Seidel, sendo seu comportamento bastante estável em número de iterações<sup>9</sup>. No caso do uso do *solver* ILU (em ACM/ILU), o número de iterações utilizadas também foi pequeno, variando de dois a cinco, sugerindo que para esse problema o uso de um

<sup>9</sup> Define-se neste trabalho como estabilidade em termos de número de iterações, quando para diferentes graus de refino de malha, o número ótimo de iterações em cada malha não sofre grandes variações.

*solver* interno menos robusto e de fácil implementação como Gauss-Seidel funciona bem. Salienta-se que quando os ciclos F e V são utilizados, são necessárias mais iterações dos *solvers* internos GS e ILU para que o método ACM produza bons resultados.

No próximo teste são comparados os esquemas de aglomeração que foram implementados a fim de decidir qual coeficiente ou conjunto de coeficientes será escolhido como base para efetuar-se a aglomeração. Até agora, em todos os testes foi utilizado o coeficiente da variável pressão da equação de conservação da massa, o  $A^{pp}$ . A partir desse momento serão testadas as outras possibilidades apresentadas no Cap. 4.

Tabela 6.6 Número de iterações de GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ .

| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomeração | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                   | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 961             | 4                                 | 10                              | 3       | 5       | 5                      | 5       | 5       |
| 1681            | 4                                 | 10                              | 3       | 5       | 3                      | 3       | 3       |
| 2601            | 4                                 | 15                              | 5       | 5       | 2                      | 3       | 3       |
| 10201           | 5                                 | 15                              | 5       | 10      | 2                      | 2       | 2       |
| 25921           | 6                                 | 50                              | 5       | 15      | 10                     | 2       | 3       |
| 63001           | 7                                 | 300                             | 5       | 25      | 10                     | 5       | 5       |

Observando a matriz dada pela Eq. (6.1) que define os nove coeficientes que conectam o volume de controle aos seus vizinhos e são, logicamente, representativos dos fluxos nas fronteiras do volume de controle, pode-se definir um ordenamento para esses coeficientes e também para as normas, traço e determinante desta matriz como esquemas de aglomeração (ver Tab. 6.7).

$$[A] = \begin{bmatrix} [A^{uu}] & [A^{uv}] & [A^{uP}] \\ [A^{vu}] & [A^{vv}] & [A^{vP}] \\ [A^{Pu}] & [A^{Pv}] & [A^{PP}] \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Assim, temos um parâmetro numérico que corresponde a cada esquema de aglomeração definido neste trabalho. Quando for referenciado o esquema de aglomeração 11,

por exemplo, sabe-se que foi utilizada a norma da soma da matriz como critério de aglomeração.

Tabela 6.7 Parâmetro numérico correspondente ao tipo de esquema de aglomeração.

| Parâmetro para a Aglomeração | Definição da aglomeração  |
|------------------------------|---|
| 1                            | Coeficiente $A^{uu}$ da matriz do volume de controle.   |
| 2                            | Coeficiente $A^{uv}$ da matriz do volume de controle.   |
| 3                            | Coeficiente $A^{uP}$ da matriz do volume de controle.   |
| 4                            | Coeficiente $A^{vu}$ da matriz do volume de controle.   |
| 5                            | Coeficiente $A^{vv}$ da matriz do volume de controle.   |
| 6                            | Coeficiente $A^{vP}$ da matriz do volume de controle.   |
| 7                            | Coeficiente $A^{Pu}$ da matriz do volume de controle.   |
| 8                            | Coeficiente $A^{Pv}$ da matriz do volume de controle.   |
| 9                            | Coeficiente $A^{PP}$ da matriz do volume de controle.   |
| 10                           | A norma de Frobenius definida como $\ A\ _F = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n  a_{ij} ^2 \right)^{1/2}$ .  |
| 11                           | A norma da soma $\ A\ _1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n  a_{ij} $ .  |
| 12                           | A norma do máximo $\ A\ _\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m  a_{ij} $ .   |
| 13                           | A norma euclidiana $\ A\ _2 = [\rho(A^H A)]^{1/2} = [\rho(AA^H)]^{1/2}$ .   |
| 14                           | O traço da matriz $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .   |
| 15                           | O determinante da matriz<br>$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ . |

Aplicando os esquemas de aglomeração, acima listados, para a malha mais fina considerada (de 63001 volumes) pode-se avaliar o comportamento destes em termos de tempos de computação.

Como o objetivo dos testes aqui realizados é chegar a um conjunto de parâmetros gerais que possam ser aplicados a uma série de problemas obtendo, em média, bons resultados para todos e, ainda, com base nos testes até agora realizados optou-se pela seguinte configuração de parâmetros:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  Gauss-Seidel
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

O número de níveis de malha utilizados pelo método ACM/GS foi definido de tal forma que o *solver* direto seja aplicado somente no último nível, na malha mais grossa.

Os resultados encontrados para a malha de 63001 volumes são mostrados na Tab. 6.8. Alguns esquemas não convergiram para os parâmetros propostos e mesmo modificando-se alguns destes parâmetros, como o número de iterações do *solver*, por exemplo, ainda tiveram dificuldades de convergência. Estes esquemas aparecem na tabela com a frase “Não convergiu!” no lugar do tempo de computação. Analisando quais coeficientes esses esquemas representam, pode-se ver que são os coeficientes  $A^{uv}$ ,  $A^{uP}$ ,  $A^{vu}$ ,  $A^{vP}$ ,  $A^{Pu}$  e  $A^{Pv}$ , que são os coeficientes menos representativos das equações consideradas. Já era esperado que o uso dos mesmos como esquema de aglomeração não apresentasse bons resultados.

Tabela 6.8 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 157,578                    |
| 2                      | Não convergiu!             |
| 3                      | Não convergiu!             |
| 4                      | Não convergiu!             |
| 5                      | 159,016                    |
| 6                      | Não convergiu!             |
| 7                      | Não convergiu!             |
| 8                      | Não convergiu!             |
| 9                      | 146,438                    |
| 10                     | 148,235                    |
| 11                     | 154,265                    |
| 12                     | 154,969                    |
| 13                     | 151,032                    |
| 14                     | 156,328                    |
| 15                     | 201,531                    |

Os esquemas que apresentaram melhores resultados foram os esquemas 9 e 10, nessa ordem.

Os esquemas que convergiram foram testados para as outras malhas a fim de melhor verificar o comportamento. Os resultados são apresentados em forma de tabela (na Tab. 6.9), pois devido ao fato de possuírem valores relativamente próximos, fica difícil sua visualização em um gráfico.

Tabela 6.9 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 961 volumes          | Malha 1681 vol. | Malha 2601 vol. | Malha 10201 vol. | Malha 25921 vol. | Malha 63001 vol. |
| 1                      | 1,532                      | 3,079           | 4,86            | 21,484           | 56,968           | 157,578          |
| 5                      | 1,531                      | 2,906           | 4,641           | 21,812           | 60,125           | 159,016          |
| <b>9</b>               | <b>1,484</b>               | <b>2,859</b>    | <b>4,453</b>    | <b>19,765</b>    | <b>55,344</b>    | <b>146,438</b>   |
| <b>10</b>              | <b>1,484</b>               | <b>2,844</b>    | <b>4,469</b>    | <b>19,75</b>     | <b>55,531</b>    | <b>148,235</b>   |
| 11                     | 1,484                      | 2,859           | 4,453           | 19,797           | 58,75            | 154,265          |
| 12                     | 1,5                        | 2,875           | 4,454           | 19,75            | 58,375           | 154,969          |
| 13                     | 1,547                      | 2,937           | 4,594           | 20,313           | 60,109           | 151,032          |
| 14                     | 1,516                      | 2,891           | 4,5             | 21,329           | 58,437           | 156,328          |
| 15                     | 1,766                      | 3,328           | 5,547           | 26,844           | 77,938           | 201,531          |

Efetando mais um teste, agora realizando a aglomeração a cada vez que as não-linearidades são atualizadas e o sistema linear é modificado e não somente no início do processo, obtém-se os tempos de computação apresentados na Tab. 6.10 para a malha de 63001 volumes.

Tabela 6.10 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 212,766                    |
| 2                      | Não convergiu!             |
| 3                      | Não convergiu!             |
| 4                      | Não convergiu!             |
| 5                      | 219,89                     |
| 6                      | Não convergiu!             |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 7                      | Não convergiu!             |
| 8                      | Não convergiu!             |
| 9                      | 201,407                    |
| 10                     | 197,516                    |
| 11                     | 193,766                    |
| 12                     | 195,968                    |
| 13                     | 259,89                     |
| 14                     | 214,218                    |
| 15                     | 239,36                     |

Novamente os esquemas 2, 3, 4, 6, 7 e 8 apresentaram problemas de convergência e por isso são excluídos dos testes. Ressalta-se, mais uma vez, que estes coeficientes são menos representativos nas equações consideradas, talvez por isso quando utilizados como critério de aglomeração não apresentem bons resultados.

Na Tab. 6.11 são mostrados os resultados dos esquemas de aglomeração restantes para as diferentes malhas.

Analisando os resultados, os melhores tempos foram obtidos pelos esquemas 11 e 12, destacando-se também os esquemas 10 e 9. De modo geral, a realização do procedimento de aglomeração toda vez que o sistema linear é modificado aumenta o tempo de computação e não traz benefícios suficientes para justificar a sua realização. Isso pode ser comprovado por meio da comparação dos valores das Tabs. 6.9 e 6.11.



Tabela 6.11 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 961 volumes          | Malha 1681 vol. | Malha 2601 vol. | Malha 10201 vol. | Malha 25921 vol. | Malha 63001 vol. |
| 1                      | 1,812                      | 3,438           | 5,704           | 25,859           | 74,406           | 212,766          |
| 5                      | 1,828                      | 3,422           | 5,438           | 25,937           | 74,718           | 219,89           |
| 9                      | 1,797                      | 3,39            | 5,234           | 23,672           | 68,859           | 201,407          |
| 10                     | 1,829                      | 3,437           | 5,359           | 25,531           | 68,578           | 197,516          |
| <b>11</b>              | <b>2,11</b>                | <b>3,406</b>    | <b>5,266</b>    | <b>25,375</b>    | <b>68,797</b>    | <b>193,766</b>   |
| <b>12</b>              | <b>1,812</b>               | <b>3,422</b>    | <b>5,281</b>    | <b>25,375</b>    | <b>68,562</b>    | <b>195,968</b>   |
| 13                     | 2,406                      | 4,578           | 7,062           | 34,172           | 91,297           | 259,89           |
| 14                     | 1,937                      | 3,671           | 5,704           | 26,171           | 74,437           | 214,218          |
| 15                     | 1,875                      | 3,797           | 5,938           | 28,469           | 82,031           | 239,36           |

Com os resultados até agora obtidos nos testes realizados pode-se listar os parâmetros gerais que seriam os mais adequados para resolver esse problema. São eles:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  Gauss-Seidel
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow$  4
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  9 ou 10

Considerando a malha mais grossa de 961 volumes, pode-se ver como ficam os blocos aglomerando somente no início do processo para o esquema 9, que obteve os melhores

resultados. A malha original é apresentada na Fig. 6.26 e os três níveis de aglomeração na Fig. 6.27.

Considerando que a malha é composta de  $31 \times 31$  volumes de controle distribuídos igualmente em ambas as direções, e como o ordenamento dos nós se dá a partir do canto superior direito, o volume de controle do canto superior esquerdo, na verdade “ $1/4$ ” de volume de controle, acaba sendo aglomerado na direção vertical, o mesmo ocorrendo com todos os “ $1/2$ ” de volumes de controle que estão no lado esquerdo e no lado inferior e também os “ $1/4$ ” de volumes que estão nos cantos. Este comportamento acaba influenciando nos outros níveis de aglomeração.

Se a malha fosse composta de  $32 \times 32$  volumes de controle, o critério de aglomeração formaria blocos quadrados.

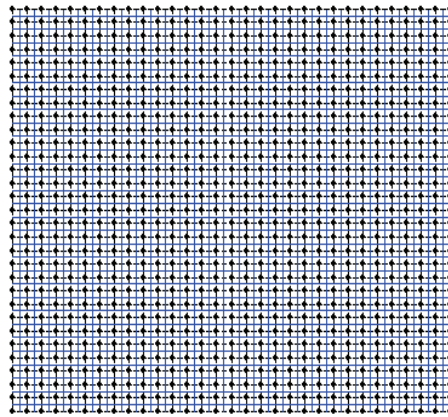


Figura 6.26 Malha original com 961 volumes de controle.

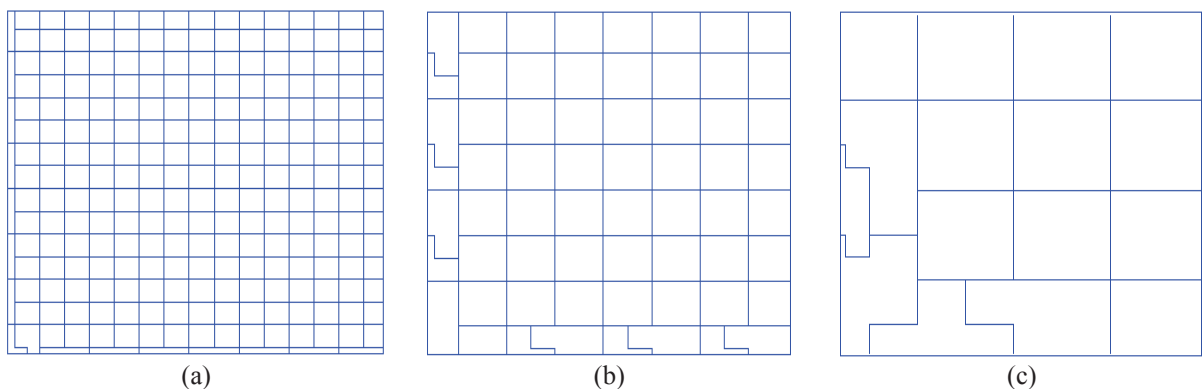


Figura 6.27 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 9 com

(a) 240 volumes, (b) 63 volumes e (c) 16 volumes.

Considerando o esquema de aglomeração 10 (norma de Frobenius da matriz), obtém-se os níveis de aglomeração mostrados abaixo na Fig. 6.28 que são similares aos obtidos pelo

esquema 9 (Fig. 6.27). A malha do primeiro nível de aglomeração é igual a do esquema 9, com o segundo e o terceiro nível apresentando uma configuração um pouco diferente.

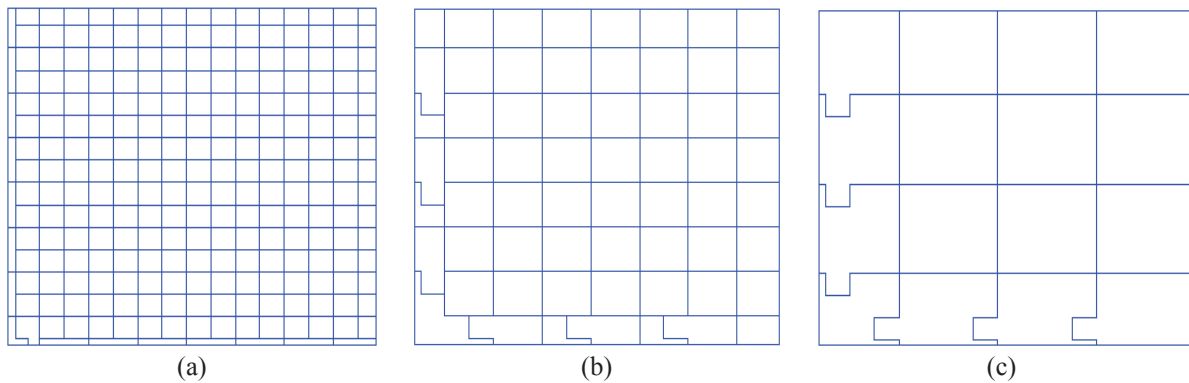


Figura 6.28 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 10 com (a) 240 volumes, (b) 63 volumes e (c) 16 volumes.

Para conhecimento do leitor mostram-se nas Figs. 6.29 e 6.30 as malhas resultantes do uso dos esquemas de aglomeração 3 e 6, os quais, entre outros, apresentaram dificuldades de convergência para o problema especificado. Pode-se notar que as malhas resultantes da utilização dos esquemas de aglomeração 3 e 6 apresentam direções preferenciais para realizar a aglomeração. No caso do uso do esquema 3, a direção horizontal é a preferencial e no caso do esquema 6, é a direção vertical. Porém, para este tipo de problema não é adequado utilizar-se malhas com somente uma direção preferencial, pois este não é um problema anisotrópico em uma única direção.

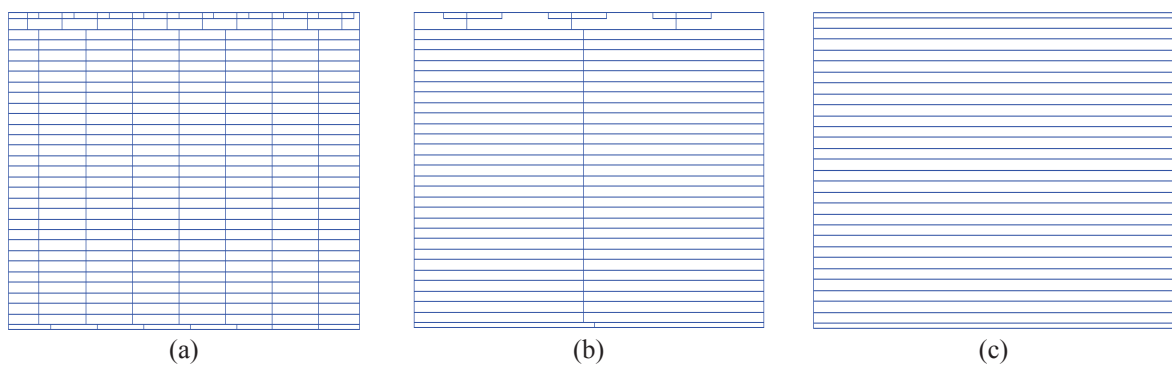


Figura 6.29 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 3 com (a) 253 volumes, (b) 62 volumes e (c) 30 volumes.

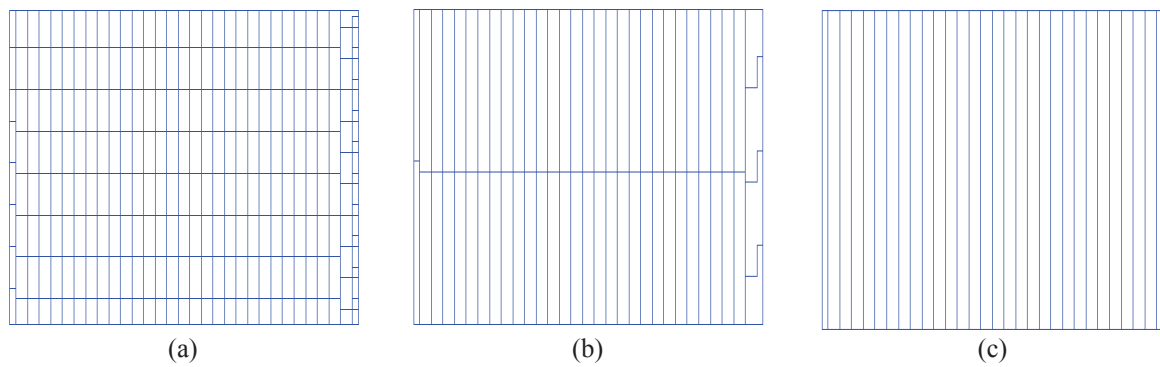


Figura 6.30 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 6 com (a) 253 volumes, (b) 62 volumes e (c) 30 volumes.

A seguir, procurando aumentar a influência dos termos advectivos, o mesmo problema com o número de Reynolds igual a 400 é resolvido.

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 400**

Novamente, o primeiro teste que será efetuado é quanto ao número de células (volumes de controle) que serão aglomeradas para dar origem a um bloco de volumes da malha grossa. Tomando a malha com 62500 elementos (63001 volumes de controle) e definindo o mesmo grupo de parâmetros mostrados na Tab. 6.4 e aqui repetidos na Tab. 6.12 a fim de relembrar o leitor, pode-se dar início ao processo de obtenção de resultados.

Tabela 6.12 Parâmetros do método ACM utilizados nos testes quanto ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para a cavidade com  $Re = 400$ .

|  |   |
|--|---|
| Tipo de ciclo multigrid                              | W   |
| <i>Solver</i> interno                                | ILU   |
| Número máximo de células para o <i>solver</i> direto | 60  |
| Número fixo de iterações do <i>solver</i> iterativo  | 5   |
| Número máximo de ciclos                              | 50  |
| Aglomera somente no início do processo               | Sim   |
| Resíduo máximo aceito da solução                     | $10^{-5}$   |
| Esquema de aglomeração                               | Coefficiente da variável pressão da equação de conservação da massa |

Os tempos de computação obtidos para diferentes “números de células por bloco” usados para efetuar as aglomerações e, também, a quantidade de níveis de malhas necessárias são apresentadas na Tab. 6.13.

Tabela 6.13 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com  $Re = 400$ .

| Número de células por bloco | Número de níveis de malha | Tempo de CPU (s) |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|
| 3                           | 8                         | 337,234          |
| <b>4</b>                    | <b>7</b>                  | <b>321,281</b>   |
| 5                           | 6                         | 405,563          |
| 6                           | 6                         | 397,032          |
| 7                           | 6                         | 426,985          |
| 8                           | 5                         | 457              |

Novamente a aglomeração em blocos de quatro células mostrou ser a melhor alternativa. Definido este parâmetro são realizadas as comparações envolvendo os ciclos V, W e F. Os parâmetros utilizados são os mesmos da Tab. 6.12, exceto que o número de iterações do *solver* interno do método ACM é variável e, como *solver* interno são testados os métodos Gauss-Seidel e ILU.

Inicialmente é utilizado o método ACM/GS, o qual mostra um bom desempenho para a cavidade com número de Reynolds igual a 400, conforme pode ser visto na Fig. 6.31.

O ciclo W novamente tem o melhor desempenho seguido pelo ciclo F e o ciclo V. Com a aplicação de uma linha de tendência do tipo exponencial aos dados de ACM/GS ciclo W e de GMRES determinam-se as retas de regressão,  $y = 2E-06x^{2,0704}$  com coeficiente de determinação,  $R^2 = 0,99$  para GMRES e  $y = 4E-03x^{1,0017}$  com  $R^2 = 1$  para ACM/GS ciclo W.

O desempenho do *solver* GMRES foi bastante similar ao obtido no caso anterior da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$  e, novamente, ficou aquém do esperado. As explicações dadas no problema anterior valem também para este caso.

Já o ciclo W do método ACM/GS obteve bons resultados e mostrou ser um *solver* de ordem  $O(n^1)$ . Utilizando como *solver* interno o ILU para o método ACM (ACM/ILU) e mantendo os mesmos parâmetros do problema anterior, obtém-se os resultados mostrados na Fig. 6.32, os quais estão bastante próximos para os três ciclos. Traçando a reta de regressão para ACM/ILU ciclo W, obtém-se  $y = 1,6E-03x^{1,1088}$  com coeficiente de determinação,  $R^2 = 1$ .

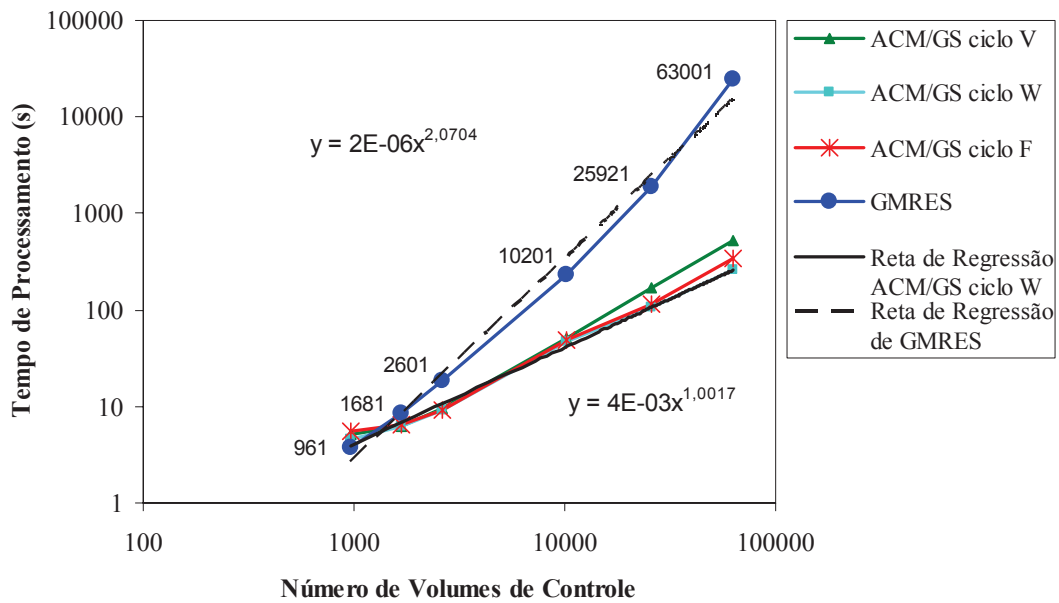


Figura 6.31 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para a cavidade com  $Re = 400$ .

Ainda na Fig. 6.33 é mostrada a comparação entre os métodos ACM/GS e ACM/ILU para o ciclo W. Neste exemplo os dois *solvers* apresentaram resultados bem próximos, sendo o ACM/GS um pouco melhor nas malhas mais finas.

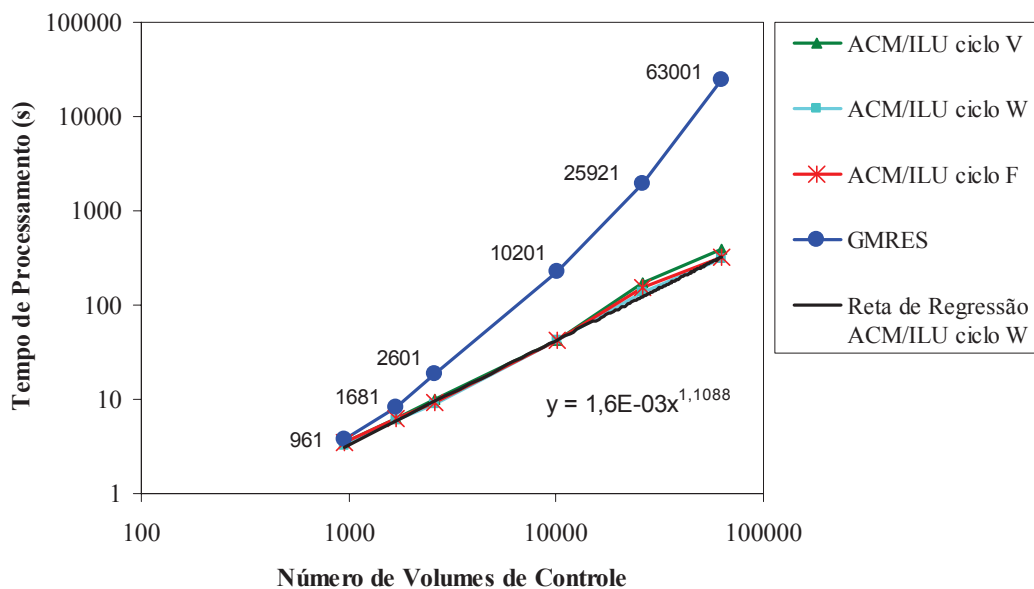


Figura 6.32 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com  $Re = 400$ .

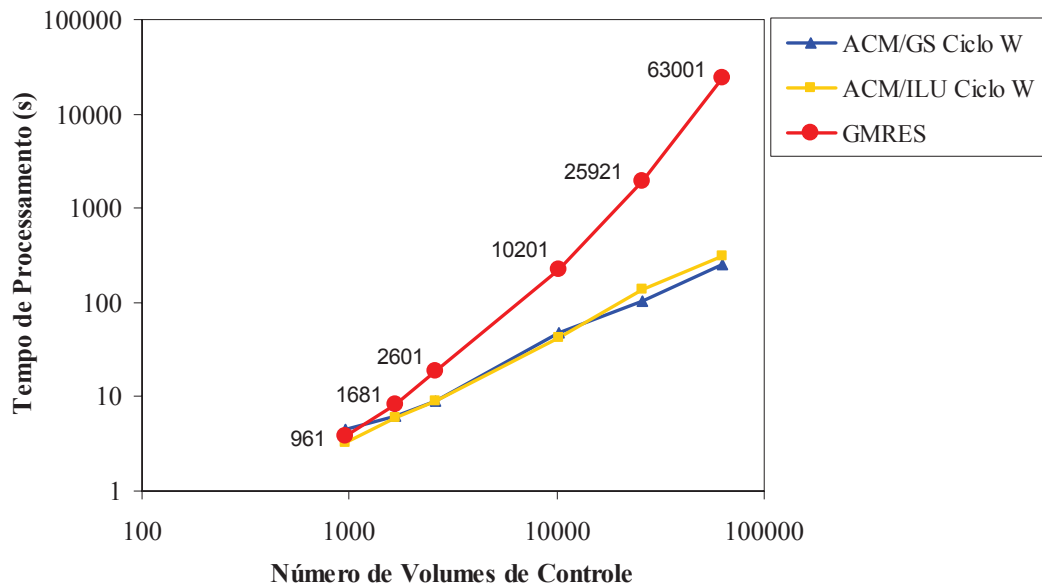


Figura 6.33 Comparação entre o *solver* GMRES e os métodos ACM/GS ciclo W e ACM/ILU ciclo W para cavidade com  $Re = 400$ .

Na Tab. 6.14 é mostrado o número de iterações de Gauss-Seidel e ILU utilizadas para se chegar aos resultados mostrados nas Figs. 6.31 e 6.32. O *solver* ILU necessita de menos iterações que o Gauss-Seidel e apresenta uma menor variação entre o número máximo e o mínimo de iterações “ótimas” (que produzem melhores resultados).

Tabela 6.14 Número de iterações de GS (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ .

| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomeración | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|------------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                    | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 961             | 4                                  | 10                              | 5       | 5       | 5                      | 5       | 5       |
| 1681            | 4                                  | 75                              | 75      | 75      | 15                     | 5       | 10      |
| 2601            | 4                                  | 50                              | 40      | 40      | 10                     | 10      | 10      |
| 10201           | 5                                  | 50                              | 25      | 25      | 10                     | 10      | 15      |
| 25921           | 6                                  | 50                              | 5       | 25      | 5                      | 5       | 15      |
| 63001           | 7                                  | 150                             | 5       | 25      | 15                     | 5       | 5       |

No próximo teste são comparados os esquemas de aglomeração listados na Tab. (6.7) a fim de decidir qual coeficiente ou conjunto de coeficientes será escolhido como base para efetuar-se a aglomeração.

Utilizando a malha de 63001 volumes e o conjunto de parâmetros definidos abaixo pode-se ter uma idéia do comportamento dos esquemas de aglomeração.

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

O número de níveis de malha utilizados pelo método ACM é definido de forma que o *solver* direto seja aplicado somente na malha mais grossa.

Os resultados encontrados para a malha de 63001 volumes são mostrados na Tab. 6.15. Dentre os esquemas abaixo, foram escolhidos alguns que apresentaram os melhores resultados para serem testados em outras malhas. Foram eles: 1, 5, 9, 10, 11, 12, 13 e 14. Os resultados obtidos são apresentados na Tab. 6.16.

Tabela 6.15 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 347,266                    |
| 2                      | 584,094                    |
| 3                      | 383,5                      |
| 4                      | 598,532                    |
| 5                      | 336,891                    |
| 6                      | 429,11                     |
| 7                      | 384,313                    |
| 8                      | 428,719                    |



| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 9                      | 322,032                    |
| 10                     | 342,156                    |
| 11                     | 340,859                    |
| 12                     | 340,796                    |
| 13                     | 344,344                    |
| 14                     | 339,187                    |
| 15                     | 460,688                    |

O esquema que apresentou melhores resultados foi o esquema 9 e, quanto aos outros esquemas, os resultados dependem de qual malha está sendo considerada. Por exemplo, o esquema 5 apresentou o segundo melhor resultado na malha de 63001 volumes, porém ficou aquém de outros esquemas nas outras malhas. Os esquemas 10, 11 e 12 também apresentaram bons resultados dependendo de qual malha se está analisando.

Nas malhas mais grossas (961, 1681 e 2601 volumes) pode-se notar que a diferença entre os tempos de computação não é significativa para os esquemas de aglomeração utilizados. Quanto à diferenciação de tempos nas outras malhas, um fator a ser considerado é que na geração de uma malha não-estruturada, a criação dos elementos se dá de uma forma totalmente aleatória o que pode interferir na obtenção dos blocos (volumes de controle) das malhas grossas quando um processo de aglomeração é utilizado. Isso relembrando que a primeira célula (volume) de cada novo bloco grosseiro é obtida a partir de um processo ordenado de varredura dos nós da malha, podendo a ordem em que esses nós estão dispostos na malha original interferir na forma final das malhas grossas obtidas.

Porém este fato de determinados esquemas de aglomeração apresentarem (ou não) os melhores resultados dependendo da malha considerada é verificado mais fortemente em alguns problemas dependendo do número de Reynolds proposto. Outra possibilidade para explicar este fato diz respeito à questão do ajuste do restante dos parâmetros do multigrid que podem ser mais benéficos para determinados esquemas de aglomeração em determinadas malhas. Visto que busca-se aqui uma configuração padrão que gere bons resultados para a maioria dos casos considerados, não são testados parâmetros diferenciados (variação de iterações do solver interno, número de células por bloco, etc.) para cada um dos esquemas de aglomeração propostos.

Tabela 6.16 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 961 volumes          | Malha 1681 vol. | Malha 2601 vol. | Malha 10201 vol. | Malha 25921 vol. | Malha 63001 vol. |
| 1                      | 3,359                      | 6               | 9,594           | 44,281           | 146,625          | 347,266          |
| 5                      | 3,281                      | 6,281           | 9,891           | 48,031           | 151,234          | 336,891          |
| <b>9</b>               | <b>3,25</b>                | <b>6</b>        | <b>9,391</b>    | <b>43,937</b>    | <b>134,219</b>   | <b>322,032</b>   |
| 10                     | 3,266                      | 6,031           | 9,391           | 44,016           | 134,782          | 342,156          |
| 11                     | 3,265                      | 6,016           | 9,375           | 43,953           | 138,797          | 340,859          |
| 12                     | 3,25                       | 6               | 9,391           | 43,985           | 134,625          | 340,796          |
| 13                     | 3,312                      | 6,094           | 9,5             | 44,687           | 136,312          | 344,344          |
| 14                     | 3,266                      | 6,032           | 9,469           | 44,156           | 137,282          | 339,187          |

Realizando a aglomeração a cada vez que as não-linearidades são atualizadas e o sistema linear é modificado, obtém-se os tempos de computação apresentados na Tab. 6.17 para a malha de 63001 volumes.

Tabela 6.17 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 463,796                    |
| 2                      | 748,641                    |
| 3                      | 495,079                    |
| 4                      | 769,094                    |
| 5                      | 453,922                    |
| 6                      | 556,672                    |
| 7                      | 490,391                    |
| 8                      | 550,14                     |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 9                      | 415,078                    |
| 10                     | 419,453                    |
| 11                     | 418,953                    |
| 12                     | 414,141                    |
| 13                     | 510,859                    |
| 14                     | 445,219                    |
| 15                     | 469,234                    |

Novamente foram escolhidos alguns esquemas que apresentaram os melhores resultados para serem testados em outras malhas e seus resultados são mostrados na Tab. 6.18.

Tabela 6.18 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 961 volumes          | Malha 1681 vol. | Malha 2601 vol. | Malha 10201 vol. | Malha 25921 vol. | Malha 63001 vol. |
| 1                      | 3,64                       | 6,797           | 10,703          | 52,562           | 168              | 463,796          |
| 5                      | 3,64                       | 7,078           | 10,719          | 56,297           | 185,875          | 453,922          |
| <b>9</b>               | <b>3,687</b>               | <b>6,906</b>    | <b>10,718</b>   | <b>50,578</b>    | <b>158,953</b>   | <b>415,078</b>   |
| 10                     | 3,75                       | 6,906           | 10,797          | 50,875           | 165,594          | 419,453          |
| 11                     | 3,718                      | 6,891           | 10,781          | 50,594           | 162,438          | 418,953          |
| <b>12</b>              | <b>3,656</b>               | <b>6,875</b>    | <b>10,75</b>    | <b>50,547</b>    | <b>158,953</b>   | <b>414,141</b>   |
| 14                     | 3,89                       | 7,187           | 11,406          | 53,562           | 173,625          | 445,219          |
| 15                     | 3,953                      | 7,36            | 11,484          | 54,547           | 175,359          | 469,234          |

Pode-se observar que os melhores tempos de computação foram obtidos pelos esquemas 9 e 12. Mas, novamente, a realização do procedimento de aglomeração toda vez que o sistema linear é modificado aumentou o tempo de computação com relação aos testes onde este procedimento só foi realizado no início do processo, conforme pode ser visto com a comparação dos resultados obtidos na Tabs. 6.16 e 6.18.

Novamente, pode-se formular uma configuração geral de parâmetros ideais para resolver esse problema, os quais são listados abaixo:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow$  4
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  9

Tomando-se a malha com 961 volumes e aplicando o esquema de aglomeração 9 obtêm-se os mesmos níveis de malhas grossas apresentados na Fig. 6.27, sendo que o aumento do número de Reynolds não influenciou na aglomeração.

Agora parte-se para os testes da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , que são vistos no próximo item.

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 1000**

Considerando os parâmetros iniciais da Tab. 6.4 (ou Tab. 6.12) já definidos, como parâmetros do multigrid ACM, obtêm-se os tempos de processamento mostrados na Tab. 6.19 para o “número de células por bloco” usado para efetuar as aglomerações na malha de 63001 volumes.

Tabela 6.19 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com  $Re = 1000$ .

| Número de células por bloco | Número de níveis de malha | Tempo de CPU (s) |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|
| 3                           | 8                         | 421,593          |
| <b>4</b>                    | <b>7</b>                  | <b>404,875</b>   |
| 5                           | 6                         | 489,016          |
| 6                           | 6                         | 500.156          |
| 7                           | 6                         | 553.953          |
| 8                           | 5                         | 580.563          |

Mais uma vez a aglomeração utilizando quatro células por bloco mostrou ser a melhor alternativa. Realiza-se, então, a comparação entre os ciclos V, W e F, utilizando os mesmos parâmetros da Tab. 6.4 (ou Tab. 6.12) e número de iterações do *solver* interno variável. O uso do *solver* Gauss-Seidel como *solver* interno do método ACM (ACM/GS) mostrou-se inadequado para esse problema, pois apresentou dificuldades muito grandes de convergência. Esta só foi obtida diminuindo o passo de tempo do método EbFVM de 10 para 0,1, o que acarretou um aumento significativo do tempo de computação. Logo, são apresentados na Fig. 6.34 somente os resultados utilizando como *solver* interno do método multigrid o *solver* ILU, ou seja, o ACM/ILU. Traçando a reta de regressão para ACM/ILU ciclo W, obtém-se  $y = 3,2E-03x^{1,0633}$  com coeficiente de determinação,  $R^2 = 1$  e para GMRES  $y = 9E-06x^{1,9035}$  e  $R^2 = 0,98$ , seguindo um padrão de retas de regressão com inclinação similar para os três diferentes números de Reynolds testados.

Na Tab. 6.20 é mostrado o número de iterações de ILU (no método ACM/ILU) utilizadas para se chegar aos resultados da Fig. 6.34.

Pode-se ver que para a obtenção da maioria dos resultados são necessárias somente cinco iterações de ILU (no método ACM/ILU) mesmo para este problema com número de Reynolds alto, comprovando mais uma vez que a configuração que vem sendo testada até agora é muito boa.

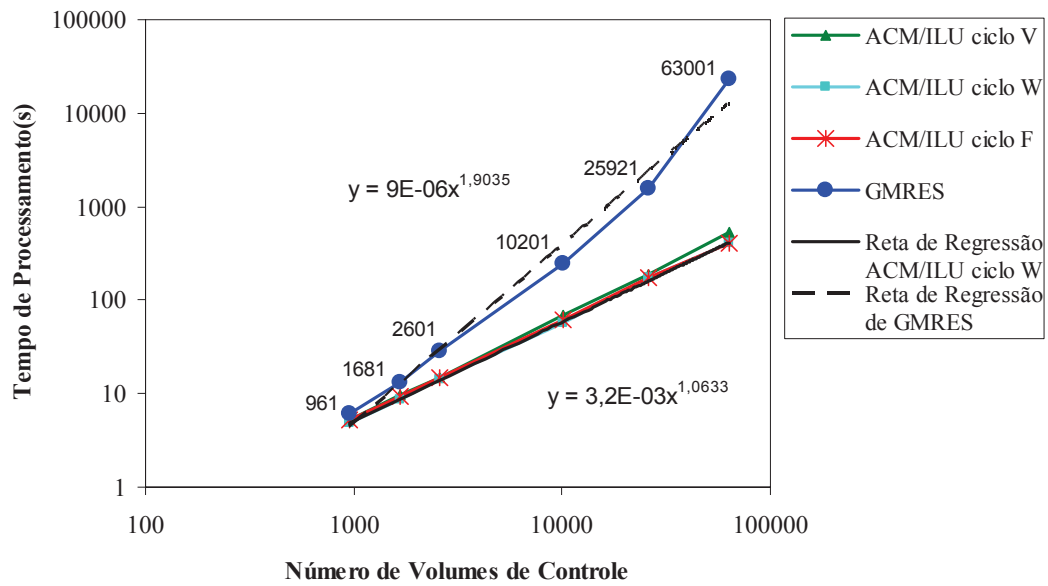


Figura 6.34 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com  $Re = 1000$ .

Tabela 6.20 Número de iterações de ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

| Malha (vol.) | Nº de níveis de Aglomeração | Nº de iterações de ILU |         |         |
|--------------|-----------------------------|------------------------|---------|---------|
|              |                             | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 961          | 4                           | 5                      | 5       | 5       |
| 1681         | 4                           | 5                      | 5       | 5       |
| 2601         | 4                           | 5                      | 5       | 5       |
| 10201        | 5                           | 5                      | 10      | 5       |
| 25921        | 6                           | 15                     | 10      | 5       |
| 63001        | 7                           | 10                     | 5       | 5       |

Tomando a malha de 63001 volumes juntamente com os parâmetros abaixo compare-se os esquemas de aglomeração listados na Tab. 6.7.

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50

- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow 10^{-5}$

Como já mencionado, o número de malhas utilizadas pelo método multigrid é definido de forma que o *solver* direto seja aplicado somente na malha mais grossa.

Os resultados obtidos para a malha de 63001 volumes são mostrados na Tab. 6.21. Os esquemas 1, 5, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 foram escolhidos para serem testados em outras malhas e seus resultados são mostrados na Tab. 6.22.

Tabela 6.21 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 428,953                    |
| 2                      | 737,406                    |
| 3                      | 491,89                     |
| 4                      | 722,484                    |
| 5                      | 449,75                     |
| 6                      | 536,563                    |
| 7                      | 496,344                    |
| 8                      | 533,782                    |
| 9                      | 404,703                    |
| 10                     | 409,875                    |
| 11                     | 409,938                    |
| 12                     | 406,688                    |
| 13                     | 410,032                    |
| 14                     | 410,75                     |
| 15                     | 604,25                     |

Novamente o esquema 9 apresentou os melhores resultados. Os esquemas 1 e 5 apresentaram os piores resultados ficando aquém dos outros esquemas (10, 11, 12, 13 e 14),

os quais tiveram resultados similares, com o seu desempenho dependendo bastante da malha considerada.

Tabela 6.22 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 961 volumes          | Malha 1681 vol. | Malha 2601 vol. | Malha 10201 vol. | Malha 25921 vol. | Malha 63001 vol. |
| 1                      | 4,984                      | 9,937           | 14,313          | 63,172           | 188,172          | 428,953          |
| 5                      | 5,14                       | 10,235          | 15,859          | 66,172           | 193,984          | 449,75           |
| <b>9</b>               | <b>4,813</b>               | <b>8,859</b>    | <b>14,235</b>   | <b>59,219</b>    | <b>177,813</b>   | <b>404,703</b>   |
| 10                     | 4,781                      | 8,859           | 14,375          | 59,265           | 181,704          | 409,875          |
| 11                     | 4,829                      | 8,844           | 14,203          | 59,188           | 179,109          | 409,938          |
| 12                     | 4,796                      | 8,812           | 14,235          | 59,125           | 178,468          | 406,688          |
| 13                     | 4,844                      | 8,89            | 14,375          | 59,734           | 180,765          | 410,032          |
| 14                     | 4,828                      | 8,813           | 14,407          | 59,203           | 177,953          | 410,75           |

Na Tab. 6.23 são apresentados os resultados para o caso onde a aglomeração é efetuada sempre que o sistema linear é modificado. A malha escolhida para a realização do testes é a malha de 63001 volumes.

Tabela 6.23 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 63001 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 578,219                    |
| 2                      | 937,625                    |
| 3                      | 643,094                    |
| 4                      | 918,859                    |
| 5                      | 630                        |



| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 6                      | 690,797                    |
| 7                      | 636,281                    |
| 8                      | 810,906                    |
| 9                      | 526,188                    |
| 10                     | 546,344                    |
| 11                     | 554,219                    |
| 12                     | 554,469                    |
| 13                     | 670,656                    |
| 14                     | 807,953                    |
| 15                     | 822,14                     |

Os esquemas que apresentaram melhores resultados são testados nas outras malhas e seus resultados são mostrados na Tab. 6.24.

Tabela 6.24 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 961 volumes          | Malha 1681 vol. | Malha 2601 vol. | Malha 10201 vol. | Malha 25921 vol. | Malha 63001 vol. |
| 1                      | 8,469                      | 19,296          | 28,562          | 104,625          | 314,875          | 578,219          |
| <b>9</b>               | <b>7,906</b>               | <b>14,469</b>   | <b>22,75</b>    | <b>98,015</b>    | <b>289,25</b>    | <b>526,188</b>   |
| 10                     | 7,984                      | 14,797          | 22,766          | 99,735           | 297,875          | 546,344          |
| 11                     | 7,953                      | 14,922          | 23,266          | 98,719           | 291,828          | 554,219          |
| 12                     | 8,172                      | 14,859          | 23,859          | 100,172          | 294,719          | 554,469          |

O esquema 9 continuou apresentando os melhores resultados, seguido pelos esquemas 10 e 11, mas o tempo de computação resultante destes esquemas continua sendo maior do que se aglomeração fosse feita somente no início do processo.

Na Fig. 6.35 são mostradas as malhas finais resultantes da aplicação do processo de aglomeração a cada vez que o sistema linear é modificado. O esquema utilizado é o 9 que mostrou os melhores resultados em termos de tempo de computação.

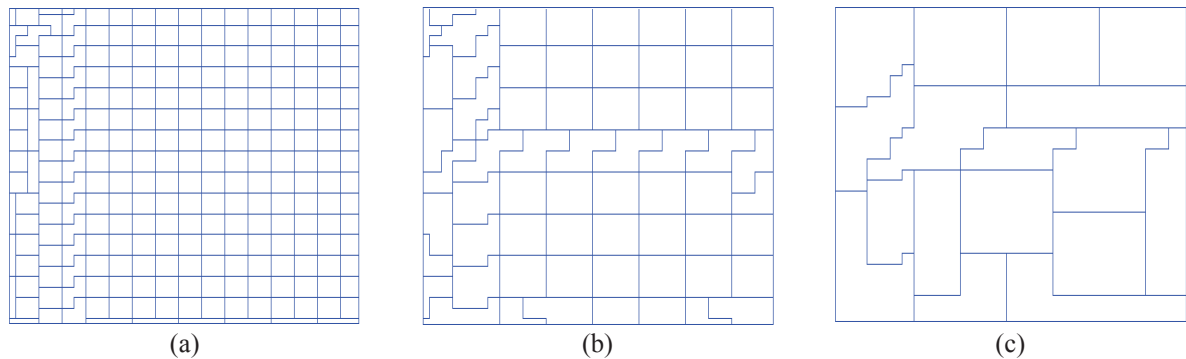


Figura 6.35 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa com o esquema 9 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 241 volumes, (b) 64 volumes e (c) 17 volumes.

Formulando-se uma configuração ideal de parâmetros para resolver esse problema tem-se:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow$  4
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  9

Considerando a malha com 961 volumes e aplicando o esquema 9 (realizando a aglomeração somente no início do processo) obtêm-se as malhas já apresentadas na Fig. 6.27 mostrando novamente que o número de Reynolds não influenciou neste caso na aglomeração.

- **Considerações sobre o tempo de computação**

Uma análise do tempo de CPU gasto pelas principais funções do método Multigrid de Correções Aditivas é, agora, realizado. Assim, considerando a configuração ideal de parâmetros, definida acima para a malha mais fina (original) com 63001 volumes, obtêm-se os tempos de CPU (dos procedimentos mais significativos do método ACM) para o processo de resolução do primeiro sistema linear, obtido por meio da aproximação do problema da cavidade com tampa móvel, com número de Reynolds igual a 1000, pelo método de Volumes Finitos baseado em Elementos.

Tomando como exemplo o problema mencionado acima, o tempo total do processo de solução do primeiro sistema linear é de 8,906s. Considerando os procedimentos principais do método ACM<sup>10</sup>, têm-se os seguintes tempos de CPU em segundos e os respectivos percentuais em termos do tempo total:

- Tempo para gerar os vetores auxiliares no nível de malha fina = 0,672s (7,55% do tempo total).
- Tempo para realizar a aglomeração = 0,047s (0,53% do tempo total).
- Tempo para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados = 3,234s (36,31% do tempo total).
- Tempo utilizado para realizar os ciclos W necessários = 4,953s (55,61% do tempo total).

Ainda, para resolver o sistema linear (acima mencionado) foi necessária a realização de três ciclos W. Os tempos de cada ciclo e o percentual em termos do tempo total são os seguintes:

- 1º ciclo = 3,703s (41,58% do tempo total).
- 2º ciclo = 0,625s (7,02% do tempo total).
- 3º ciclo = 0,625s (7,02% do tempo total).

Pode-se ver que a realização do primeiro ciclo foi mais custosa em termos de tempo computacional, isso acontece porque somente a primeira vez que o ciclo W (ou outro ciclo: V ou F) é realizado, a matriz é fatorada (é feito o processo de obtenção das matrizes *lower* e *upper*) visto que o *solver* iterativo ILU está sendo utilizado. Depois, somente o processo iterativo é efetuado, assim o segundo e terceiro ciclos necessitam de menos tempo de

---

<sup>10</sup> Maiores detalhes sobre os procedimentos do método ACM são encontrados no Apêndice 2.

processamento. No caso da utilização de Gauss-Seidel como *solver* iterativo, essa variação de tempo entre os ciclos não ocorre.

Dentro de cada ciclo são realizados basicamente três procedimentos principais: atualização do termo independente, solução dos sistemas lineares em todos os níveis de malha e cálculo do resíduo. Vale lembrar que no nível mais grosseiro utiliza-se o *solver* direto e nos outros níveis um *solver* iterativo. Tomando novamente os tempos em segundos e calculando o percentual em termos do tempo total obtém-se:

- Para o 1º ciclo:

- Tempo para gerar o termo independente = 0,062s (0,7% do tempo total).
- Tempo para a execução dos *solvers* internos = 3,626s (40,71% do tempo total).
- Tempo para calcular o resíduo = 0,015s (0,17% do tempo total).

- Para o 2º ciclo:

- Tempo para gerar o termo independente = 0,062s (0,7% do tempo total).
- Tempo para a execução dos *solvers* internos = 0,548s (6,15% do tempo total).
- Tempo para calcular o resíduo = 0,015s (0,17% do tempo total).

- Para o 3º ciclo:

- Tempo para gerar o termo independente = 0,062s (0,7% do tempo total).
- Tempo para a execução dos *solvers* internos = 0,548s (6,15% do tempo total).
- Tempo para calcular o resíduo = 0,015s (0,17% do tempo total).

Se a aglomeração for realizada a cada vez que o sistema linear é atualizado, obtêm-se tempos similares, para as funções principais, toda vez que o método ACM é chamado.

Nesta segunda vez que o método ACM foi chamado, realizando-se novamente a aglomeração, o tempo total do processo foi um pouco maior, 9,75s. Os tempos dos procedimentos principais são mostrados abaixo:

- Tempo para gerar os vetores auxiliares no nível de malha fina = 0,938s (9,62% do tempo total).
- Tempo para realizar a aglomeração = 0,063s (0,65% do tempo total).
- Tempo para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados = 3,359s (34,45% do tempo total).
- Tempo utilizado para realizar os ciclos W necessários = 5,39s (55,28% do tempo total).

Aqui foi necessária a realização de quatro ciclos  $W$  para a solução de um sistema linear. Os tempos de cada ciclo e o percentual em termos do tempo total são os seguintes:

- 1º ciclo = 3,562s (36,53% do tempo total).
- 2º ciclo = 0,61s (6,25% do tempo total).
- 3º ciclo = 0,609s (6,25% do tempo total).
- 4º ciclo = 0,609s (6,25% do tempo total).

Os tempos para gerar o termo independente e calcular o resíduo em todos os ciclos foram exatamente os mesmos que os encontrados na chamada anterior do método ACM (para a solução do primeiro sistema linear).

Se a aglomeração não for realizada, “ganha-se” o tempo gasto com o processo de aglomeração e, principalmente, o tempo gasto para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados, logo o tempo total do processo é menor. Neste caso, o tempo total foi de 7,015s.

Abaixo são exemplificados os tempos de computação obtidos se a aglomeração não for mais realizada a partir do segundo nível iterativo (segunda chamada do método ACM):

- Tempo para gerar os vetores auxiliares no nível de malha fina = 0,937s (13,36% do tempo total).
- Tempo para realizar a aglomeração = 0s (0% do tempo total).
- Tempo para re-determinar os sistemas lineares dos níveis grosseiros = 0,672s (9,58% do tempo total).
- Tempo utilizado para realizar os ciclos  $W$  necessários = 5,406s (77,06% do tempo total).

Os tempos de cada ciclo e o percentual em termos do tempo total são os seguintes:

- 1º ciclo = 3,578s (51,00% do tempo total).
- 2º ciclo = 0,609s (8,68% do tempo total).
- 3º ciclo = 0,609s (8,68% do tempo total).
- 4º ciclo = 0,61s (8,70% do tempo total).

Pode-se concluir que o aumento do tempo de CPU que ocorre quando a aglomeração é novamente realizada na segunda vez que o método ACM é chamado se deve principalmente ao tempo gasto para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados e não ao tempo gasto no processo de procura para determinar quais células serão aglomeradas.

Estes foram os testes apresentados para a cavidade com malhas cartesianas igualmente espaçadas. No próximo item são mostrados testes para a cavidade com tampa móvel em malhas não-cartesianas, também para número de Reynolds igual a 100, 400 e 1000.

### 6.2.2 Malhas não-cartesianas

Os resultados mostrados a seguir são obtidos por meio do uso das malhas não-cartesianas mostradas na Fig. 6.36.

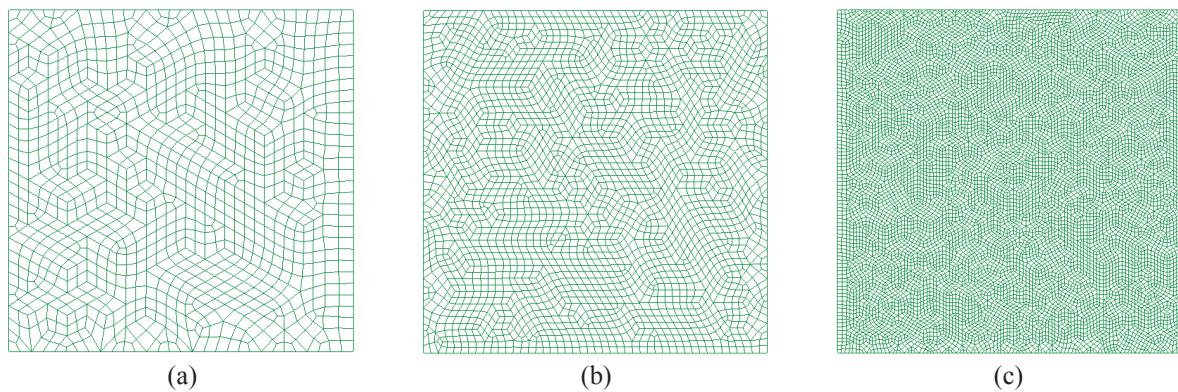


Figura 6.36 Malhas não-cartesianas para o problema da cavidade com tampa móvel com (a) 1028 elementos, (b) 2534 elementos e (c) 9982 elementos.

São utilizadas ainda malhas com 25338 e 62422 elementos não mostradas na figura acima, pois devido ao seu alto grau de refino torna-se difícil visualizar os elementos.

Primeiramente são apresentados os resultados obtidos para o número de Reynolds igual a 100.

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 100**

Considerando a malha mais refinada utilizada nos testes, a de 62422 elementos (que dão origem a 62883 volumes de controle) pode-se efetuar os testes para descobrir qual o “número de células por bloco” é mais adequado para este caso. Para realizar os testes utiliza-se os parâmetros definidos anteriormente na Tab. 6.4 (e também na Tab. 6.12) e os resultados são apresentados na Tab. 6.25.

Novamente a aglomeração com quatro blocos de células mostrou ser a melhor alternativa.

Tabela 6.25 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com  $Re=100$  (malhas não-cartesianas).

| Número de células por bloco | Número de níveis de malha | Tempo de CPU (s) |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|
| 3                           | 8                         | 251,25           |
| 4                           | 7                         | 249,265          |
| 5                           | 6                         | 278,015          |
| 6                           | 6                         | 296,875          |
| 7                           | 6                         | 307,469          |
| 8                           | 5                         | 327,61           |

Partindo para a próxima comparação entre os ciclos V, W e F, são mantidos alguns parâmetros definidos anteriormente

- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  Coeficiente da variável pressão da eq. de conservação da massa

Utilizando o *solver* Gauss-Seidel como *solver* interno do método ACM (ACM/GS), obtém-se os resultados mostrados na Fig. 6.37. Traçando a reta de tendência para ACM/GS ciclo W, que é o ciclo que obteve os melhores resultados, tem-se  $y = 7E-04x^{1,1424}$  e  $R^2 = 1$ . Já para GMRES,  $y = 6E-07x^{2,1618}$  e  $R^2 = 0,99$ .

O ciclo W segue obtendo os melhores resultados, seguido do ciclo F e do ciclo V. Pode-se observar que o método ACM/GS teve um pouco mais de dificuldades na resolução do problema em malhas não cartesianas, pois sua reta de tendência ficou da ordem de  $n^{1,1424}$ , sendo o expoente um pouco maior do que o obtido no uso de malhas cartesianas.

Partindo-se para o uso do *solver* interno ILU, a reta de tendência encontrada para o ACM/ILU ciclo W é  $y = 7E-04x^{1,1589}$  com  $R^2 = 1$ . Seus resultados são mostrados na Fig. 6.38.

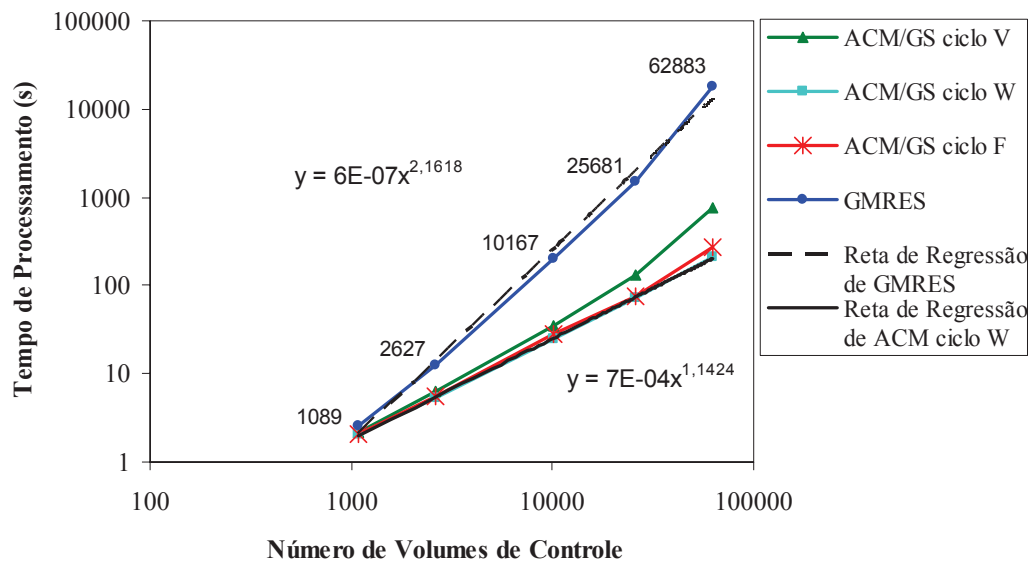


Figura 6.37 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para cavidade com  $Re = 100$  (malhas não-cartesianas).

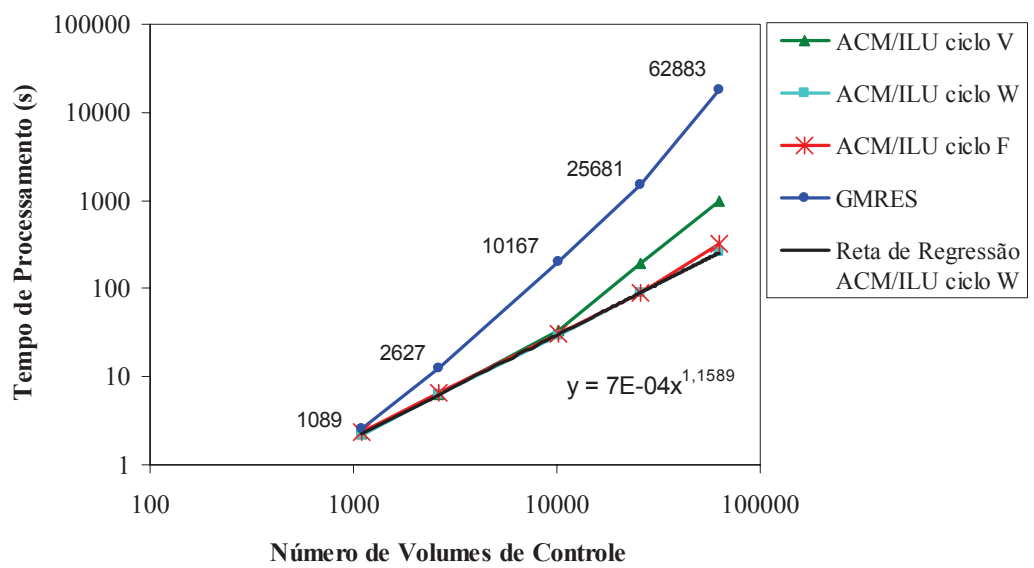


Figura 6.38 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com  $Re = 100$  (malhas não-cartesianas).

Na Fig. 6.39 é mostrada a comparação entre os métodos ACM/GS e ACM/ILU, para o ciclo W, pois este obteve os melhores resultados. Novamente para este caso onde o número de Reynolds considerado é baixo, o método ACM/GS mostrou ser a melhor opção.



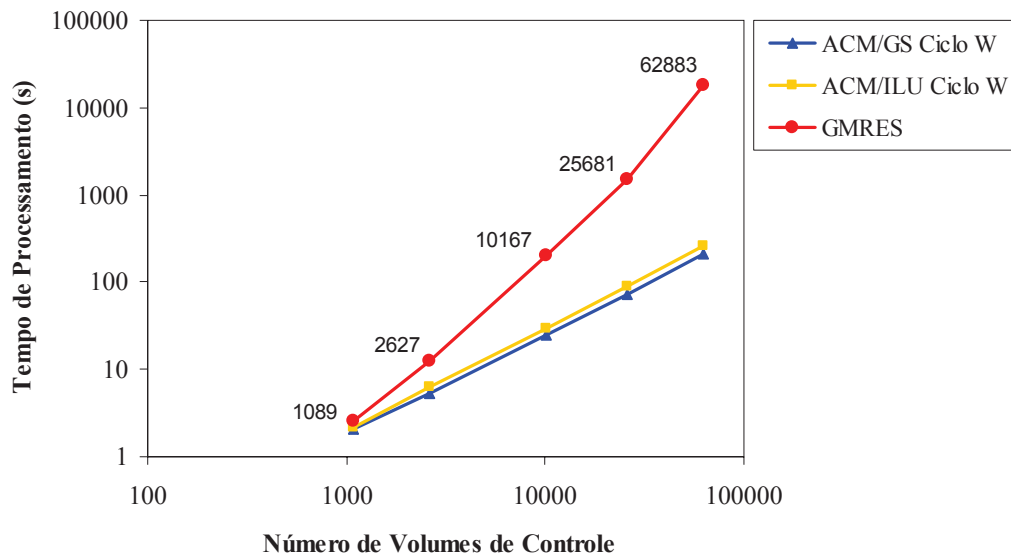


Figura 6.39 Comparação entre o *solver* GMRES e os métodos ACM/GS ciclo W e ACM/ILU ciclo W para cavidade com  $Re = 100$  (malhas não-cartesianas).

Na Tab. 6.26 são mostradas as quantidades de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) utilizadas para se chegar aos resultados mostrados nas Figs. 6.37 e 6.38.

Tabela 6.26 Número de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$  (malhas não-cartesianas).

| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomerção | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|----------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                  | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 1089            | 4                                | 15                              | 5       | 5       | 5                      | 5       | 5       |
| 2627            | 4                                | 15                              | 5       | 5       | 5                      | 5       | 5       |
| 10167           | 5                                | 30                              | 5       | 10      | 20                     | 5       | 5       |
| 25681           | 6                                | 150                             | 5       | 10      | 50                     | 5       | 5       |
| 62883           | 7                                | 300                             | 10      | 20      | 50                     | 5       | 5       |

Na próxima etapa de testes é feita a aplicação dos diversos esquemas de aglomeração na malha mais fina com 62422 elementos (62883 volumes de controle). Os parâmetros utilizados para obter os resultados são definidos abaixo:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W

- *Solver* interno  $\Rightarrow$  Gauss-Seidel
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

Os resultados obtidos são mostrados na Tab. 6.27. Alguns esquemas (os que apresentaram melhores resultados) foram escolhidos para serem testados nas outras malhas e seus resultados são mostrados na Tab. 6.28.

Tabela 6.27 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 191,375                    |
| 2                      | 224,688                    |
| 3                      | 227,672                    |
| 4                      | 225,016                    |
| 5                      | 224,141                    |
| 6                      | 293,719                    |
| 7                      | 241,86                     |
| 8                      | 294,047                    |
| 9                      | 214,266                    |
| 10                     | 215,703                    |
| 11                     | 216                        |
| 12                     | 215,812                    |
| 13                     | 219,672                    |
| 14                     | 214,5                      |
| 15                     | 189,937                    |

Nas malhas mais finas, os esquemas 15 e 1 mostraram os melhores resultados, diferentemente do que vinha ocorrendo, pois nos casos anteriores o esquema 9 sempre se mostrou melhor. Nas malhas mais grossas fica difícil avaliar o comportamento dos esquemas, pois os resultados possuem valores muito próximos.

Tabela 6.28 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$  (malhas não-cartesianas).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                       |                        |                        |                        |
|------------------------|----------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                        | Malha 1089<br>volumes      | Malha 2627<br>volumes | Malha 10167<br>volumes | Malha 25681<br>volumes | Malha 62883<br>volumes |
| <b>1</b>               | <b>1,86</b>                | <b>5,313</b>          | <b>24,39</b>           | <b>66,453</b>          | <b>191,375</b>         |
| 9                      | 1,718                      | 4,954                 | 23,093                 | 69,281                 | 214,266                |
| 10                     | 1,734                      | 5,235                 | 24,25                  | 68,766                 | 215,703                |
| 11                     | 1,828                      | 5,235                 | 24,297                 | 66,156                 | 216                    |
| 12                     | 1,719                      | 5,234                 | 24,219                 | 69,047                 | 215,812                |
| 13                     | 1,875                      | 5,359                 | 23,547                 | 67,265                 | 219,672                |
| 14                     | 1,859                      | 4,969                 | 24,421                 | 69,828                 | 214,5                  |
| <b>15</b>              | <b>1,828</b>               | <b>5,485</b>          | <b>24,437</b>          | <b>63,844</b>          | <b>189,937</b>         |

Realizando a aglomeração toda vez que as não-linearidades são atualizadas e o sistema linear é modificado (não somente no início do processo), obtém-se os tempos de computação apresentados na Tab. 6.29.

Os esquemas 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 14 e 15 foram escolhidos para serem testados em outras malhas por apresentarem os melhores resultados, os quais são mostrados na Tab. 6.30.

Tabela 6.29 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 247,532                    |
| 2                      | 284,797                    |
| 3                      | 287,297                    |
| 4                      | 286,453                    |
| 5                      | 296,094                    |
| 6                      | 384,109                    |
| 7                      | 328,984                    |
| 8                      | 380,063                    |
| 9                      | 284,079                    |
| 10                     | 285,438                    |
| 11                     | 273,485                    |
| 12                     | 279,609                    |
| 13                     | 354,703                    |
| 14                     | 297                        |
| 15                     | 280,969                    |

De forma geral o esquema 1 apresentou os melhores resultados, sendo que os esquemas 11, 12, 15, 9, e 10 também obtiveram bons tempos de computação, dependendo da malha que está sendo considerada.

Comparando as Tabs. 6.28 e 6.30 pode-se ver que a realização do procedimento de aglomeração toda a vez que o sistema linear é modificado aumenta o tempo de computação, por isso novamente não é um procedimento interessante de ser aplicado.

Tabela 6.30 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas não-cartesianas).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                       |                        |                        |                        |
|------------------------|----------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                        | Malha 1089<br>volumes      | Malha 2627<br>volumes | Malha 10167<br>volumes | Malha 25681<br>volumes | Malha 62883<br>volumes |
| <b>1</b>               | <b>2,062</b>               | <b>6,312</b>          | <b>28,906</b>          | <b>82,454</b>          | <b>247,532</b>         |
| 2                      | 2,235                      | 6,359                 | 29,11                  | 91,172                 | 284,797                |
| 3                      | 2,234                      | 6,344                 | 31,359                 | 92,297                 | 287,297                |
| 4                      | 2,219                      | 6,375                 | 29,407                 | 91,344                 | 286,453                |
| 5                      | 2,094                      | 6,265                 | 30,922                 | 87,125                 | 296,094                |
| 9                      | 2,063                      | 6,203                 | 27,359                 | 82,046                 | 284,079                |
| 10                     | 2,063                      | 6,281                 | 29                     | 82,484                 | 285,438                |
| 11                     | 2,188                      | 6,188                 | 28,829                 | 85,563                 | 273,485                |
| 12                     | 2,062                      | 5,891                 | 27,422                 | 82,454                 | 279,609                |
| 14                     | 2,234                      | 6,343                 | 29,437                 | 89,156                 | 297                    |
| 15                     | 2,359                      | 6,703                 | 31,656                 | 93,531                 | 280,969                |

Assim, pode-se obter o conjunto de parâmetros ideais para resolver este problema:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  Gauss-Seidel
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow$  4
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  15, 1

Na Fig. 6.40 é mostrada a malha original e na Fig. 6.41 são mostrados os três níveis de aglomeração da malha de 1089 volumes utilizando o esquema de aglomeração 15, o qual

obteve os melhores resultados. Pode-se perceber que os volumes de controle das malhas grossas (que foram construídas a partir do processo de aglomeração) apresentam formas bastante irregulares e a aglomeração pode ocorrer pela conexão entre os vértices dos volumes de controle, pois os volumes vizinhos não estão somente conectados pelas faces como também pelos vértices. Na Fig. 6.41(c) podemos ver algumas dessas aglomerações que aparecem preenchidas com a mesma cor.

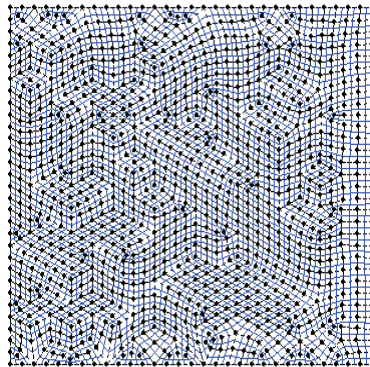


Figura 6.40 Malha original com 1089 volumes de controle.

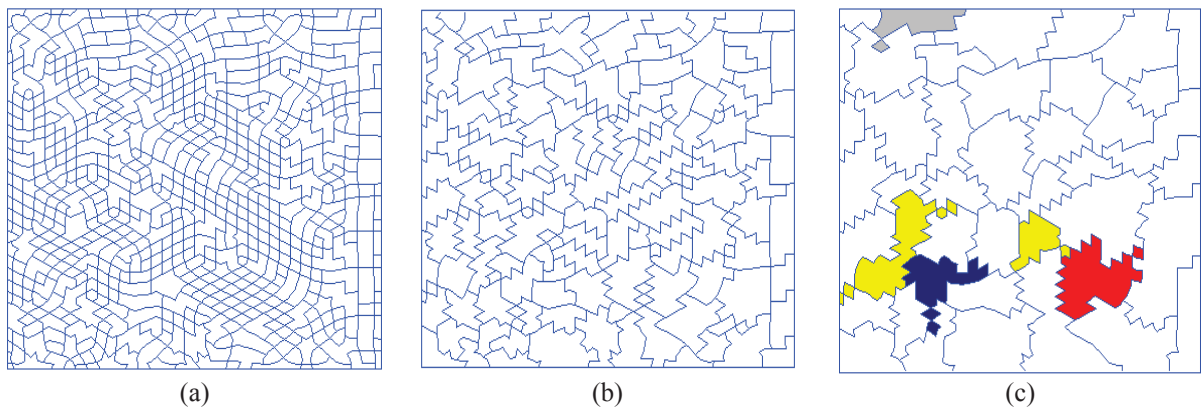


Figura 6.41 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 15 com (a) 336 volumes, (b) 124 volumes e (c) 43 volumes.

Na Fig. 6.42 são mostradas as malhas resultantes da aplicação do esquema 1 à malha de 1089 volumes. Aqui também ocorre a aglomeração pelo “vizinho” de vértice, enfatizada no item (c).

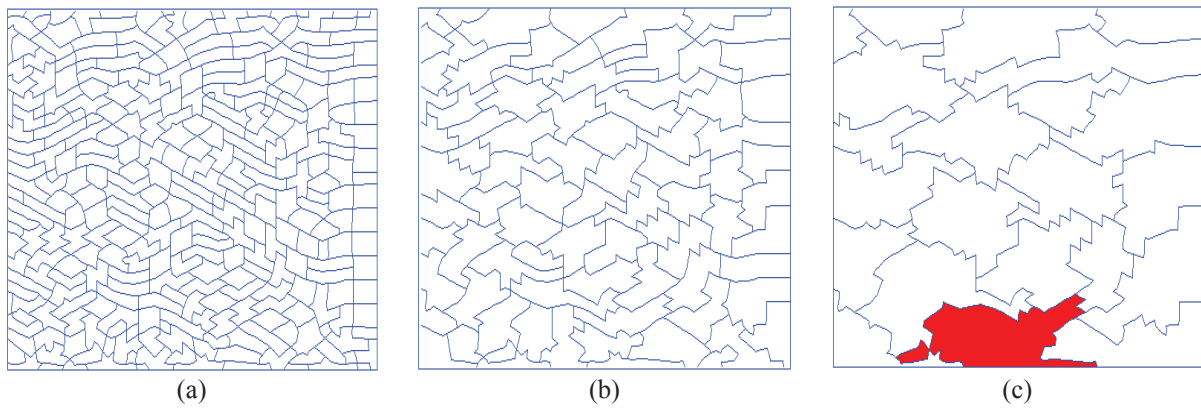


Figura 6.42 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 com  
(a) 285 volumes, (b) 79 volumes e (c) 22 volumes.

Obtida essa configuração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , parte-se para a execução de novos testes agora aumentando o número de Reynolds.

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 400**

Seguindo o procedimento, o próximo teste a ser efetuado é quanto ao número de células (volumes de controle) que serão aglomeradas para dar origem a um bloco de volumes da malha grossa. Porém como já foi visto no exemplo anterior da malha cartesiana, o aumento do número de Reynolds não influenciou o número de células a serem aglomeradas. O mesmo ocorreu neste caso, o número de células aglomeradas por bloco igual a quatro obteve os melhores resultados e, assim, não há necessidade de apresentar os valores aqui novamente.

Parte-se, então, para as comparações envolvendo os ciclos V, W e F. Os parâmetros utilizados são mostrados abaixo sendo o número de iterações do *solver* interno variável.

- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow 60$
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow 50$
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow 4$
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow 10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  Coeficiente da variável pressão da eq. de conservação da massa

Como *solver* interno do método ACM são testados Gauss-Seidel e ILU.

Utilizando Gauss-Seidel como *solver* interno do método ACM (ACM/GS) pode-se ver o seu desempenho na Fig. 6.43. O ciclo W obteve os melhores resultados, seguido pelo ciclo F e pelo ciclo V. Determinando a reta de regressão para ACM/GS ciclo W, tem-se  $y = 1,2E-03x^{1,1425}$  com  $R^2 = 1$  e para GMRES,  $y = 7E-07x^{2,2123}$  com  $R^2 = 0,99$ .

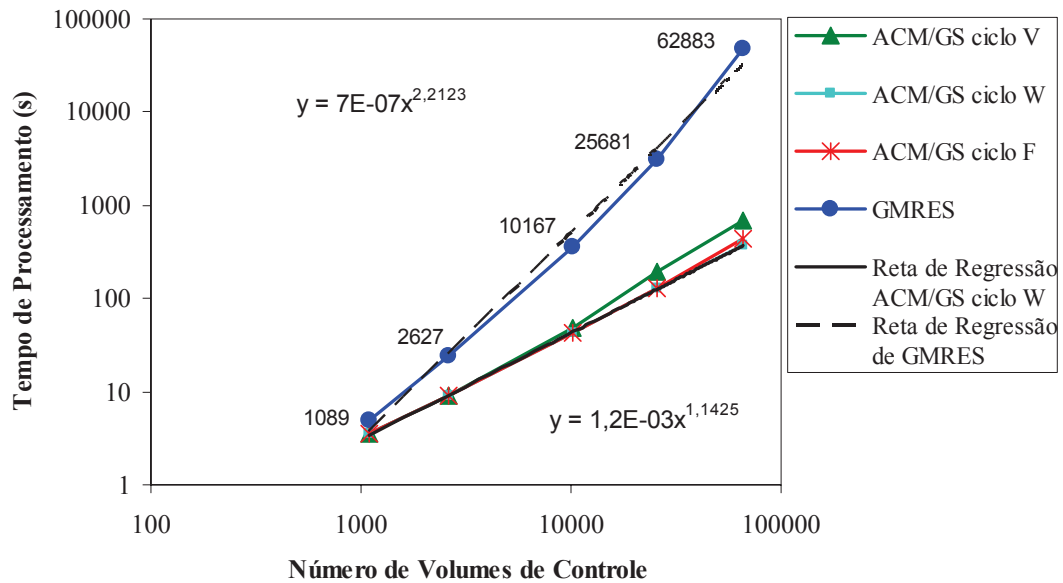


Figura 6.43 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/GS para cavidade com  $Re = 400$  (malhas não-cartesianas).

Considerando, agora, como *solver* interno do método ACM o *solver* ILU (ACM/ILU) obtém-se os resultados mostrados na Fig. 6.44. Pode-se observar que os três ciclos multigrid obtiveram resultados muito próximos. A reta de regressão para o ciclo W (que obteve resultados um pouco melhores que os outros ciclos) do ACM/ILU é  $y = 1,2E-03x^{1,1493}$  com  $R^2 = 1$ .

Vale a pena ressaltar que as retas de regressão do ACM/GS ciclo W e do ACM/ILU ciclo W possuem inclinação muito próximas como pode ser visto na Fig. 6.45, sendo que ACM/GS obteve resultados um pouco melhores.



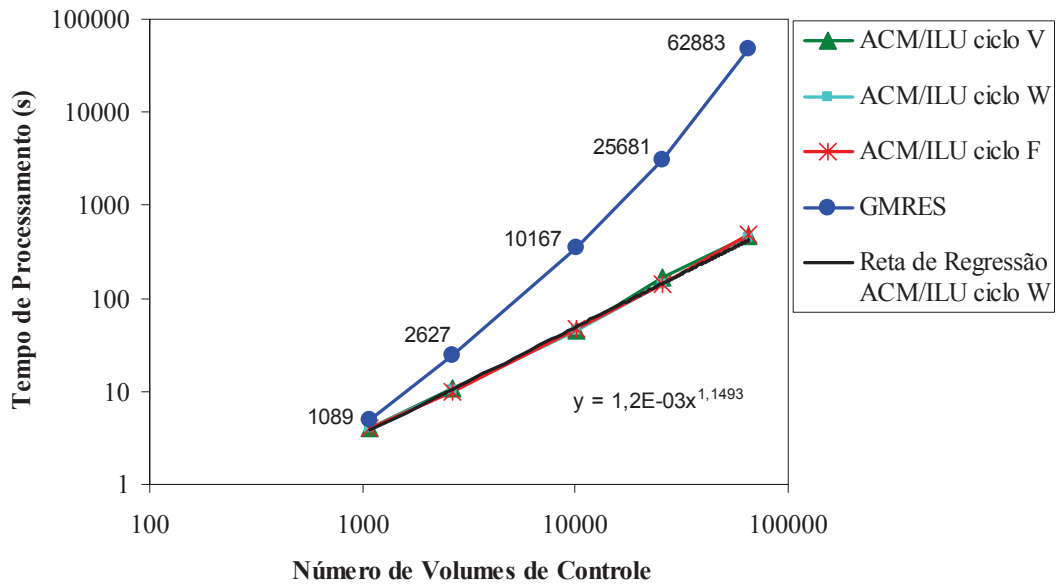


Figura 6.44 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com  $Re = 400$  (malhas não-cartesianas).

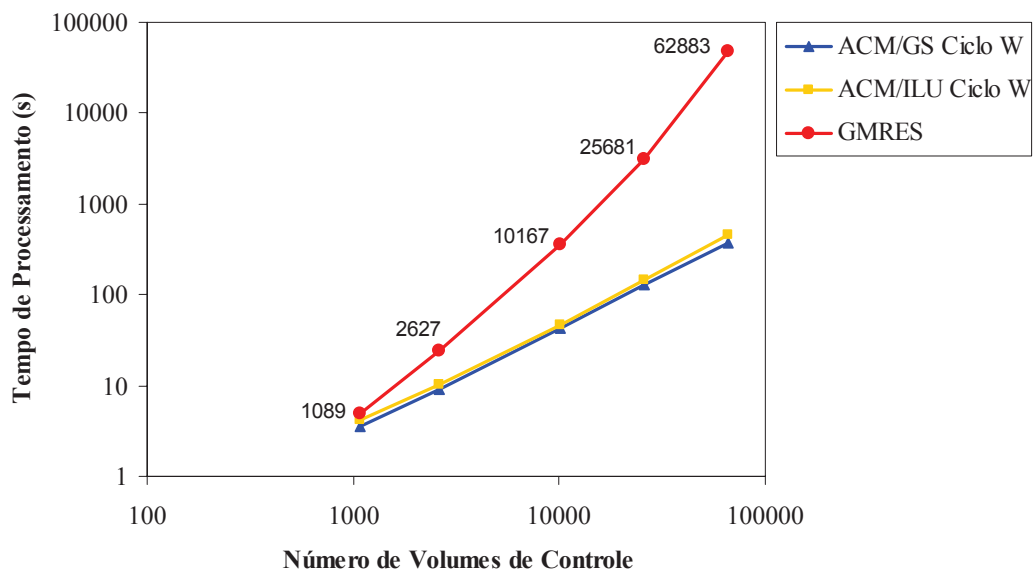


Figura 6.45 Comparação entre o *solver* GMRES e os métodos ACM/GS ciclo W e ACM/ILU ciclo W para cavidade com  $Re = 400$  (malhas não-cartesianas).

Na Tab. 6.31 são mostradas as quantidades de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) utilizadas para se chegar aos resultados mostrados nas Figs. 6.43 e 6.44.

Tabela 6.31 Número de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$  (malhas não-cartesianas).

| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomerção | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|----------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                  | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 1089            | 4                                | 20                              | 20      | 20      | 15                     | 5       | 10      |
| 2627            | 4                                | 20                              | 15      | 15      | 20                     | 5       | 10      |
| 10167           | 5                                | 50                              | 10      | 15      | 20                     | 5       | 10      |
| 25681           | 6                                | 200                             | 5       | 10      | 20                     | 10      | 10      |
| 62883           | 7                                | 250                             | 5       | 30      | 40                     | 10      | 5       |

Apesar do método ACM/GS ter apresentado os melhores resultados, o método ACM/ILU não apresenta uma variação tão grande em número de iterações de ILU para a solução dos sistemas lineares em cada malha. Assim, segue-se apresentado os testes com a configuração padrão que foi utilizada nos problemas anteriores e que é mostrada novamente abaixo:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

Efetuada os testes em busca do melhor esquema de aglomeração na malha com 62883 volumes de controle, obtém-se os resultados da Tab. 6.32. Os esquemas que apresentaram os melhores resultados: 1, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 foram testados nas outras malhas e são apresentados na Tab. 6.33.

Tabela 6.32 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 430,563                    |
| 2                      | 456,032                    |
| 3                      | 480,547                    |
| 4                      | 455,906                    |
| 5                      | 449,203                    |
| 6                      | 523,625                    |
| 7                      | 465,14                     |
| 8                      | 520,281                    |
| 9                      | 426,359                    |
| 10                     | 417,516                    |
| 11                     | 427,625                    |
| 12                     | 427,516                    |
| 13                     | 430,454                    |
| 14                     | 426,343                    |
| 15                     | 416,547                    |

Fica difícil determinar qual o esquema apresentou os melhores resultados, pois isso depende da malha que está sendo considerada. Na malha mais fina o esquema 15 seguido do 10 apresentaram os melhores tempos de computação. Já na malha de 25681 volumes, os melhores tempos foram obtidos utilizando os esquemas 10 e 11. Assim pode-se definir o esquema 10 como o que obteve melhores resultados de forma geral.

Tabela 6.33 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$  (malhas não-cartesianas).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                    |                     |                     |                     |
|------------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                        | Malha 1089 volumes         | Malha 2627 volumes | Malha 10167 volumes | Malha 25681 volumes | Malha 62883 volumes |
| 1                      | 3,859                      | 10,5               | 48,282              | 147,703             | 430,563             |
| 9                      | 3,859                      | 10,922             | 48,218              | 147,203             | 426,359             |
| <b>10</b>              | <b>3,844</b>               | <b>10,953</b>      | <b>48,25</b>        | <b>146,125</b>      | <b>417,516</b>      |
| 11                     | 3,859                      | 10,469             | 48,032              | 146,765             | 427,625             |
| 12                     | 3,875                      | 10,922             | 48,125              | 147,843             | 427,516             |
| 13                     | 3,907                      | 11,031             | 48,437              | 148,61              | 430,454             |
| 14                     | 3,828                      | 10,921             | 48,141              | 147,5               | 426,343             |
| 15                     | 4,156                      | 11,641             | 52,062              | 153,5               | 416,547             |

Realizando a aglomeração a cada vez que o sistema linear é modificado, obtém-se os tempos de computação apresentados na Tab. 6.34 para a malha de 62883 volumes. Os esquemas que apresentaram os melhores tempos de computação foram: 1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 14 e 15. Estes esquemas foram testados em outras malhas e seus resultados são apresentados na Tab. 6.35.

Tabela 6.34 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 524,953                    |
| 2                      | 555,235                    |
| 3                      | 609,859                    |
| 4                      | 554,719                    |
| 5                      | 553,844                    |
| 6                      | 648,156                    |
| 7                      | 603,922                    |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 8                      | 642,735                    |
| 9                      | 523,297                    |
| 10                     | 534,843                    |
| 11                     | 519,484                    |
| 12                     | 533,282                    |
| 13                     | 645,016                    |
| 14                     | 552,687                    |
| 15                     | 554,625                    |

Tabela 6.35 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas não-cartesianas).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                    |                     |                     |                     |
|------------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                        | Malha 1089 volumes         | Malha 2627 volumes | Malha 10167 volumes | Malha 25681 volumes | Malha 62883 volumes |
| <b>1</b>               | <b>4,218</b>               | <b>11,891</b>      | <b>54,89</b>        | <b>167,89</b>       | <b>524,953</b>      |
| 2                      | 4,485                      | 12,671             | 57,703              | 181,235             | 555,235             |
| 4                      | 4,453                      | 12,703             | 57,64               | 181,813             | 554,719             |
| 5                      | 4,422                      | 11,859             | 55,422              | 174,75              | 553,844             |
| <b>9</b>               | <b>4,375</b>               | <b>12,25</b>       | <b>54,672</b>       | <b>174,266</b>      | <b>523,297</b>      |
| 10                     | 4,391                      | 12,36              | 54,968              | 169,109             | 534,843             |
| <b>11</b>              | <b>4,375</b>               | <b>12,328</b>      | <b>54,859</b>       | <b>166,625</b>      | <b>519,484</b>      |
| 12                     | 4,359                      | 11,828             | 54,891              | 166,672             | 533,282             |
| 14                     | 4,656                      | 12,75              | 58,047              | 269,062             | 552,687             |
| 15                     | 4,657                      | 13,141             | 60,906              | 288,078             | 554,625             |

Considerando em termos de tempo de computação, os melhores resultados foram obtidos pelos esquemas 11, 9 e 1 (também dependendo bastante da malha considerada) como pode ser visto na Tab. 6.35 acima. Porém, mais uma vez, a realização do procedimento de aglomeração toda vez que o sistema linear é modificado aumentou o tempo de computação e não trouxe benefícios que justifiquem seu uso.

Formulando uma configuração geral de parâmetros para resolver esse problema, tem-se:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow$  4
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  10

Na Fig. 6.46 são mostrados os três níveis de aglomeração da malha de 1089 volumes utilizando o esquema de aglomeração 10. Pode-se perceber que os volumes de controle das malhas grossas (que foram construídas a partir do processo de aglomeração) apresentam formas bastante irregulares, porém elas são aglomeradas de forma a não aparecer uma direção preferencial, conforme o esperado no caso de um problema isotrópico.

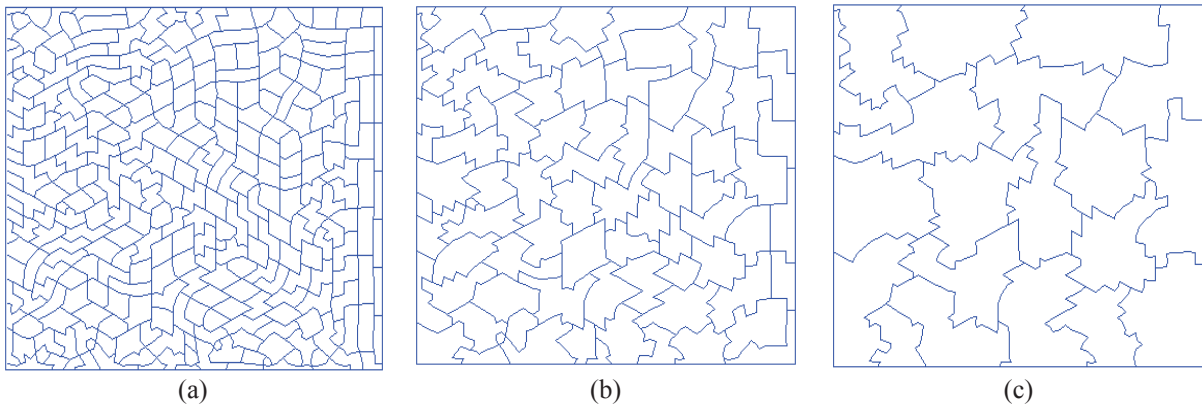


Figura 6.46 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 10 com  
(a) 283 volumes, (b) 78 volumes e (c) 20 volumes.

No próximo item são apresentados os resultados para a cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 1000**

O primeiro teste a ser efetuado diz respeito a quantos volumes devem ser aglomerados para dar origem a um bloco de volumes da malha grossa. Novamente, quatro células aglomeradas por bloco obteve os melhores resultados, porém a tabela com seus resultados não será novamente apresentada, partindo-se diretamente para as comparações entre os ciclos V, W e F.

Da mesma forma que ocorreu na malha cartesiana, com o aumento do número de Reynolds, o *solver* Gauss-Seidel (como *solver* interno do método ACM) apresentou dificuldades de convergência. Sendo assim, na Fig. 6.47 são apresentados os resultados utilizando como *solver* interno do método multigrid o ILU (ACM/ILU).

Nos exemplos anteriores, o ciclo W apresentou resultados muito próximos ao ciclo F, mas sempre melhores que este último. Porém neste exemplo, o ciclo F apresentou resultados um pouco melhores, assim optou-se por traçar a sua reta de regressão. Dessa forma obtém-se  $y = 2,8E-03x^{1,0941}$  com  $R^2 = 1$  para ACM/ILU ciclo F e  $y = 3E-06x^{2,0479}$  com  $R^2 = 0,99$  para GMRES, o que segue um padrão para retas de regressão com inclinação similar para os três diferentes números de Reynolds testados pelo multigrid e pelo GMRES.

Na Tab. 6.36 é mostrado o número de iterações de ILU (no método ACM/ILU) utilizadas para se chegar aos resultados da Fig. 6.47. Pode-se ver que em termos de número de iterações, o ciclo W é mais estável utilizando somente cinco iterações em todas as malhas consideradas, já no ciclo F, o número ótimo de iterações varia de dez a vinte. Porém neste caso escolheu-se o ciclo F para ser analisado uma vez que em todos os outros casos foi escolhido o ciclo W.

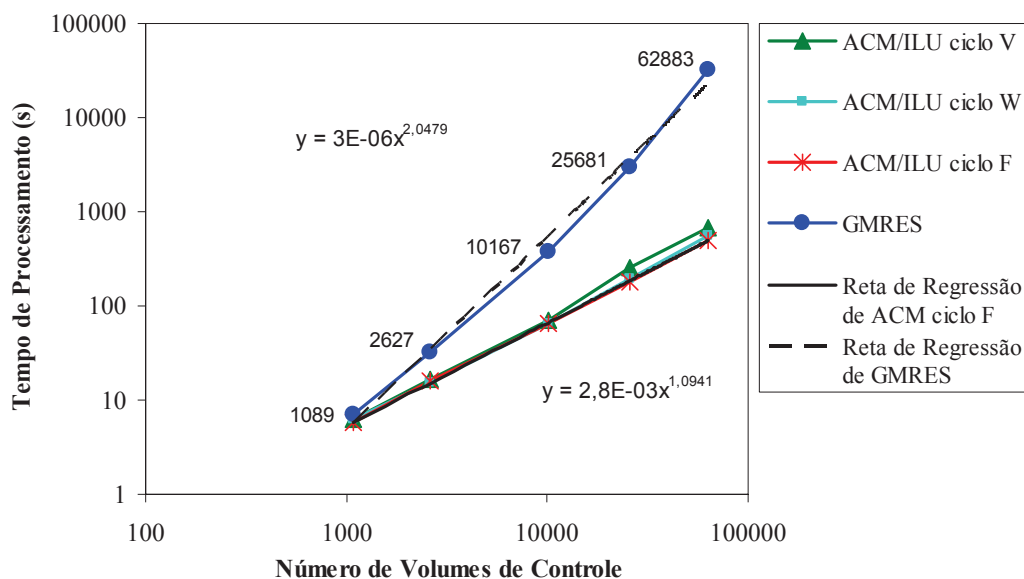


Figura 6.47 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para cavidade com  $Re = 1000$  (malhas não-cartesianas).

Tabela 6.36 Número de iterações de ILU (em ACM/ILU) para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$  (malhas não-cartesianas).

| Malha (vol.) | Nº de níveis de Aglomeração | Nº de iterações de ILU |         |         |
|--------------|-----------------------------|------------------------|---------|---------|
|              |                             | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 1089         | 4                           | 5                      | 5       | 10      |
| 2627         | 4                           | 30                     | 5       | 15      |
| 10167        | 5                           | 50                     | 5       | 20      |
| 25681        | 6                           | 50                     | 5       | 10      |
| 62883        | 7                           | 50                     | 5       | 10      |

Tomando a malha de 62883 volumes juntamente com os parâmetros abaixo, compararam-se os esquemas de aglomeração listados na Tab. 6.7:

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  F
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  10



- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow 50$
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow \text{Sim}$
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow 10^{-5}$

Os resultados obtidos para a malha de 62883 volumes são mostrados na Tab. 6.37. Os esquemas 1, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 apresentaram os melhores resultados em termos de menores tempos de computação e assim foram testados em outras malhas e seus resultados são apresentados na Tab. 6.38.

Tabela 6.37 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 514,391                    |
| 2                      | 535,438                    |
| 3                      | 566,422                    |
| 4                      | 535,859                    |
| 5                      | 534,625                    |
| 6                      | 600,5                      |
| 7                      | 563,906                    |
| 8                      | 601,047                    |
| 9                      | 499,813                    |
| 10                     | 513,922                    |
| 11                     | 513,078                    |
| 12                     | 513,547                    |
| 13                     | 518,391                    |
| 14                     | 510,735                    |
| 15                     | 510,734                    |

Na malha mais fina, de 62883 volumes, o esquema 9 apresentou um ganho considerável em relação aos outros esquemas. Porém na malha de 25681 volumes os

esquemas 10 e 11 apresentaram os melhores resultados. Assim fica complicado se definir qual o melhor esquema, mas pode apontar-se esses três esquemas de forma geral como os melhores.

Tabela 6.38 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$  (malhas não-cartesianas).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                    |                     |                     |                     |
|------------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                        | Malha 1089 volumes         | Malha 2627 volumes | Malha 10167 volumes | Malha 25681 volumes | Malha 62883 volumes |
| 1                      | 5,75                       | 15,25              | 66,875              | 179,031             | 514,391             |
| <b>9</b>               | <b>5,734</b>               | <b>15,703</b>      | <b>65,453</b>       | <b>180,984</b>      | <b>499,813</b>      |
| <b>10</b>              | <b>5,688</b>               | <b>15,328</b>      | <b>65,25</b>        | <b>178,64</b>       | <b>513,922</b>      |
| <b>11</b>              | <b>5,75</b>                | <b>15,235</b>      | <b>66,953</b>       | <b>178,375</b>      | <b>513,078</b>      |
| 12                     | 5,718                      | 15,266             | 65,125              | 179,593             | 513,547             |
| 13                     | 5,781                      | 15,453             | 67,485              | 179,578             | 518,391             |
| 14                     | 5,797                      | 15,734             | 65,5                | 184,266             | 510,735             |
| 15                     | 6,375                      | 16,719             | 70,032              | 186,562             | 510,734             |

Na Tab. 6.39 são apresentados os resultados para o caso onde a aglomeração é efetuada sempre que o sistema linear é modificado.

Tabela 6.39 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62883 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 620,938                    |
| 2                      | 650,391                    |
| 3                      | 707,672                    |
| 4                      | 654,61                     |
| 5                      | 638,703                    |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 6                      | 758,781                    |
| 7                      | 709,718                    |
| 8                      | 736,234                    |
| 9                      | 630,687                    |
| 10                     | 627,687                    |
| 11                     | 615,64                     |
| 12                     | 633,641                    |
| 13                     | 742,656                    |
| 14                     | 653,578                    |
| 15                     | 652,704                    |

Os esquemas 1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 14 e 15 da Tab. 6.39 apresentaram os melhores resultados e por isso são testados nas outras malhas.

Tabela 6.40 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas não-cartesianas).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                    |                     |                     |                     |
|------------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                        | Malha 1089 volumes         | Malha 2627 volumes | Malha 10167 volumes | Malha 25681 volumes | Malha 62883 volumes |
| 1                      | <b>6,484</b>               | <b>17,453</b>      | <b>74,313</b>       | <b>202,125</b>      | <b>620,938</b>      |
| 2                      | 7                          | 18,172             | 77,375              | 221,031             | 650,391             |
| 4                      | 10,187                     | 26,109             | 77,453              | 221,141             | 654,61              |
| 5                      | 9,657                      | 17,437             | 74,437              | 211,328             | 638,703             |
| 9                      | 9,438                      | 17,141             | 74,016              | 209,969             | 630,687             |
| 10                     | 9,562                      | 17,359             | 74,453              | 205,859             | 627,687             |
| <b>11</b>              | <b>9,422</b>               | <b>17,219</b>      | <b>74,438</b>       | <b>208,266</b>      | <b>615,64</b>       |
| 12                     | 9,422                      | 17,312             | 74,328              | 210,438             | 633,641             |
| 14                     | 10,204                     | 18,438             | 77,015              | 215,344             | 653,578             |
| 15                     | 10,75                      | 19,235             | 79,39               | 217,078             | 652,704             |

De forma geral os esquemas que apresentaram os melhores resultados (tempos de computação) foram os esquemas 1 e 11 (conforme pode ser visto na Tab. 6.40), porém como em todos os casos apresentados até agora o fato de aglomerar-se a cada vez que o sistema linear é modificado aumentou bastante o tempo de computação.

As Figs. 6.48 e 6.49 mostram as malhas finais resultantes da realização do procedimento de aglomeração sempre que o sistema linear é modificado. A malha utilizada possui 1089 volumes e os esquemas empregados são o 1 e o 11, respectivamente. Nas malhas finais pode-se ver o efeito dos termos advectivos no processo de aglomeração (principalmente com o uso do esquema 1).

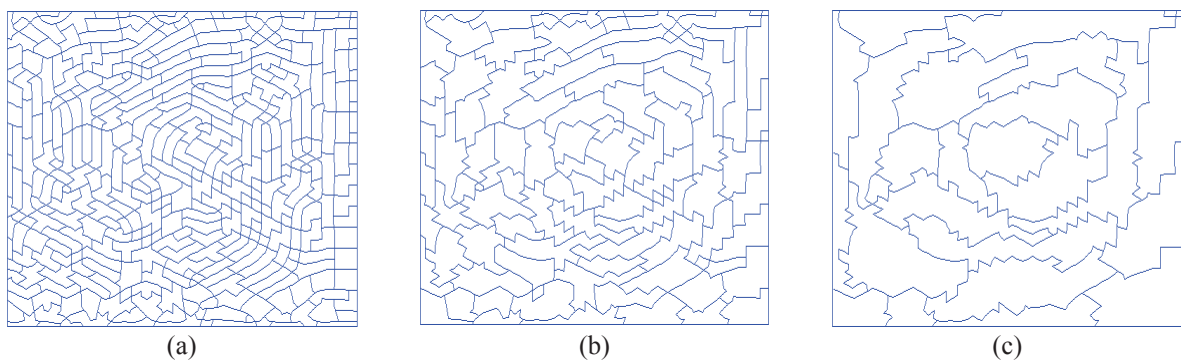


Figura 6.48 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 296 volumes, (b) 83 volumes e (c) 23 volumes.

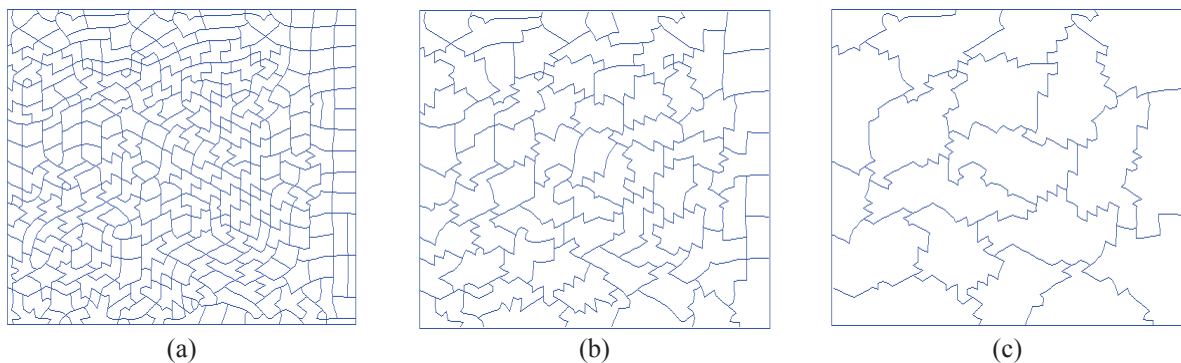


Figura 6.49 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 11 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 275 volumes, (b) 73 volumes e (c) 20 volumes.

Depois de efetuados os testes pode-se apresentar a configuração ideal de parâmetros para este problema, a qual é mostrada abaixo

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  F
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU

- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  10
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Número de células por bloco  $\Rightarrow$  4
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$
- Esquema de aglomeração  $\Rightarrow$  9, 10 e 11

Na Fig. 6.50 são mostrados os três níveis de aglomeração da malha de 1089 volumes utilizando o esquema de aglomeração 9 (efetuando a aglomeração somente no início do procedimento).

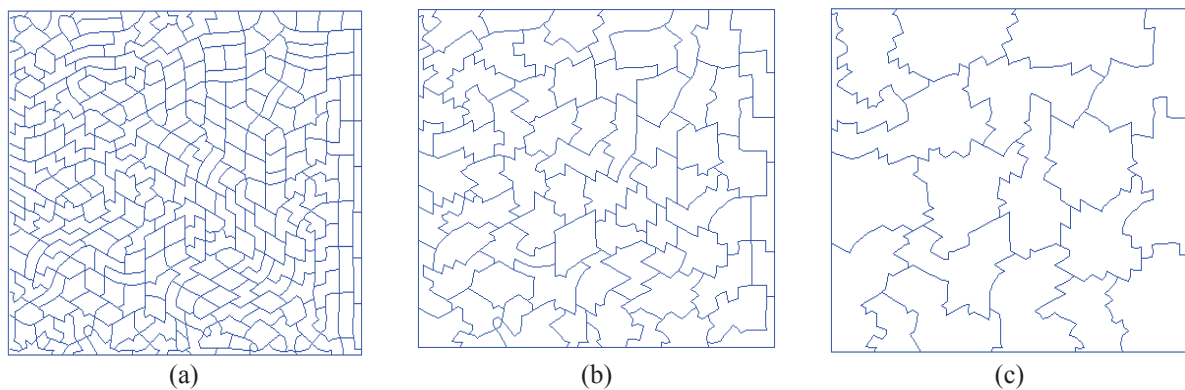


Figura 6.50 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 9 com  
(a) 281 volumes, (b) 75 volumes e (c) 21 volumes.

- **Considerações sobre o tempo de computação**

Considera-se o problema da cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 1000 resolvido na malha não-estruturada com 62883 volumes. Apesar do ciclo F mostrar-se um pouco melhor para os testes efetuados neste caso, optou-se por utilizar a mesma configuração de parâmetros usada para a marcação de tempo na malha cartesiana, a fim de possibilitar a comparação de tempos de acordo com o tipo de malha utilizada. Assim, o ciclo utilizado foi o ciclo W com número fixo de iterações do *solver* ILU igual a 5 e esquema de aglomeração 9.

O tempo total do processo para resolução do primeiro sistema linear obtido a partir do uso de EbFVM para aproximação das equações foi de 10,765s. Os seguintes tempos de CPU foram obtidos na primeira aplicação do método ACM:

- Tempo para gerar os vetores auxiliares no nível de malha fina = 2,297s (21,34% do tempo total).
- Tempo para realizar a aglomeração = 0,048s (0,45% do tempo total).
- Tempo para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados = 3,702s (34,38% do tempo total).
- Tempo utilizado para realizar os ciclos W necessários = 4,718s (43,83% do tempo total).

Ainda, para resolver o sistema linear (acima mencionado) foi necessária a realização de três ciclos W. Os tempos de cada ciclo e o percentual em termos do tempo total são os seguintes:

- 1º ciclo = 3,546s (32,94% do tempo total).
- 2º ciclo = 0,594s (5,52% do tempo total).
- 3º ciclo = 0,578s (5,37% do tempo total).

Têm-se também os tempos utilizados pelos principais procedimentos internos de cada ciclo realizado, os quais são: a geração do termo independente, a execução dos *solvers* internos do método ACM e o cálculo do resíduo.

- Para o 1º ciclo:

- Tempo para gerar o termo independente = 0,046s (0,43% do tempo total).
- Tempo para a execução dos *solvers* internos = 3,485s (32,37% do tempo total).
- Tempo para calcular o resíduo = 0,015s (0,14% do tempo total).

- Para o 2º ciclo:

- Tempo para gerar o termo independente = 0,063s (0,59% do tempo total).
- Tempo para a execução dos *solvers* internos = 0,515s (4,78% do tempo total).
- Tempo para calcular o resíduo = 0,016s (0,15% do tempo total).

- Para o 3º ciclo:

- Tempo para gerar o termo independente = 0,078s (0,72% do tempo total).
- Tempo para a execução dos *solvers* internos = 0,485s (4,51% do tempo total).
- Tempo para calcular o resíduo = 0,015s (0,14% do tempo total).

Se a aglomeração for realizada a cada vez que o sistema linear é atualizado, obtém-se para o segundo sistema linear o tempo total de 11,891s e os tempos parciais de:

- Tempo para gerar os vetores auxiliares no nível de malha fina = 2,516s (21,16% do tempo total).
- Tempo para realizar a aglomeração = 0,078s (0,65% do tempo total).
- Tempo para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados = 2,969s (24,97% do tempo total).
- Tempo utilizado para realizar os ciclos W necessários = 6,328s (53,22% do tempo total).

São realizados seis ciclos W sendo que os tempos de cada ciclo e o percentual em termos do tempo total são os seguintes:

- 1º ciclo = 3,391s (28,52% do tempo total).
- 2º ciclo = 0,593s (4,98% do tempo total).
- 3º ciclo = 0,578s (4,86% do tempo total).
- 4º ciclo = 0,594s (5% do tempo total).
- 5º ciclo = 0,594s (5% do tempo total).
- 6º ciclo = 0,578s (4,86% do tempo total).

Se a aglomeração não for novamente refeita para o segundo sistema linear obtém-se o tempo total do processo de 9,531s e os tempos parciais de:

- Tempo para gerar os vetores auxiliares no nível de malha fina = 2,516s (26,40% do tempo total).
- Tempo para realizar a aglomeração = 0s (0% do tempo total).
- Tempo para re-determinar os sistemas lineares dos níveis grosseiros = 0,703s (7,37% do tempo total).
- Tempo utilizado para realizar os ciclos W necessários = 6,312s (66,23% do tempo total).

Também são realizados seis ciclos W com os tempos mostrados abaixo:

- 1º ciclo = 3,359s (35,24% do tempo total).
- 2º ciclo = 0,594s (6,23% do tempo total).
- 3º ciclo = 0,578s (6,06% do tempo total).
- 4º ciclo = 0,594s (6,23% do tempo total).

- 5º ciclo = 0,594s (6,23% do tempo total).
- 6º ciclo = 0,593s (6,22% do tempo total).

De forma geral o procedimento computacional para a solução de um sistema linear em uma malha não cartesiana é mais custoso em termos de tempo de computação do que a solução do sistema em uma malha cartesiana e, novamente, a realização do procedimento de aglomeração incorre em um crescimento de tempo computacional devido ao tempo gasto para criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados, e não devido ao tempo gasto no processo de procura para determinar quais células serão aglomeradas.

Com isso, são concluídos os testes para a cavidade com malhas não-cartesianas isotrópicas. No caso do uso de uma malha não cartesiana ficou mais complicado definir o esquema de aglomeração ideal visto que à medida que modifica-se o número de Reynolds, também muda o esquema de aglomeração que obtém os melhores resultados.

No próximo item são mostrados os testes para o problema da cavidade com tampa móvel resolvido em malhas cartesianas com razão de aspecto 2.

### 6.2.3 Malhas cartesianas com $\Delta x > \Delta y$

Para dar prosseguimento aos testes, agora serão utilizadas malhas cartesianas (mostradas na Fig. 6.51) com razão de aspecto do elemento igual a 2, ou seja,  $\Delta x = 2\Delta y$ .

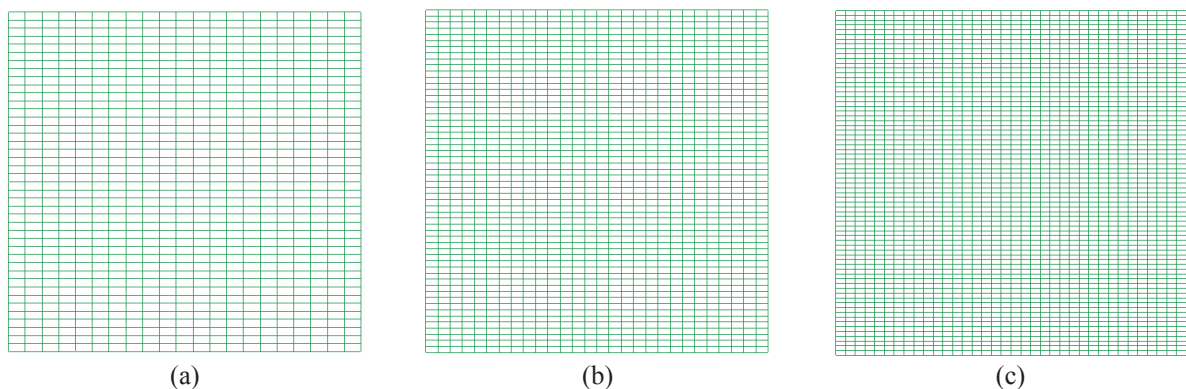


Figura 6.51 Malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$  para o problema da cavidade com tampa móvel com (a) 882 elementos, (b) 1568 elementos e (c) 2592 elementos.



Ainda, são utilizadas malhas com 10082, 25088 e 64800 elementos não mostradas na Fig. (6.51). Inicia-se apresentando os resultados obtidos para o número de Reynolds igual a 100.

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 100**

Efetuando o primeiro teste que diz respeito ao “número de células por bloco” na malha de 64800 elementos (65341 volumes) obtém-se os resultados mostrados na Tab. 6.41 abaixo. Para realizar os testes utiliza-se os parâmetros definidos anteriormente na Tab. 6.4.

Tabela 6.41 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para cavidade com  $Re = 100$  (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Número de células por bloco | Número de níveis de malha | Tempo de CPU (s) |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|
| 3                           | 8                         | 272              |
| <b>4</b>                    | <b>7</b>                  | <b>267,938</b>   |
| 5                           | 6                         | 346,437          |
| 6                           | 5                         | 338,89           |
| 7                           | 5                         | 322,407          |
| 8                           | 5                         | 336,281          |

Mais uma vez a aglomeração com quatro blocos de células obteve os melhores resultados.

A fim de não tornar o procedimento de apresentação de resultados muito repetitivo, parte-se direto para a aplicação das funções de aglomeração, que são o foco principal desse trabalho e também, porque os três ciclos já foram anteriormente testados para malhas cartesianas. A única diferença é que as malhas do item 6.2.1 possuem espaçamentos iguais em ambas as direções ( $x$  e  $y$ ) e nas malhas aqui testadas, o espaçamento  $\Delta x$  é o dobro de  $\Delta y$ . Mas independentemente dessa anisotropia de malha, assume-se o ciclo W para a realização dos testes com os esquemas de aglomeração.

Apesar de Gauss-Seidel se mostrar eficiente (como *solver* interno do método ACM) para o problema de cavidade com tampa móvel  $Re = 100$ , utilizar-se-á o *solver* ILU, pois esse obtém bons resultados também para altos números de Reynolds onde Gauss-Seidel falha. Como nosso objetivo é obter uma configuração padrão para o método multigrid que atenda a um conjunto maior de problemas, o *solver* ILU é uma opção mais robusta.

Assim define-se abaixo o conjunto de parâmetros que será testado na malha de 64800 elementos (65341 volumes de controle):

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Aglomera somente no início do processo  $\Rightarrow$  Sim
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

A Tab. 6.42 apresenta os resultados obtidos e, os esquemas que obtiveram os menores tempos de computação são testados em outras malhas e apresentados na Tab. 6.43.

Tabela 6.42 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 267,031                    |
| 2                      | 481,969                    |
| 3                      | 303,11                     |
| 4                      | 463,375                    |
| 5                      | 315,782                    |
| 6                      | 319,875                    |
| 7                      | 304,75                     |
| 8                      | 321,14                     |
| 9                      | 269,25                     |
| 10                     | 278,969                    |
| 11                     | 268,218                    |
| 12                     | 266,516                    |
| 13                     | 270,187                    |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 14                     | 282,688                    |
| 15                     | 319,031                    |

Novamente é difícil avaliar qual esquema é o melhor, pois dependendo de qual malha está se considerando, um ou outro esquema produz o melhor resultado. Pode-se destacar os esquemas 1, 12, 11 e 9 como os esquemas que apresentaram os melhores resultados.

Tabela 6.43 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$  (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 946 volumes          | Malha 1653 vol. | Malha 2701 vol. | Malha 10296 vol. | Malha 25425 vol. | Malha 65341 vol. |
| <b>1</b>               | <b>1,719</b>               | <b>3,375</b>    | <b>6</b>        | <b>29,579</b>    | <b>78</b>        | <b>267,031</b>   |
| <b>9</b>               | <b>1,781</b>               | <b>3,359</b>    | <b>5,969</b>    | <b>29,484</b>    | <b>80,938</b>    | <b>269,25</b>    |
| 10                     | 1,75                       | 3,328           | 5,984           | 29,422           | 80,64            | 278,969          |
| <b>11</b>              | <b>1,75</b>                | <b>3,359</b>    | <b>6</b>        | <b>29,391</b>    | <b>81,343</b>    | <b>268,218</b>   |
| <b>12</b>              | <b>1,75</b>                | <b>3,313</b>    | <b>5,984</b>    | <b>29,5</b>      | <b>81,14</b>     | <b>266,516</b>   |
| 13                     | 1,782                      | 3,406           | 6,11            | 29,969           | 82,453           | 270,187          |
| 14                     | 1,734                      | 3,329           | 6,109           | 29,485           | 81,515           | 282,688          |

Realizando a aglomeração toda vez que as não-linearidades são atualizadas e o sistema linear é modificado, obtém-se os resultados apresentados na Tab. 6.44.

Tabela 6.44 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 313,14                     |
| 2                      | 624,688                    |
| 3                      | 376,031                    |
| 4                      | 607,078                    |
| 5                      | 388,078                    |
| 6                      | 395,562                    |
| 7                      | 373,469                    |
| 8                      | 392,25                     |
| 9                      | 330,063                    |
| 10                     | 331,937                    |
| 11                     | 329,687                    |
| 12                     | 331,14                     |
| 13                     | 400,328                    |
| 14                     | 361,266                    |
| 15                     | 378,094                    |

Os esquemas 1, 9, 10, 11 e 12 foram escolhidos para serem testados em outras malhas e os resultados são mostrados na Tab. 6.45.

Neste caso o esquema 1 apresentou os melhores resultados (em quase todas as malhas) porém, novamente, a realização do procedimento de aglomeração toda vez que o sistema linear é atualizado torna o processo geral de solução do problema mais lento do que a realização do procedimento de aglomeração somente no início do processo.

Tabela 6.45 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 100$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 946 volumes          | Malha 1653 vol. | Malha 2701 vol. | Malha 10296 vol. | Malha 25425 vol. | Malha 65341 vol. |
| <b>1</b>               | <b>1,953</b>               | <b>3,766</b>    | <b>6,75</b>     | <b>31,531</b>    | <b>90,625</b>    | <b>313,14</b>    |
| 9                      | 1,953                      | 3,765           | 6,75            | 33,422           | 96,156           | 330,063          |
| 10                     | 1,969                      | 3,875           | 6,812           | 33,782           | 96,235           | 331,937          |
| 11                     | 1,938                      | 3,75            | 6,812           | 33,64            | 95,954           | 329,687          |
| 12                     | 1,969                      | 3,765           | 6,766           | 33,594           | 97,39            | 331,14           |

Define-se, então, que a aglomeração realizada somente no início do processo é mais vantajosa e neste caso os melhores esquemas são 1, 12, 11 e 9.

Na Fig. 6.52 é mostrada a malha original e na Fig. 6.53 são mostrados os três níveis de aglomeração da malha de 946 volumes utilizando o esquema de aglomeração 1.

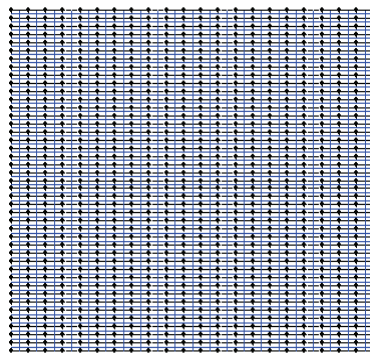


Figura 6.52 Malha original com 946 volumes de controle.

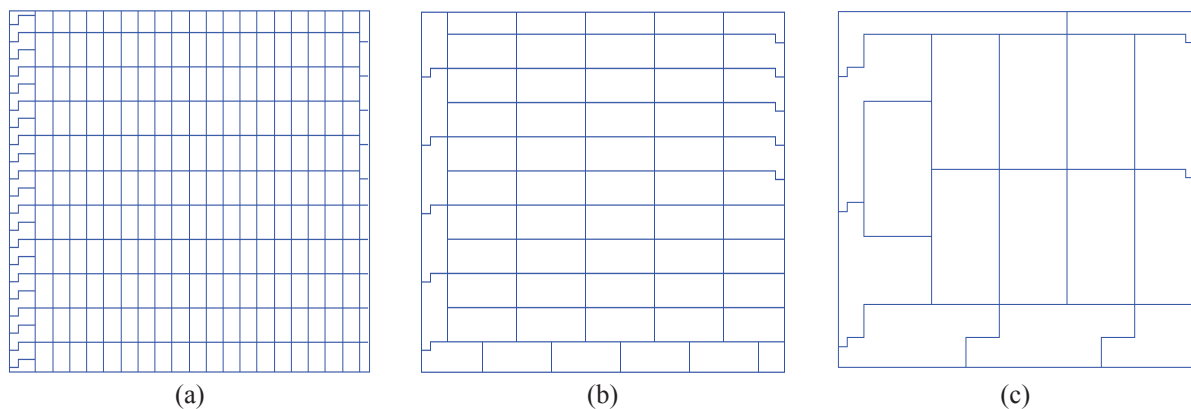


Figura 6.53 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 com

(a) 242 volumes, (b) 61 volumes e (c) 16 volumes.

No próximo item são apresentados os resultados para o número de Reynolds igual a 400.

• **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 400**

Dando prosseguimento aos testes a serem realizados, o primeiro passo é determinar o número de células que devem ser aglomeradas para dar origem a um bloco de volumes da malha grossa.

Porém, novamente, o aumento do número de Reynolds não influenciou o número de células a serem aglomeradas, e o número de células por bloco igual a quatro obteve os melhores resultados. Este fato é aqui somente mencionado e os valores não são apresentados.

Relembrando os parâmetros até agora utilizados e mantendo essa configuração padrão apresentada abaixo, dá-se seqüência ao processo de testes dos esquemas de aglomeração. Utilizando a malha de 65341 volumes, os resultados são mostrados na Tab. 6.46.

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

Os esquemas que apresentaram os melhores resultados: 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 são testados nas outras malhas e são apresentados na Tab. 6.47.

Tabela 6.46 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 412                        |
| 2                      | 820,55                     |
| 3                      | 435,5                      |
| 4                      | 788,02                     |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 5                      | 496,22                     |
| 6                      | 508,61                     |
| 7                      | 434,81                     |
| 8                      | 510,38                     |
| 9                      | 432,33                     |
| 10                     | 429,97                     |
| 11                     | 434,75                     |
| 12                     | 429,61                     |
| 13                     | 437,45                     |
| 14                     | 429,38                     |
| 15                     | 501,14                     |

Tabela 6.47 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$  (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 946 volumes          | Malha 1653 vol. | Malha 2701 vol. | Malha 10296 vol. | Malha 25425 vol. | Malha 65341 vol. |
| <b>1</b>               | <b>3,39</b>                | <b>6,172</b>    | <b>10,75</b>    | <b>48,047</b>    | <b>129,75</b>    | <b>412</b>       |
| 3                      | 4                          | 5,859           | 10,25           | 47,766           | 130,14           | 435,50           |
| 5                      | 3,984                      | 6,172           | 10,719          | 49,735           | 144,532          | 496,22           |
| 7                      | 4,031                      | 5,828           | 10,297          | 47,875           | 130,094          | 434,81           |
| 9                      | 4                          | 6,219           | 10,641          | 48,094           | 134,266          | 432,33           |
| 10                     | 4,031                      | 6,218           | 10,687          | 48,359           | 134,75           | 429,97           |
| 12                     | 3,985                      | 6,187           | 10,687          | 48,094           | 134,813          | 429,61           |
| 13                     | 4,047                      | 6,281           | 10,828          | 48,828           | 135,656          | 437,45           |
| 14                     | 3,984                      | 6,172           | 10,703          | 48,313           | 135,454          | 429,38           |

O esquema 1 apresentou os menores tempos de computação nas duas malhas mais finas, porém em algumas outras malhas apresentou tempos maiores que os outros esquemas. Como a variação de tempo nas malhas grossas é pequena, considera-se de forma geral o esquema 1 como o melhor para esse caso.

Realizando a aglomeração a cada vez que o sistema linear é modificado obtém-se os tempos de computação apresentados na Tab. 6.48, sendo que os melhores tempos foram obtidos pelos esquemas 1, 3, 9, 10, 11, 12 e 14. Estes esquemas são testados em outras malhas e seus resultados apresentados na Tab. 6.49.

Tabela 6.48 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 527,844                    |
| 2                      | 1057,27                    |
| 3                      | 552,078                    |
| 4                      | 1029,94                    |
| 5                      | 644,156                    |
| 6                      | 644,406                    |
| 7                      | Não convergiu!             |
| 8                      | 636,984                    |
| 9                      | 547,094                    |
| 10                     | 547,641                    |
| 11                     | 554,218                    |
| 12                     | 550,532                    |
| 13                     | 676,781                    |
| 14                     | 596,25                     |
| 15                     | 601,062                    |



Novamente o esquema de aglomeração 1 apresentou os melhores resultados e o fato de realizar a aglomeração a cada atualização do sistema linear provocou um gasto de tempo computacional desnecessário.

Tabela 6.49 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 400$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 946 volumes          | Malha 1653 vol. | Malha 2701 vol. | Malha 10296 vol. | Malha 25425 vol. | Malha 65341 vol. |
| <b>1</b>               | <b>3,797</b>               | <b>6,641</b>    | <b>10,718</b>   | <b>54,86</b>     | <b>154,125</b>   | <b>527,844</b>   |
| 3                      | 3,719                      | 6,719           | 10,796          | 54,766           | 159,109          | 552,078          |
| 9                      | 3,844                      | 6,625           | 11,359          | 54,875           | 160,469          | 547,094          |
| 10                     | 3,891                      | 6,703           | 10,891          | 55,578           | 168,093          | 547,641          |
| 11                     | 3,875                      | 6,656           | 10,828          | 55,25            | 162              | 554,218          |
| 12                     | 3,859                      | 6,672           | 10,828          | 54,734           | 158,125          | 550,532          |
| 14                     | 4,109                      | 7,485           | 11,421          | 58,781           | 170,562          | 596,25           |

A configuração padrão que vem se utilizando desde o início tem mostrado bons resultados, somente o esquema de aglomeração que obtém os melhores resultados vem variando de um caso para outro.

Neste caso novamente o esquema que apresentou os melhores resultados foi o esquema 1 e as malhas resultantes da aglomeração ficaram iguais às obtidas para  $Re = 100$  na Fig. 6.53. Assim não serão apresentadas aqui.

No próximo item são apresentados os resultados para a cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

- **Cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 1000**

Novamente não serão apresentados os testes com respeito ao número de células por bloco, pois a aglomeração com quatro células obteve os melhores resultados. Os parâmetros utilizados no método ACM são novamente definidos como

- Tipo de ciclo multigrid  $\Rightarrow$  W
- *Solver* interno  $\Rightarrow$  ILU
- Número máximo de células para o *solver* direto  $\Rightarrow$  60
- Número fixo de iterações do *solver* iterativo  $\Rightarrow$  5
- Número máximo de ciclos  $\Rightarrow$  50
- Resíduo máximo aceito da solução  $\Rightarrow$   $10^{-5}$

Partindo para os testes com os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes obtém-se os valores mostrados na Tab. 6.50. Os melhores esquemas em termos de tempos de computação são apresentados na Tab. 6.51.

Tabela 6.50 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ .

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 526,141                    |
| 2                      | 1004,88                    |
| 3                      | 581,313                    |
| 4                      | 1003,89                    |
| 5                      | 608,765                    |
| 6                      | 640,109                    |
| 7                      | 584,516                    |
| 8                      | 639,109                    |
| 9                      | 541,468                    |
| 10                     | 538,11                     |
| 11                     | 543,578                    |
| 12                     | 542,609                    |
| 13                     | 547,641                    |
| 14                     | 537,047                    |
| 15                     | 614,281                    |

O esquema de aglomeração 1 proporcionou a obtenção dos melhores resultados nos três níveis de malhas mais finas como pode ser visto abaixo na Tab. 6.51. O esquema 10 também aparece como uma boa alternativa. Quanto aos outros esquemas fica difícil definir qual obteve os melhores resultados, pois estes variam muito de malha para malha.

Tabela 6.51 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$  (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 946 volumes          | Malha 1653 vol. | Malha 2701 vol. | Malha 10296 vol. | Malha 25425 vol. | Malha 65341 vol. |
| <b>1</b>               | <b>5,188</b>               | <b>9,843</b>    | <b>17,313</b>   | <b>67,328</b>    | <b>170,391</b>   | <b>526,141</b>   |
| 9                      | 5,14                       | 9,735           | 17,25           | 70,5             | 179,172          | 541,468          |
| 10                     | 5,203                      | 9,781           | 17,39           | 70,969           | 179,125          | 538,11           |
| 11                     | 5,141                      | 9,75            | 17,36           | 71,125           | 178,984          | 543,578          |
| 12                     | 5,172                      | 9,734           | 17,328          | 70,703           | 179,109          | 542,609          |
| 13                     | 5,218                      | 9,781           | 17,422          | 71,36            | 181,875          | 547,641          |
| 14                     | 5,172                      | 9,766           | 17,36           | 70,937           | 181,938          | 537,047          |

Na Tab. 6.52 são apresentados os resultados para o caso onde a aglomeração é efetuada sempre que o sistema linear é modificado.

Tabela 6.52 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 65341 volumes para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 656,234                    |
| 2                      | 1306,36                    |
| 3                      | 757,219                    |
| 4                      | 1290,55                    |
| 5                      | 762,86                     |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 6                      | 818,89                     |
| 7                      | 1270,42                    |
| 8                      | 822,578                    |
| 9                      | 702,906                    |
| 10                     | 684,907                    |
| 11                     | 695,922                    |
| 12                     | 670,421                    |
| 13                     | 838,469                    |
| 14                     | 735,047                    |
| 15                     | 744,578                    |

Como os esquemas 1, 9, 10, 11, 12, 14 e 15 da Tab. 6.52 apresentaram os melhores resultados, estes são testados nas outras malhas e seus resultados são apresentados na Tab. 6.53.

Tabela 6.53 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração para o problema da cavidade com tampa móvel com  $Re = 1000$ , aglomerando sempre que o sistema linear é modificado (malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$ ).

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                 |                 |                  |                  |                  |
|------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
|                        | Malha 946 volumes          | Malha 1653 vol. | Malha 2701 vol. | Malha 10296 vol. | Malha 25425 vol. | Malha 65341 vol. |
| <b>1</b>               | <b>6,125</b>               | <b>12,391</b>   | <b>20,297</b>   | <b>78,406</b>    | <b>201,828</b>   | <b>656,234</b>   |
| 9                      | 6,016                      | 10,594          | 19,625          | 80,5             | 213,578          | 702,906          |
| 10                     | 5,937                      | 10,875          | 18,969          | 81               | 206,687          | 684,907          |
| 11                     | 5,891                      | 10,813          | 18,719          | 80,797           | 204,359          | 695,922          |
| 12                     | 5,797                      | 11,047          | 19,078          | 81,547           | 204,344          | 670,421          |
| 14                     | 6,25                       | 11,516          | 20,891          | 86,266           | 227,343          | 735,047          |
| 15                     | 6,422                      | 12,14           | 23,813          | 82,39            | 211,75           | 744,578          |

O esquema 1 apresentou os melhores resultados, mas a aglomeração realizada a cada vez que o sistema linear é modificado tornou novamente o procedimento bastante lento.

Na Fig. 6.54 são apresentadas as malhas obtidas da utilização do processo de aglomeração sempre que o sistema linear é modificado. O esquema empregado é o esquema 1.

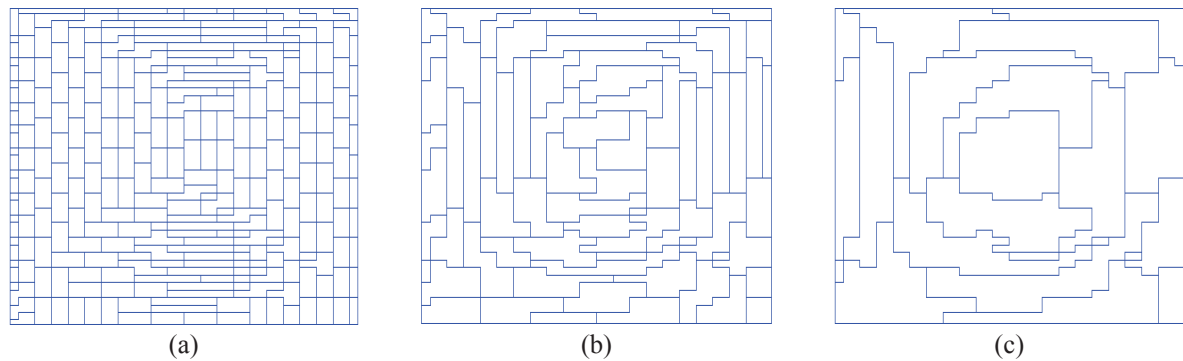


Figura 6.54 Malhas resultantes da aglomeração adaptativa esquema 1 efetuada sempre que o sistema linear é modificado, com (a) 247 volumes, (b) 66 volumes e (c) 18 volumes.

Já, efetuando-se o processo de aglomeração somente uma vez no início do procedimento de solução, obtém-se malhas iguais as obtidas para o número de Reynolds igual a 100, da Fig. 6.53, que por isso não são aqui re-apresentadas.

Encerram-se, aqui, os testes efetuados para a resolução do problema da cavidade com tampa móvel. Conclui-se que foi possível encontrar um conjunto de parâmetros que de forma geral satisfaz a todos os casos apresentados.

Foi visto que na maioria dos casos o uso do ciclo W proporcionou os melhores resultados e o *solver* ILU (no método ACM/ILU) mostrou-se mais robusto não falhando para nenhum dos problemas propostos. O número de células por bloco igual a quatro apresentou-se com a melhor opção juntamente com a utilização do número fixo de iterações do *solver* ILU (no ACM/ILU) iguais a 5 para a maioria dos problemas propostos. O fato de aglomerar-se somente no início do processo também mostrou ser melhor que efetuar o procedimento toda vez que o sistema linear é atualizado. A única dúvida fica a respeito do esquema de aglomeração utilizado. Nas malhas cartesianas isotrópicas o esquema 9 obteve os melhores resultados. Nas malhas não-cartesianas o esquema que obteve os melhores resultados dependeu do número de Reynolds considerado (para  $Re = 100$  foi o esquema 15, para  $Re = 400$ , o esquema 10 e para  $Re = 1000$ , o esquema 9) e nas malhas cartesianas com  $\Delta x > \Delta y$  foi o

esquema 1. Na verdade, a maioria dos esquemas apresentou tempos de computação similares, abrindo assim várias possibilidades de utilização.

No próximo item são mostrados os testes efetuados para o problema do duto.

### 6.3 Escoamento entre placas paralelas

Outro problema importante que deve ser testado é o do escoamento com entrada e saída de massa. Para isso foi escolhido o problema do escoamento laminar entre placas paralelas com número de Reynolds igual a 50 para ser resolvido em uma malha cartesiana de dimensões  $3 \times 1$ . As condições de contorno são: velocidades prescritas na entrada, condição de parede nos lados superior e inferior e, na saída, pressão prescrita.

Na Fig. 6.55 é mostrada a geometria do problema e o campo de velocidades. É possível observar a região de entrada do escoamento e o desenvolvimento da camada limite até atingir o perfil plenamente desenvolvido, onde a velocidade do centro é 1,5 vezes a velocidade da entrada.

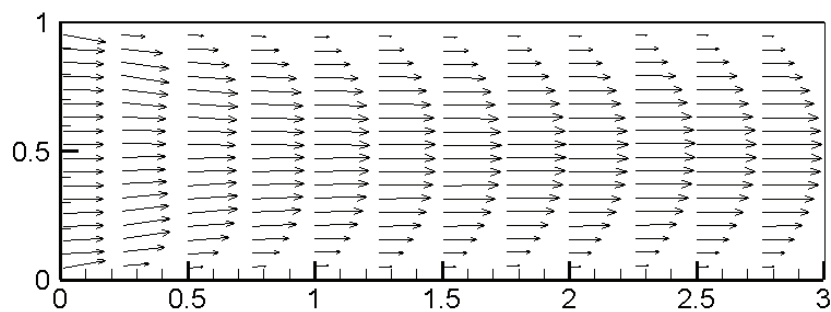


Figura 6.55 Vetores velocidade para escoamento entre placas paralelas com  $Re = 50$ .

O problema do escoamento entre placas paralelas foi aproximado pelo método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) com a função de interpolação *Suds* que mostrou ser mais robusta no problema da cavidade com tampa móvel (anteriormente apresentado) e por isso optou-se pela sua utilização.

Iniciando os testes do método ACM aplicado a esse tipo de problema, serão consideradas as malhas cartesianas isotrópicas mostradas na Fig. 6.56 abaixo. Ainda são utilizadas malhas com 24843 e 62208 elementos.

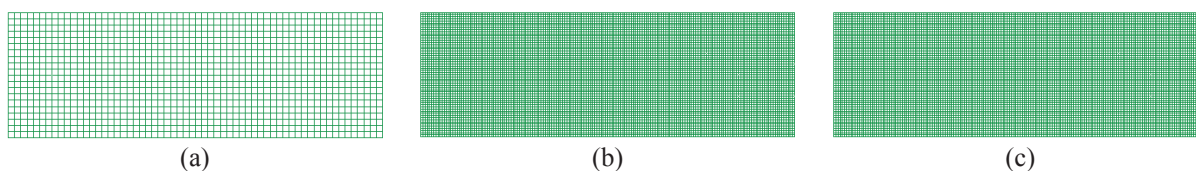


Figura 6.56 Malhas cartesianas para o problema do escoamento entre placas paralelas com a) 1200 elementos, (b) 3072 elementos e (c) 10092 elementos.

Considerando a malha mais refinada utilizada nos testes, a de 62208 elementos (que dão origem a 62785 volumes de controle) pode-se efetuar os testes para descobrir qual o “número de células por bloco” é mais adequado para este caso. Para realizar os testes são utilizados os parâmetros definidos na Tab. 6.54 e os resultados são apresentados na Tab. 6.55.

Tabela 6.54 Parâmetros do método ACM utilizados para os testes quanto ao número de células utilizadas para realizar a aglomeração para o escoamento entre placas paralelas.

|  |   |
|--|---|
| Tipo de ciclo multigrid                              | W   |
| <i>Solver</i> interno                                | ILU   |
| Número máximo de células para o <i>solver</i> direto | 60  |
| Número fixo de iterações do <i>solver</i> iterativo  | 5   |
| Número máximo de ciclos                              | 50  |
| Aglomera somente no início do processo               | Sim   |
| Resíduo máximo aceito da solução                     | $10^{-5}$   |
| Esquema de aglomeração                               | Coefficiente da variável pressão da equação de conservação da massa |

Tabela 6.55 Tempos de CPU e número de níveis de malha em relação ao número de células por bloco utilizadas no processo de aglomeração para o escoamento entre placas paralelas.

| Número de células por bloco | Número de níveis de malha | Tempo de CPU (s)      |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------|
| 3                           | 8                         | 186,672 <sup>11</sup> |
| 4                           | 7                         | 119,218               |
| 5                           | 6                         | 125,453               |
| 6                           | 6                         | 158,578 <sup>12</sup> |
| 7                           | 6                         | 143,406               |
| 8                           | 5                         | 140,703               |

<sup>11</sup> Foram necessárias 20 iterações de ILU para o problema convergir.

<sup>12</sup> Foram necessárias 10 iterações de ILU para o problema convergir.

Neste problema a aglomeração com quatro células por bloco também mostrou ser a melhor alternativa.

O próximo passo é efetuar a comparação entre os ciclos V, W e F, mantendo os parâmetros definidos anteriormente (somente o *solver* interno e o seu número de iterações, além dos ciclos são variáveis).

Utilizando, primeiramente, o *solver* Gauss-Seidel como *solver* interno do método ACM (ACM/GS) obtém-se os resultados mostrados na Fig. 6.57. Traçando a reta de tendência para ACM/GS ciclo W tem-se  $y = 1,1E-03x^{1,0316}$  e  $R^2 = 0,99$ . Já para GMRES,  $y = 7E-07x^{1,9963}$  e  $R^2 = 0,99$ .

O ciclo W obteve os melhores resultados, seguido dos ciclos F e V.

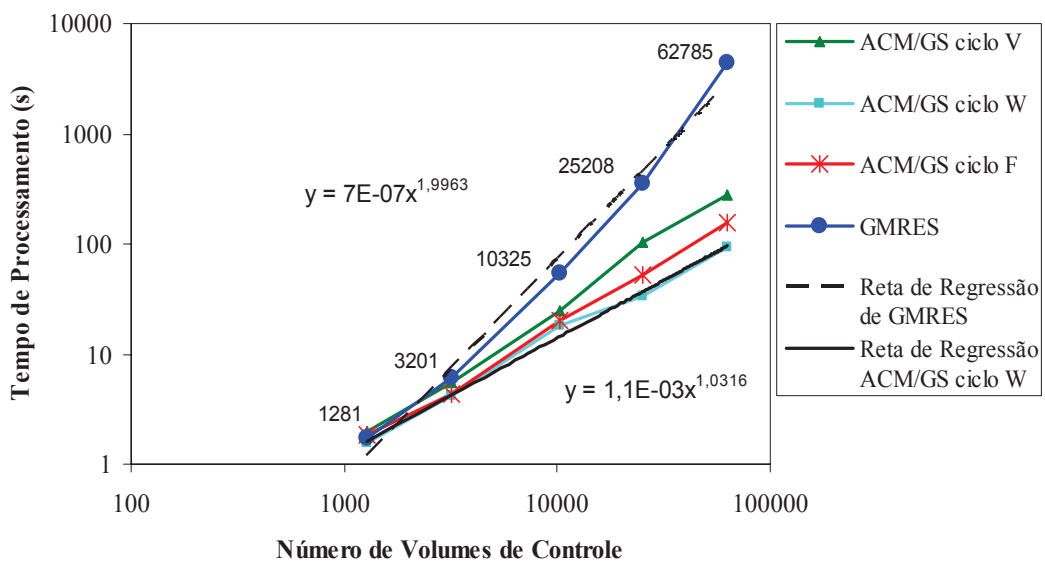


Figura 6.57 Comparação entre o *solver* GMRES e os diferentes ciclos de ACM/GS para o escoamento entre placas paralelas.

Utilizando o *solver* ILU como *solver* interno do método ACM (ACM/ILU), a reta de tendência encontrada para ACM/ILU ciclo W é  $y = 6E-04x^{1,0989}$  com  $R^2 = 0,99$  como pode ser visto na Fig. 6.58.



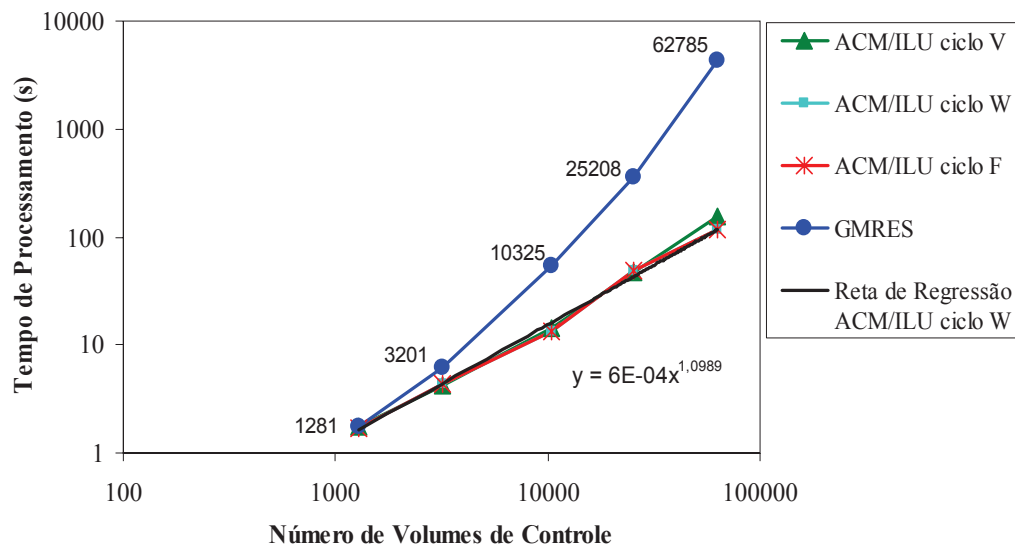


Figura 6.58 Comparação entre o solver GMRES e os diferentes ciclos do ACM/ILU para o escoamento entre placas paralelas.

Na Fig. 6.59 é mostrada a comparação entre o método ACM/GS e ACM/ILU, para o ciclo W, que obteve os melhores resultados. Nas malhas mais finas ACM/GS obteve os melhores resultados.

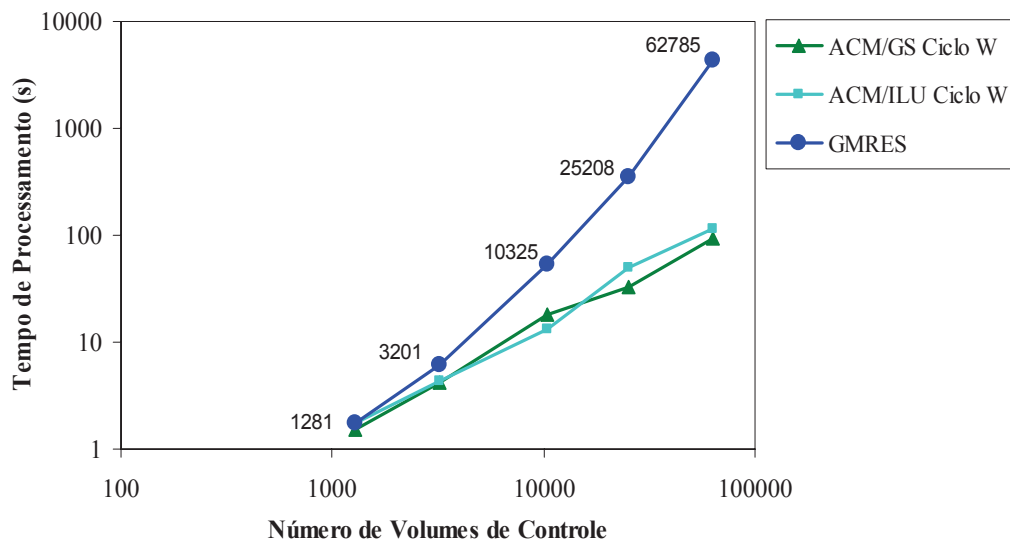


Figura 6.59 Comparação entre o *solver* GMRES e os métodos ACM/GS e ACM/ILU ciclo W para o escoamento entre placas paralelas.

Analisando o número de iterações “ótimo” tanto de Gauss-Seidel (em ACM/GS) como de ILU (em ACM/ILU) pode-se ver na Tab. 6.56 que há uma grande variação do número de iterações em relação ao grau de refino da malha considerada (principalmente utilizando ACM/GS). Assim, optou-se por continuar com a configuração padrão utilizada até agora com o *solver* ILU como *solver* interno do método ACM (ACM/ILU) para efetuar os testes com os esquemas de interpolação.

Tabela 6.56 Número de iterações de Gauss-Seidel (em ACM/GS) e ILU (em ACM/ILU) para o problema do escoamento entre placas paralelas.

| Malha<br>(vol.) | Nº de níveis<br>de<br>Aglomeração | Nº de iterações de Gauss-Seidel |         |         | Nº de iterações de ILU |         |         |
|-----------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|                 |                                   | Ciclo V                         | Ciclo W | Ciclo F | Ciclo V                | Ciclo W | Ciclo F |
| 1281            | 4                                 | 70                              | 20      | 50      | 10                     | 3       | 5       |
| 3201            | 4                                 | 80                              | 10      | 50      | 15                     | 10      | 10      |
| 10325           | 5                                 | 150                             | 60      | 150     | 15                     | 5       | 5       |
| 25208           | 6                                 | 200                             | 10      | 50      | 25                     | 15      | 20      |
| 62785           | 7                                 | 150                             | 10      | 70      | 20                     | 3       | 15      |

Para esses testes são mantidos os mesmos parâmetros da Tab. 6.54. Cabe salientar que vários esquemas apresentaram dificuldades de convergência com número de iterações de ILU igual a 5 no método ACM/ILU, assim optou-se por padronizar o número de iterações para 10. Mesmo assim alguns esquemas não convergiram.

Os resultados obtidos da aplicação dos esquemas de aglomeração na malha de 62785 volumes são mostrados na Tab. 6.57. Alguns esquemas foram escolhidos para serem testados nas outras malhas e seus resultados são mostrados na Tab. 6.58.

Tabela 6.57 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62785 volumes para o problema do escoamento entre placas paralelas.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 107,032                    |
| 2                      | Não convergiu!             |
| 3                      | 99,125                     |
| 4                      | Não convergiu!             |
| 5                      | Não convergiu!             |
| 6                      | Não convergiu!             |
| 7                      | 101,547                    |
| 8                      | Não convergiu!             |
| 9                      | 121,342                    |
| 10                     | 166,454                    |

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 11                     | 177,859                    |
| 12                     | 177,953                    |
| 13                     | 125,875                    |
| 14                     | 190,594                    |
| 15                     | 181,11                     |

Diferentemente do que vem acontecendo até agora, os esquemas que apresentaram os melhores tempos de computação foram os esquemas 3, 7 e 1. Vale lembrar que o esquema 3 representa o coeficiente da pressão na equação da conservação da quantidade de movimento na direção  $x$  e o esquema 7 representa o coeficiente da velocidade  $u$  na equação da conservação da massa, além do esquema 1 que representa o coeficiente da velocidade  $u$  na equação da conservação da quantidade de movimento na direção  $x$ .

Tabela 6.58 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema do escoamento entre placas paralelas.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                       |                        |                        |                        |
|------------------------|----------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                        | Malha 1281<br>volumes      | Malha 3201<br>volumes | Malha 10325<br>volumes | Malha 25208<br>volumes | Malha 62785<br>volumes |
| 1                      | 1,781                      | 4,484                 | 14,109                 | 41,125                 | 107,032                |
| <b>3</b>               | <b>1,75</b>                | <b>4,078</b>          | <b>14,078</b>          | <b>37,578</b>          | <b>99,125</b>          |
| <b>7</b>               | <b>1,797</b>               | <b>4,14</b>           | <b>14,125</b>          | <b>37,641</b>          | <b>101,547</b>         |
| 9                      | 1,828                      | 4,375                 | 15,782                 | 56,188                 | 121,343                |
| 13                     | 1,906                      | 4,641                 | 16,609                 | 42,156                 | 125,875                |

Aglomerando a cada vez que o sistema linear é modificado obtém-se os tempos de computação apresentados na Tab. 6.59.

Tabela 6.59 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração na malha de 62785 volumes para o problema do escoamento entre placas paralelas, aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |
|------------------------|----------------------------|
| 1                      | 122,75                     |
| 2                      | Não convergiu!             |
| 3                      | 115                        |
| 4                      | Não convergiu!             |
| 5                      | Não convergiu!             |
| 6                      | Não convergiu!             |
| 7                      | 116,938                    |
| 8                      | Não convergiu!             |
| 9                      | 143,688                    |
| 10                     | 192,985                    |
| 11                     | 209,469                    |
| 12                     | 210,625                    |
| 13                     | 174,5                      |
| 14                     | 235,265                    |
| 15                     | 198,703                    |

Escolhendo os melhores esquemas para a realização dos testes em outras malhas, pode-se ver novamente, na Tab. 6.60, que os esquemas 3, 7 e 1 obtiveram os melhores resultados. No entanto a realização do processo de aglomeração toda a vez que o sistema linear é atualizado provoca um gasto de tempo computacional desnecessário, sendo que, mais uma vez, esse procedimento é descartado.

Tabela 6.60 Tempos de computação para os esquemas de aglomeração em diferentes malhas cartesianas para o problema do escoamento entre placas paralelas, aglomerando sempre que o sistema linear é modificado.

| Esquema de Aglomeração | Tempo de Processamento (s) |                    |                     |                     |                     |
|------------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                        | Malha 1281 volumes         | Malha 3201 volumes | Malha 10325 volumes | Malha 25208 volumes | Malha 62785 volumes |
| 1                      | 2,046                      | 4,921              | 16,281              | 44,609              | 122,75              |
| <b>3</b>               | <b>1,986</b>               | <b>4,516</b>       | <b>15,781</b>       | <b>41,719</b>       | <b>115</b>          |
| 7                      | 2                          | 4,562              | 15,766              | 42,141              | 116,938             |
| 9                      | 2,032                      | 4,844              | 17,781              | 60,843              | 143,688             |
| 13                     | 2,579                      | 5,937              | 22,375              | 56,985              | 174,5               |

Na Fig. 6.60 é mostrada a malha original e na Fig. 6.61 são mostrados os três níveis de aglomeração da malha de 1281 volumes utilizando o esquema de aglomeração 3, o qual obteve os melhores resultados. Pode-se perceber que as células foram aglomeradas na direção  $x$  (a direção do escoamento).

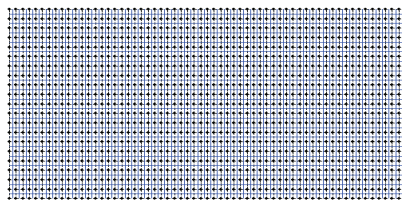


Figura 6.60 Malha original com 1281 volumes de controle.

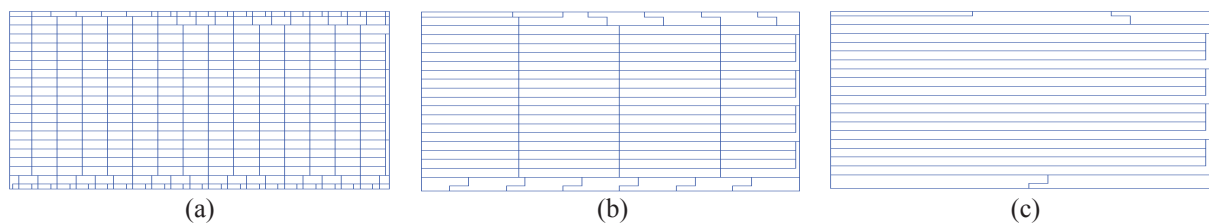


Figura 6.61 Malhas resultantes da utilização do esquema de aglomeração 3 com (a) 336 volumes, (b) 83 volumes e (c) 22 volumes.

A aglomeração resultante da aplicação do esquema 7 é mostrada na Fig. 6.62 uma vez que seus tempos de computação ficaram bastante próximos do esquema 3. Pode-se notar que isso ocorre devido ao fato que com a aplicação dos esquemas de aglomeração 3 e 7 as malhas grossas resultantes são bastante similares.

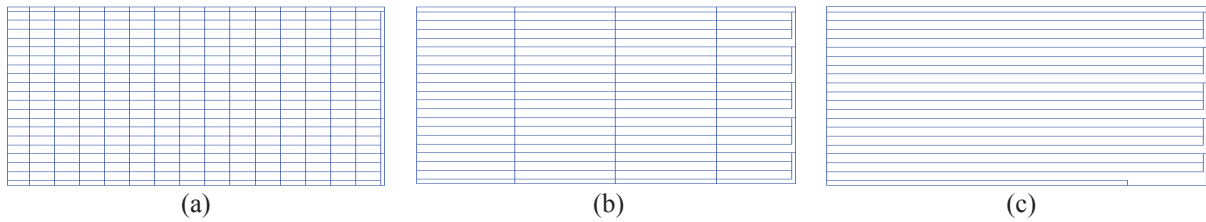


Figura 6.62 Malhas resultantes da utilização do esquema de aglomeração 7 com  
(a) 320 volumes, (b) 84 volumes e (c) 21 com volumes.

Inicialmente não era esperado que os esquemas 7 e 3 produzissem bons resultados pois estes representam coeficientes secundários<sup>13</sup> da matriz do volume de controle, porém como foi visto nas Figs. 6.61 e 6.62 a direção em que ocorreu a aglomeração das células (utilizando estes esquemas) é a direção do escoamento. Assim, as malhas grossas possuem o formato esperado.

Com esse exemplo, o capítulo de resultados é finalizado. No Cap. 7 serão discutidas as principais conclusões que foram obtidas com a realização desses testes.

---

<sup>13</sup> Considerando que os coeficientes principais da matriz do volume de controle são  $A^{uu}$ ,  $A^{vv}$ ,  $A^{pp}$ .

## CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES

### 7.1 Comentários

A principal contribuição deste trabalho, denominada aqui de global, foi a implementação do método Multigrid de Correções Aditivas com diversos esquemas de aglomeração adaptativa baseada nos coeficientes, juntamente com o método de Volumes Finitos baseado em Elementos com malhas não-estruturadas e com solução acoplada do sistema de equações. As equações são originadas de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos que, apresentam, portanto, não linearidades fortes. Ao longo dos desenvolvimentos diversas contribuições específicas e conclusões importantes foram obtidas. Estas são reunidas neste capítulo.

O método EbFVM mostrou-se bastante eficiente na solução acoplada das equações de Navier-Stokes bidimensionais e da conservação da massa, quando a função de interpolação *Suds* foi empregada, não apresentando problemas de convergência, mesmo com passos de tempo elevados, em todos os problemas testados. Por outro lado, a função *Suws* apresentou problemas de convergência para altos números de Reynolds no problema da cavidade com tampa móvel.

A utilização do método EbFVM dá origem a volumes de controle com um maior número de vizinhos, em função do uso das funções de forma definidas no elemento, e isso ajuda a precisão do método (Raw, 1985; Maliska, 2004). No caso de malhas cartesianas em 2D tem-se um arranjo de cinco volumes para o método dos volumes finitos tradicional, enquanto que para o EbFVM têm-se nove. Este arranjo repete-se para outros tipos de malhas, mesmo não estruturadas, quando quadriláteros são usados. Quando o método Multigrid de Correções Aditivas é aplicado, este fato acaba por influenciar no esquema de aglomeração, visto que agora têm-se um maior número de volumes vizinhos a considerar. Assim, volumes que tem conexão somente pelo vértice e não necessariamente pela face podem ser aglomerados.

Quanto às vantagens da utilização do método multigrid com aglomeração adaptativa foi mostrado, também, que o desempenho de *solvers* iterativos decai quando os coeficientes da matriz de equações são anisotrópicos ou o número de equações a serem resolvidas é muito grande. Por isso é desejável um esquema de aglomeração que una as células de forma a

reduzir as diferenças entre as menores e maiores escalas de tempo de transporte de informação e assim, otimize o processo.

No decorrer deste trabalho foi comprovado, traçando as retas de tendência, que o esforço computacional do método ACM cresce linearmente com o tamanho da malha, sendo, assim, um método de primeira ordem. Em alguns casos o expoente da reta de regressão ficou em torno de  $0,9$  até  $1,2$  (não exatamente  $1$ ), porém essas variações podem ser interpretadas como ajustes de parâmetros não precisos ou mesmo devido ao fato de como são construídas as malhas. A ordem como os nós estão dispostos vai afetar a forma final que as malhas grossas possuem, pois a ordem em que são escolhidas as células que iniciam cada novo bloco grosseiro depende da ordenação dos nós na malha original. Assim podem “sobrar” volumes nos cantos e modificar a estrutura final da malha grossa gerada.

De forma geral foi construído um *solver* bastante eficiente para a solução de problemas de escoamentos, cujas principais características serão citadas no item contribuições apresentado abaixo.

## 7.2 Contribuições específicas

Dentre os objetivos propostos, uma das contribuições desta tese diz respeito à realização de testes com os novos esquemas de aglomeração, visto que na literatura somente o coeficiente da variável pressão na equação de conservação da massa é mencionado. Assim foram concebidos quinze critérios possíveis para efetuar a aglomeração. Os nove critérios inicialmente propostos vêm da própria matriz do volume de controle, são os nove coeficientes que estão presentes quando um sistema de três equações (Navier-Stokes nas direções  $x$  e  $y$  e conservação da massa) é aproximado de modo a originar um sistema de equações acopladas. Quanto aos outros seis esquemas, estes foram concebidos levando em conta de que forma pode-se encontrar um valor característico que represente bem a matriz de coeficientes. Optou-se por utilizar diferentes tipos de normas, o determinante e o traço da matriz a fim de tentar obter este valor característico. Conforme visto nos exemplos apresentados no Cap. 6, o desempenho de cada um dos esquemas além de depender do problema considerado, depende também do tipo de malha utilizada: cartesiana ou não-cartesiana, igualmente espaçada ou com razão de aspecto diferente de 1. Várias alternativas apresentaram bons resultados. No caso da cavidade com tampa móvel pode-se citar os esquemas: 1, 9, 10, 11, 12 e 15.

No caso do escoamento entre placas paralelas, os esquemas que apresentaram os melhores resultados foram os esquemas 3, 7 e 1. O fato dos esquemas 3 e 7 apresentarem bons resultados não era esperado, pois o esquema 3 representa o coeficiente da variável pressão na



equação de conservação da quantidade de movimento linear na direção  $x$  e o esquema 7 o coeficiente da velocidade  $u$  na equação de conservação da massa. Esses dois coeficientes não representam as variáveis “principais” das duas equações citadas, porém analisando as Figs. 6.54 e 6.55 (obtidas a partir da aplicação desses dois esquemas e mostradas no Cap. 6) pode-se ver que a aglomeração ocorreu na direção do escoamento, direção do eixo  $x$ , como esperado.

Devido ao fato acima mencionado, de que vários esquemas apresentaram bons resultados, dependentes do tipo de problema analisado, não foi possível eleger um esquema como “o melhor” e sim ressaltar a possibilidade de utilização de diferentes formas para se efetuar a aglomeração, buscando sempre obter uma configuração de parâmetros ideal para um maior número de problemas, ou pelo menos para uma determinada classe de problemas.

Cabe citar também como contribuição desse trabalho todo o conjunto de testes efetuados, como as comparações entre as formas de aglomeração (adaptativa e geométrica), entre os três ciclos multigrid (V, W e F), entre os *solvers* internos do método ACM (Gauss-Seidel e ILU) e o número de iterações que propiciam os melhores resultados, sobre o número de volumes que devem ser utilizados para originar um novo volume de controle da malha grossa e quando realizar a aglomeração, se somente no início do processo ou toda a vez que a matriz de coeficientes é atualizada. À medida que esses testes foram realizados algumas conclusões relevantes foram obtidas, entre elas:

- Nos problemas de condução de calor foram testadas as formas de aglomeração por coeficientes (adaptativa) e geométrica. A aglomeração adaptativa mostrou melhores resultados na maioria dos problemas considerados, podendo-se concluir, também, que quanto mais anisotrópicos forem os coeficientes do problema, maiores as vantagens da sua aplicação.
- A respeito dos ciclos do acelerador multigrid, foram testados os três ciclos, V, W e F, e o ciclo W mostrou ter o melhor desempenho na maioria dos problemas. Somente em alguns testes realizados, o ciclo W obteve um desempenho um pouco inferior aos outros ciclos, V e F, mas mesmo nesses casos o ciclo W sempre apresentou bons resultados. Assim, com base nos testes aqui realizados a configuração do ciclo W, que efetua a maior parte do “trabalho” de solução dos sistemas lineares nos níveis de malhas mais grossas, mostrou ser a melhor opção para resolução dos vários níveis de sistemas lineares definidos para cada problema.
- Quanto ao uso do *solver* interno do método ACM, o ILU mostrou-se mais robusto do que o Gauss-Seidel necessitando de um menor número de iterações e obtendo a convergência nos casos em que o Gauss-Seidel falhou, fato já esperado pela natureza

dos dois métodos. Em alguns casos específicos como o problema da cavidade com tampa móvel com número de Reynolds baixo ( $Re = 100$ ), Gauss-Seidel mostrou um desempenho melhor do que o ILU. Neste trabalho, porém, busca-se um *solver* que seja capaz de obter um bom desempenho no maior número de casos e, quando o número de Reynolds é mais alto, como no problema da cavidade com tampa móvel com número de Reynolds igual a 1000, por exemplo, o *solver* Gauss-Seidel falha. Ainda, ressaltando a questão do número de iterações para o *solver* interno ILU, poucas iterações, de cinco a dez, são suficientes para obter a convergência do sistema linear. Cabe observar que dependendo do problema considerado, o número de iterações ILU necessita ser maior: 30, 40 ou mais iterações (conforme mostrado no problema 3 apresentado no Cap. 6). Porém mesmo assim esse número é inferior à quantidade de iterações “ótimas” do *solver* Gauss-Seidel utilizado na resolução do mesmo problema.

- Quanto à questão da quantidade de volumes de um determinado nível de malha que serão utilizados para dar origem a um novo volume de controle de uma malha mais grossa, nos casos testados a aglomeração utilizando quatro volumes apresentou os melhores resultados em termos de tempo de computação.
- O fato de efetuar-se o procedimento de aglomeração somente uma vez durante a resolução de todo o problema mostrou-se melhor do que efetuar o procedimento a cada vez que a matriz de coeficientes é modificada. Isso ocorre porque depois de efetuada a aglomeração é necessário criar os vetores auxiliares dos níveis aglomerados e gerar os sistemas lineares associados, o que demanda um tempo de computação considerável e sua realização a cada vez que o sistema linear é modificado acaba por acrescer o tempo de computação de forma desnecessária.

### 7.3 Trabalhos futuros

Com este trabalho foi possível verificar algumas características importantes do método ACM. É porém, necessário um estudo exaustivo de parâmetros para conhecê-lo mais profundamente e promover as alterações para torná-lo um *solver* mais eficiente e robusto.

Dentre os tópicos que merecem mais atenção está o fato de que, em se tratando de problemas não lineares, o procedimento de aglomeração realizado somente no início do processo apresentou melhores resultados do que se realizado a cada vez que o sistema linear é modificado. Isto indica que, apesar da aglomeração realizada várias vezes gerar os sistemas lineares mais adequados a serem resolvidos pelos *solvers* internos do método ACM, a realização do procedimento de aglomeração (com os procedimentos complementares

envolvidos, como: criação dos vetores auxiliares e geração dos sistemas lineares associados) acresce excessivamente o tempo de computação, o que acaba por não compensar no tempo final de solução do problema. A criação de um procedimento onde é verificado se o sistema linear sofreu modificações relevantes talvez seja uma opção interessante. Assim, a aglomeração seria realizada somente algumas vezes no decorrer do processo de solução. Porém, a execução de um procedimento para a verificação de mudanças sofridas pelo sistema linear também incorre no acréscimo do tempo de computação. Dependendo de como esse procedimento é feito, também pode tornar-se inviável. Outra alternativa seria definir a realização da aglomeração a cada  $n$ -vezes que o sistema linear é modificado.

Outro ponto interessante seria a execução de testes com outros *solvers* iterativos como *solvers* internos do método ACM.

A forma como é realizada a aglomeração também merece uma atenção especial. O formato utilizado neste trabalho foi obtido por meio de diversos testes, porém algumas otimizações ainda podem ser pensadas e realizadas. Uma delas diz respeito ao que ocorre com os volumes dos contornos, que possuem dimensões de “1/4” de volume nos cantos e “1/2” de volume nos lados, o que é mais facilmente visualizado em se tratando de malhas cartesianas. Dependendo da ordem como os nós aparecem dispostos na malha, chega-se ao final do procedimento de aglomeração com esses volumes dos contornos sem muitas opções de volumes vizinhos livres com os quais possam ser aglomerados. Assim, esses volumes acabam por ficar com dimensões bem menores do que o restante dos volumes da nova malha grossa. Um tratamento diferenciado poderia ser dado aos volumes dos contornos a fim de testar se esse fator implicaria em uma melhora na solução geral do problema.

Outro fator que poderia ser testado diz respeito às regras de aglomeração. Nestas, as conexões entre os volumes vizinhos são comparadas sempre por um fator de  $1/2$ . A primeira regra diz que a conexão do “possível filho” com o “pai” deve ser maior ou igual à conexão do “possível filho” com o “avô” multiplicada por  $1/2$  e a segunda regra diz que o coeficiente que conecta “possível filho” o com o “pai” deve ser maior ou igual a  $1/2$  do coeficiente que conecta o “possível filho” com seu “melhor vizinho” conforme pode ser visto nas Eqs. (4.12) e (4.13). No lugar de  $1/2$  poderia ser testado outro fator como  $1/3$ , por exemplo. A alteração desse critério modificaria o formato das malhas aglomeradas uma vez que a limitação gerada pelo fator seria menor. Assim, pode-se variar o grau de exigência para possibilitar diferentes formas de aglomeração das células.

A extensão do problema de 2D para 3D para estes esquemas de aglomeração também apresenta-se como uma possibilidade de trabalho futuro. No caso do EbFVM seria necessária a inclusão de mais uma equação, a da conservação da quantidade de movimento linear na

direção  $z$ . Com a utilização do sistema acoplado, a matriz de coeficientes para o volume de controle resultaria em uma matriz com  $4 \times 4$  coeficientes. O multigrid quase não sofreria modificações, somente no que diz respeito aos esquemas de aglomeração seria necessária a inclusão dos novos coeficientes também como possíveis esquemas de aglomeração.

De forma geral o código do método ACM foi escrito de forma a trabalhar com sistemas de uma equação e de duas ou mais equações, sendo o número de equações somente um parâmetro de entrada. Essa generalidade utilizada na implementação do método ACM permite que ele seja aplicado a diferentes tipos de problemas sem necessitar de grandes ajustes, mas somente da modificação de alguns parâmetros.

Com essas observações finaliza-se a apresentação desse trabalho. O Método de Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) comprovou ser um método robusto para a aproximação de um conjunto de equações acopladas em malhas não-estruturadas. O método Multigrid de Correções Aditivas apresentou um ganho considerável de tempo de computação sendo utilizado na resolução tanto de problemas lineares como não-lineares, confirmando sua flexibilidade em diferentes tipos de problemas. Juntos, o EbFVM com o método ACM dão origem a um simulador bastante eficiente e robusto, o qual pode ser aplicado à solução de problemas de escoamento. Neste trabalho foram efetuados testes em problemas simples, a fim de testar e ajustar os parâmetros do método, porém o objetivo do desenvolvimento deste simulador é sua aplicação a problemas complexos de escoamentos de fluidos e transferência de calor.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Armenio, V., An Improved MAC Method (SIMAC) for Unsteady High-Reynolds Free Surface Flows, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 24, pp. 185-214, 1997.
- Brandt A., Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems, **Mathematics of Computation**, vol 31, pp. 333-390, 1977.
- Briggs, W. L., Henson, V. E., McCormick, S. F., **A Multigrid Tutorial**, Society for Industrial and Applied Mathematics, EUA, 193p., 2000.
- Chan, T. F., Wan, W. L., Robust multigrid methods for nonsmooth coefficient elliptic linear systems, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Vol. 123, pp. 323-352, 2000.
- Cook, R., Malkus, D. S., Plesha, M. E., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, John Wiley e Sons Inc., New York, 630 p, 1989.
- Cordazzo, J., **Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método EbFVM e Multigrid Algébrico**, Tese de Doutorado, Florianópolis, SC, Brasil, 250 p, 2006.
- Duic, N., Schneider, D.R., Bogdan, Z., Sensitivity Analyses of Additive Correction Multigrid Method Applied to Furnace Modeling, **ITI '96. Proceedings of the 18th International Conference on Information Technology Interfaces**, 18-21 Junho, Pula, Croatia, p.383-91, 1996.
- Elias, S. R., **Enhancements to Additive Correction Multigrid**, Master thesis, Waterloo, Ontario, Canada, 146 p, 1993.
- Elias, S.R., Stubbley, G.D., Raithby, G.D., An Adaptive Agglomeration Scheme for Additive Correction Multigrid, **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 4 (5), pp. 887-903, 1997.

- Ferziger, J. H., Peric, M., **Computational Methods for Fluid Dynamics**, Springer, Berlin, Alemanha, 356 p, 1996.
- Francescato, J., Dervieux, A., A Semi-Coarsening Strategy for Unstructured Multigrid based on Agglomeration, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 26, pp. 927-957, 1998.
- Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, **Journal of Computational Physics**, v. 48, pp. 387-411, 1982.
- Gjesdal, T., A Note on the Additive Correction Multigrid Method, **International Communication in Heat and Mass Transfer**, Vol. 23, pp. 293-298, 1996.
- Ham, F. E., Lien, F. S., Strong, A. B., A Cartesian Grid Method with Transient Anisotropic Adaptation, **Journal of Computational Physics**, Vol. 179, pp. 469-494, 2002.
- Heindel, T. J., Incropera, F. P., Ramadhyani, S., Conjugate Natural Convection from an Array of Discrete Heat Sources: Part 2 – A Numerical Parametric Study, **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Vol. 16, pp. 511-518, 1995.
- Hu, Y., Bogy, D. B., Solution of the Rarefied Gas Lubrification using an Additive Correction based Multigrid Control Volume Method, **Journal of Tribology**, Vol. 120, pp. 280-288, 1998.
- Hughes, T. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**, Prentice Hall, New Jersey, 682p, 1987.
- Hutchinson, B. R., Raithby, A Multigrid Method based on the Additive Correction Strategy, **Numerical Heat Transfer**, Vol. 9, pp. 511-537, 1986.
- Hutchinson, B. R., Galpin, P. F., Raithby, G.D., Application of Additive Correction Multigrid to the Coupled Fluid Flow Equations, **Numerical Heat Transfer**, vol. 13, pp. 133-147, 1988.

- Hwang, Y. H., Unstructured Additive Correction Multigrid Method for the Solution of Matrix Equations, **Numerical Heat Transfer**, Part. B, Vol. 27, p. 195-212, 1995.
- Jameson, A., A perspective on Computational Algorithms for Aerodynamic Analysis and Design, **Progress in Aerospace Sciences** 37, pp.197-243, 2001.
- Keller, S. C., Cordazzo, J., Hinckel, P. H., Maliska, C. R., The Additive Correction Multigrid Method for Unstructured Grids, **CILAMCE – XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 10-12 de Novembro, Recife, Pernambuco, Brazil, 2004.
- Keller, S. C., Cordazzo, J., Hinckel, P. H., Maliska, C. R., Additive Correction Multigrid Method Applied to Diffusion Problems with Unstructured Grids, **ENCIT – 10<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences**, 29 de Novembro - 3 de Dezembro, Rio de Janeiro, Brazil, 2004.
- Maliska, C. R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**, Ed. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 453 p, 2004.
- Maliska, C. R., A General View of Constructing Finite Volume Methodologies for Fluid Flow Simulations, **III Escola de Primavera de Transição e Turbulência**, 23-27 de Setembro, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2002.
- Marthur, S. R., Murthy, J. Y., A Pressure-based Method for Unstructured Meshes, **Numerical Heat Transfer**, Part. B, Vol. 31, pp. 195-215, 1997.
- Mavriplis, D. J., Multigrid Solution of the Two-dimensional Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes, **AIAA Journal**, Vol. 26, N° 7, pp. 824-831, 1987.
- McCormick, S. et al., **Multigrid Methods**, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 282 p, 1987.
- Nobile, E., Simulation of Time Dependent Flow in Cavities with the Additive-Correction Multigrid Method, Part I: Mathematical Formulation, **Numerical Heat Transfer**, Part B, Vol. 30, pp 341-350, 1996.

- Nobile, E., Simulation of Time Dependent Flow in Cavities with the Additive-Correction Multigrid Method, Part II: Applications, **Numerical Heat Transfer**, Part B, Vol. 30, pp 351-370, 1996.
- Perez-Segarra, C. D. , Farre, C., Soria, M., Cadafalch, J., Analysis of different numerical schemes for the resolution of convection-diffusion equations using finite volume methods on unstructured grids, AIAA Paper, **42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**, 5-8 Janeiro Reno, NV, EUA, p. 2485-2495, 2004.
- Phillips, R. E., Schmidt, F. W., Multigrid Techniques for the Numerical Solution of the Diffusion Equation, **Numerical Heat Transfer**, Vol. 7, pp 251-268, 1984.
- Raw, M. J., **A New Control-Volume-Based Finite Element Procedure for the Numerical Solution of the Fluid Flow and Scalar Transport Equations**, Doctor thesis, Waterloo, Ontario, Canada, 168 p., 1985.
- Raw, M. J., Robustness of Coupled Algebraic Multigrid for the Navier-Stokes Equations, AIAA 96-0297, **34<sup>th</sup> Aerospace and Sciences Meeting & Exhibit**, 15-18 de Janeiro, Reno, NV, 1996.
- Saad, Y., **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**, 2<sup>nd</sup> Ed., PWS Publishing Company, Boston, 447 p., 2000.
- Segayer, A. M., **Análise de Desempenho da Técnica de Multigrid em Problemas de Fenômenos do Transporte**, Dissertação de Mestrado, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 95 p., 1996.
- Settari, A., Aziz, K., A Generalization of Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations, **SIAM Journal of Numerical Analysis**, vol. 10, pp. 506-521, 1973.
- Souza, J. A., **Implementação De Um Método De Volumes Finitos Com Sistema De Coordenadas Locais para a Solução Acoplada das Equações de Navier-Stokes**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 98 p., 2000.



- Stüben, A., Algebraic Multigrid (AMG), An Introduction with Applications, **GMD-Report 70**, 1999.
- Stüben, A., A Review of Algebraic Multigrid, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Vol. 128, pp. 281–309, 2001.
- Teigland, R., On Some Variational Acceleration Techniques and Related Methods for Local Refinements, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 28, pp. 945-960, 1998.
- Trottenberg, U., Oosterlee, C., Schüller, A., **Multigrid**, Academic Press, Londres, Inglaterra, 631 p., 2001.
- Tzanos, C.P., Higher-Order Differencing Method with a Multigrid Approach for the Solution of the Incompressible Flow Equations at High Reynolds Numbers, **Numerical Heat Transfer, Part B**, Vol. 22, pp 179-198, 1992.
- Van Doormaal, J. P., Hutchinson, B. R., An Evaluation of Techniques used to Accelerate Segregated Methods for Predicting Viscous Fluid Flows, AIAA 86-1653, **22<sup>th</sup> Joint Propulsion Conference**, Junho, Huntsville, Alabama, 1986.
- Venkatakrisnan, V., Mavriplis, D. J., Implicit Method for the Computation of Unsteady Flows on Unstructured Grids, **Journal of Computational Physics**, Vol. 127, pp. 380-397, 1996.
- Völker, S., Burton, T., Vanka, S. P., Finite-Volume Multigrid Calculation of Natural-Convection Flows on Unstructured Grids, **Numerical Heat Transfer, Part B**, Vol. 30, pp 1-22, 1996.
- Wille, S. O., A local adapted Tri-Tree multigrid generator and iterative equation solver for mixed finite element formulation of the Navier-Stokes equations, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 131, pp. 109-132, 1996.

Zdravistch, F., Fletcher, C. A. J., Behnia, M, Convergence Acceleration of Segregated Algorithms using Dynamic Tuning Additive Correction Multigrid Strategy, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 29, p. 515-533, 1999.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Company, London, 648 p, 1989.

## APÊNDICE 1

### SOLVERS UTILIZADOS NO MÉTODO MULTIGRID DE CORREÇÕES ADITIVAS

De forma geral, os métodos numéricos (*solvers*) podem ser classificados em dois grandes tipos: diretos e iterativos. Os métodos diretos trabalham com a matriz completa, o que incorre em um esforço computacional bastante grande e por isso são somente aplicados em sistemas lineares relativamente pequenos. Já os métodos iterativos trabalham com matrizes esparsas e necessitam de uma estimativa inicial para dar andamento ao processo de obtenção da solução.

A escolha de qual método numérico (*solver*) será utilizado para resolver os sistemas lineares nos diferentes níveis de malha também é um importante foco de estudo no método multigrid. Na malha original (fina) são resolvidas as equações que descrevem o problema de escoamento e/ou transferência de calor e nas malhas grossas equações que geram correções para as variáveis principais. Assim, a solução precisa não é necessária nas malhas intermediárias, podendo somente com algumas iterações do *solver* obterem-se correções satisfatórias. Porém no último nível (malha mais grosseira) como o sistema linear a ser resolvido torna-se bastante pequeno é interessante iterar-se até a convergência ou utilizar um *solver* direto, a fim de obter-se a solução exata.

Neste trabalho optou-se pelo uso de um método direto, mais especificamente o método de Decomposição LU para resolver o sistema linear na malha mais grossa e nos outros níveis de malha foram testados dois métodos: Gauss – Seidel e Decomposição LU Incompleta. Estes três métodos são apresentados em maiores detalhes a seguir.

#### A1.1 Decomposição LU

A Decomposição LU consiste na decomposição de uma matriz A no produto de duas matrizes: L e U, onde L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior

$$[A] = [L][U] \quad (A1.1)$$

A matriz triangular superior U é obtida através do método de Eliminação Gaussiana e os elementos de L são os fatores multiplicativos usados no processo de eliminação (Ferziger, Peric, 1996).

Exemplificando o procedimento em uma matriz de ordem 3

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

e efetuando inicialmente as operações

$$\begin{aligned} m_{21} &= -a_{21} / a_{11} \\ m_{31} &= -a_{31} / a_{11} \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

e

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 + m_{21}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + m_{31}L_1 \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

e em uma segunda etapa

$$m_{32} = -a_{32} / a_{22} \quad (\text{A1.5})$$

e

$$L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2 \quad (\text{A1.6})$$

obtêm-se

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A1.7})$$

Considerando um sistema linear, pode-se escrever

$$[A][\phi] = [L][U][\phi] = [b], \quad (\text{A1.8})$$

o qual pode ser resolvido fazendo-se

$$[L][v] = [b] \quad (\text{A1.9})$$

e conhecendo  $v$  pode-se obter  $\phi$  através de

$$[U][\phi] = [v]. \quad (\text{A1.10})$$

A resolução do sistema linear fica decomposta na solução de dois sistemas triangulares: o primeiro, triangular inferior é resolvido por substituições progressivas e o segundo, triangular superior, é resolvido por substituições retroativas. O processo de resolução do método de decomposição LU é mostrado no fluxograma da Fig. A1.1.

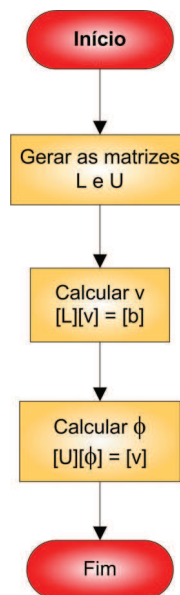


Figura A1.1 Fluxograma do processo iterativo do método de Decomposição LU.

## A1.2 Gauss-Seidel

Este método pertence à classe de métodos iterativos estacionários ou ponto a ponto, pois resolve o sistema linear de modo serial, iterativamente. Este tipo de método caracteriza-se por ser bastante lento na transmissão da informação advinda da condição de contorno e consequentemente lento também na obtenção da solução convergida. Porém, é de fácil implementação e, como nas malhas intermediárias necessita-se somente de uma solução

aproximada do sistema linear, é largamente utilizado como solver interno dos métodos multigrid. Como exemplo de métodos ponto a ponto pode-se citar ainda Jacobi e SOR entre outros (Maliska, 2005).

O método de Gauss-Seidel caracteriza-se por utilizar os valores das variáveis já calculadas no nível iterativo atual e os valores das variáveis que ainda não foram calculadas, no nível iterativo anterior. Considerando a incógnita a ser resolvida como  $\phi$ , tem-se a seguinte equação:

$$A_p^i \phi_i^{k+1} = \sum A_{nb}^i \phi_{nb}^{k+1} + \sum A_{nb}^i \phi_{nb}^k + b_i, \quad (\text{A1.11})$$

onde  $\phi_i^{k+1}$  representa o valor da variável a ser calculada,  $\phi_{nb}^{k+1}$  representa os valores já conhecidos neste nível iterativo e  $\phi_{nb}^k$  os valores conhecidos no nível iterativo anterior.

Neste trabalho optou-se por definir um número fixo de iterações para o *solver* em cada nível de malha ao invés de testar o resíduo a cada iteração.

O processo iterativo aparece resumido no fluxograma da Fig. A1.2.

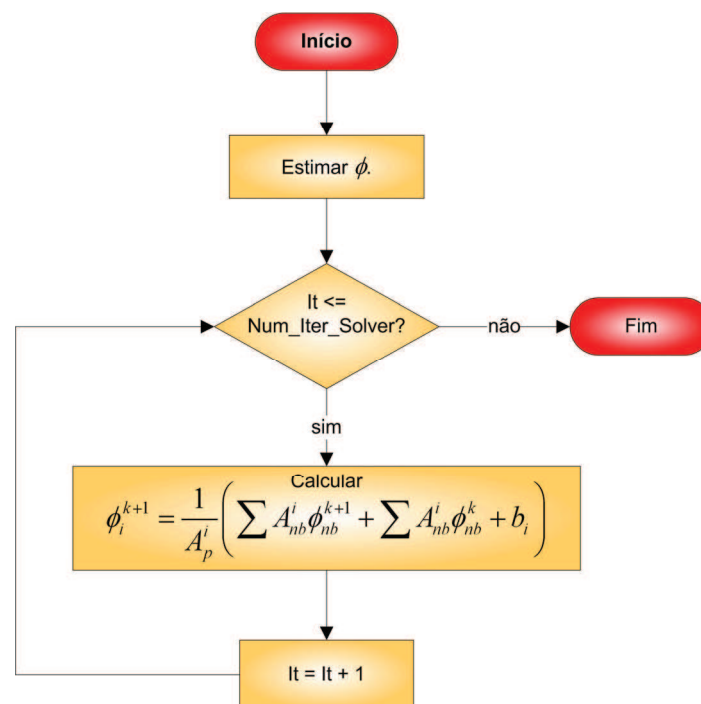


Figura A1.2 Fluxograma do processo iterativo do método Gauss-Seidel.

### A1.3 Decomposição LU Incompleta

O método de decomposição LU apresenta certas desvantagens devido ao fato de trabalhar com a matriz cheia, e assim não tirar proveito da esparsidade da matriz nas operações e no armazenamento. Assim, surge a idéia do LU incompleto ou ILU onde obtém-se uma matriz próxima a original, armazenando e trabalhando somente com os elementos não-nulos e resolvendo iterativamente o sistema linear. Partindo de um sistema linear

$$[A][\phi] = [b] \quad (\text{A1.12})$$

onde

$$[L][U] = [A] + [A'] \quad (\text{A1.13})$$

Se a decomposição LU originasse a matriz  $A$ , o método seria direto, mas como é criada uma matriz  $A'$ , o método é iterativo e possui a seguinte fórmula

$$[A + A'][\phi]^{k+1} = [A + A'][\phi]^k - \{[A][\phi]^k - [b]\}. \quad (\text{A1.14})$$

Quando a solução convergida é obtida, o segundo termo do lado direito da Eq. (A1.14) se anula resultando em  $\phi^{k+1} = \phi^k$ .

Em se tratando de um método iterativo, define-se uma correção para  $\phi$

$$[\delta]^{k+1} = [\phi]^{k+1} - [\phi]^k, \quad (\text{A1.15})$$

e o resíduo da solução

$$[r]^k = [A][\phi]^k - [b]. \quad (\text{A1.16})$$

Substituindo as Eqs. (A1.15) e (A1.16) na Eq. (A1.14) obtém-se

$$[A + A'][\delta]^{k+1} = -[r]^k. \quad (\text{A1.17})$$

Substituindo, ainda a Eq. (A1.13) na Eq. (A1.17) resulta em

$$[L][U][\delta]^{k+1} = -[r]^k. \quad (\text{A1.18})$$

A solução é obtida por meio de dois processos de substituições sucessivas, uma vez que as matrizes L e U são matrizes triangulares, inferior e superior, respectivamente. Assim, definindo um novo vetor  $v$  temos

$$[L][v] = -[r]^k \quad (\text{A1.19})$$

e conhecendo  $v$  pode-se obter  $\delta$  através de

$$[U][\delta]^{k+1} = [v]^k. \quad (\text{A1.20})$$

Assim,  $\phi$  é atualizado da seguinte forma

$$[\phi]^{k+1} = [\phi]^k + [\delta]^{k+1}. \quad (\text{A1.21})$$

O resíduo novamente é calculado através da Eq. (A1.16) e o processo iterativo segue até que um número fixo de iterações seja alcançado ou que o resíduo seja menor do que uma tolerância especificada.

No ILU, utilizado neste trabalho, o processo de reconstrução das matrizes L e U utiliza somente os valores não nulos. Assim, em se tratando do armazenamento de dados da matriz de forma esparsa, não há necessidade de se criar novas posições para armazenamento de novos valores que antes eram nulos. As matrizes L e U obtidas não são as matrizes triangulares completas. Este tipo de solver surge como uma boa alternativa para a resolução de sistemas lineares relativamente grandes, uma vez que se trata de um método iterativo que atualiza todas as variáveis ao mesmo tempo possuindo uma alta taxa de convergência.

O processo iterativo do método ILU como foi implementado neste trabalho aparece resumidamente no fluxograma da Fig. A1.3.



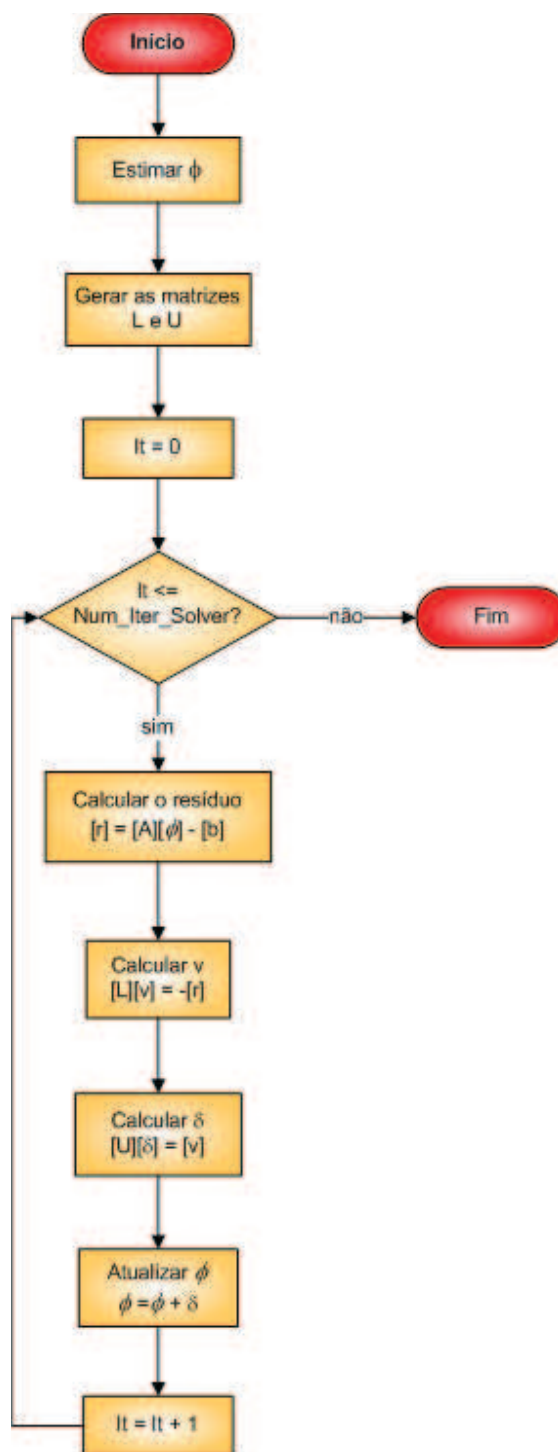


Figura A1.3 Fluxograma do processo iterativo do método ILU.

#### A1.4 GMRES (*Generalized Minimum Residual*)

O *solver* GMRES foi utilizado neste trabalho para efetuar uma comparação com o método Multigrid de Correções Aditivas na solução do problema da cavidade com tampa móvel e do escoamento entre placas paralelas. O GMRES foi escolhido por ser um método robusto e bastante utilizado na literatura (SAAD, 2000).

Em linhas gerais o método GMRES caracteriza-se por gerar uma seqüência de vetores ortogonais. Entretanto, quando a matriz não é simétrica, todos os vetores ortogonais gerados nas iterações anteriores precisam ser armazenados e desse modo o método costuma exigir *restarts* (passos nos quais jogam-se fora os vetores ortogonais antigos) para que o consumo de memória não seja excessivo.

A versão aqui utilizada não foi desenvolvida neste trabalho, ela pertence à biblioteca COI-lib e foi baseada nos algoritmos da biblioteca ITL - *The Iterative Template Library*, que disponibiliza métodos iterativos para a solução de sistemas lineares.

Foram usados (no *solver* GMRES) os parâmetros *default* presentes na biblioteca COI-lib, não tendo sido feito um estudo acerca destes parâmetros. Foram eles: como pré-condicionador foi usado o SSOR, o número de restarts foi feito igual a 1000, o número de iterações igual a 8000, a tolerância relativa igual a  $10^{-10}$  e tolerância absoluta igual a  $10^{-50}$ .

## APÊNDICE 2

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O método Multigrid de Correções Aditivas foi implementado na linguagem de programação C++ utilizando o conceito de orientação ao objeto.

A idéia principal usada na implementação deste *solver* é que cada um dos níveis de malha seja um objeto composto de matrizes, vetores e escalares. Assim, cada nível terá a sua própria matriz de coeficientes (no formato comprimido), seu vetor de termos independentes e seu vetor solução. Além disso, cada objeto possui ainda seu vetor *coarse*. Este é o vetor obtido após a aplicação das regras de aglomeração e, com base nas informações nele contidas, é construída a matriz de coeficientes do nível grosseiro imediatamente inferior bem como o vetor de termos independentes.

O *solver* multigrid foi desenvolvido para resolver sistemas de uma equação ou de mais equações. No caso de duas ou mais equações acopladas (conforme tratado no Cap. 3, item 3.2.1) o procedimento para a formação de cada sistema linear (de cada malha grossa) é feito de forma a se obter sistemas "bloqueados", os quais, após a obtenção dos coeficientes, são novamente "abertos" em uma grande matriz, o mesmo ocorrendo para os vetores do termo fonte e das incógnitas. Assim um sistema linear é resolvido em cada nível de malha.

Para a implementação do método Multigrid de Correções Aditivas, quatro classes fundamentais foram construídas, sendo todos os seus atributos declarados como públicos de forma que o acesso a todos os atributos e métodos membros seja possível em cada trecho do código. As classes implementadas foram:

- Classe *IMultigrid*: responsável pela entrada de dados e pelo gerenciamento dos ciclos.
- Classe *unit*: é a estrutura de dados que representa os níveis não bloqueados, onde cada objeto desta classe representa uma malha, da mais refinada à mais grosseira.
- Classe *unit2*: possui as variáveis que compõe os níveis para sistemas bloqueados, onde suas variáveis estão no formato comprimido referenciando-se aos blocos. Assim como na anterior, cada objeto desta classe representa uma malha, que vai da mais refinada à mais grosseira.
- Classe *solver*: utilizada somente para a solução de sistemas bloqueados. Suas variáveis estão no formato de linha comprimida, assim como as variáveis da classe *unit*.

Além dessas classes principais foram utilizadas outras duas classes: Matrix e ITimer. A primeira é responsável pela criação de matrizes com alocação dinâmica. Já a segunda classe é responsável por cronometrar o tempo computacional dos processos do Multigrid.

### A2.1 Criação do objeto e chamada ao Multigrid

Para o uso do multigrid, é necessário que se crie um objeto da classe IMultigrid no programa inicializando, no construtor da classe, as características do multigrid listadas abaixo:

```

Aglom_Y_N    = ; //decide aglomerar:[1]sim [0]não
GravCoarse   = ; //vai gravar os coarse:[1]sim [0]não
LerArq       = ; //vai ler o coarse de arquivo:[1]sim [0]não
NumMaxCycles = ; //numero máximo de ciclos
NumCellsDirSolver= ; //numero máximo de células para o solver direto
NumLevel     = ; //quantidade de níveis de malha
NumIter      = ; //numero de iterações do solver iterativo
NumCellsBlock = ; //numero de células por bloco grosseiro
Solverbase   = ; //tipo de solver-base = "GS" ou "ILU(0)"

```

Estes valores também podem ser lidos de um arquivo de dados editado pelo usuário juntamente com outros dados que podem ser definidos, como: número de níveis de malha, tipo de aglomeração utilizada (1 a 15) e resíduo máximo aceito na solução.

### A2.2 Identificação do número de equações e chamadas às principais funções

Após a inicialização das variáveis que indicam as características do multigrid, explicadas no trecho acima, serem devidamente inicializadas chama-se a função `template Tacm<unit>()` ou `Tacm<unit2>()`, de acordo com o número de equações do sistema. Ela é a responsável por identificar se o sistema é bloqueado ou não e também é responsável pela chamada de funções para a geração dos níveis e pelas funções que resolverão o sistema linear.

#### A2.2.1 Determinação da quantidade de níveis

Para se saber quantos níveis haverá no sistema, a função `NumberOfLevels()` baseia-se na ordem do sistema, ou seja, na dimensão do vetor dos termos independentes. Assim, quanto maior essa ordem, maior a quantidade de níveis a serem gerados. Porém pode-se optar por

definir o número de níveis manualmente lendo do arquivo de dados editado pelo usuário (citado anteriormente). Então o vetor que contém os níveis de malhas é dimensionado com o valor do número de níveis, passando-se, então, à geração dos níveis.

### **A2.2.2 Geração do nível zero e chamada à geração dos níveis grosseiros**

Logo após o cálculo da quantidade de níveis, a função `GenerateLevels<type>()` é chamada saindo do escopo da função atual para que o nível zero e os demais sejam gerados.

Antes que a geração dos níveis grosseiros inicie é necessário que o nível zero seja inicializado com os dados do sistema linear obtido a partir da malha fina.

Então, se for decidido aglomerar ou o mesmo ainda não foi feito, as funções `template` de geração dos vetores auxiliares e da matriz de conexões são chamadas. Ao retornar, é feito um laço sobre os níveis grosseiros a fim de gerar todas as variáveis desses níveis e gerar as aglomerações necessárias. Feito isso encerra-se a geração de todos os níveis, restando apenas a resolução do sistema linear com o ciclo escolhido pelo usuário: V, W ou F .

Porém, caso a opção esteja para não aglomerar (`Aglom_Y_N=0`), a geração dos níveis grosseiros é realizada apenas uma vez no decorrer do programa. Se isso ocorrer será, então, chamada diretamente uma função que é responsável apenas por redeterminar os sistemas lineares de cada um dos níveis. Após feito isso, novamente é aplicado o ciclo escolhido pelo usuário. Esses passos estão ilustrados no fluxograma apresentado na Fig. A2.1.

Voltando a questão de quando um nível é inicializado, tem-se que diversos vetores auxiliares são gerados para o tratamento das matrizes esparsas. Entre eles destacam-se:

- vetor com o índice do elemento da diagonal principal de cada linha;
- vetor que contém o índice do primeiro elemento de cada linha;
- vetor que contém o número de elementos de cada coluna;
- vetor que contém o número acumulado de elementos por coluna;
- vetor que indica o bloco no qual cada volume estará contido;
- vetor com o índice de todos os elementos ordenados por coluna;

Após a criação desses vetores retorna-se para a função de geração dos níveis, sendo chamada logo em seguida uma função que determina os vizinhos de cada volume de controle do nível zero e a matriz que indica as conexões entre estes volumes.

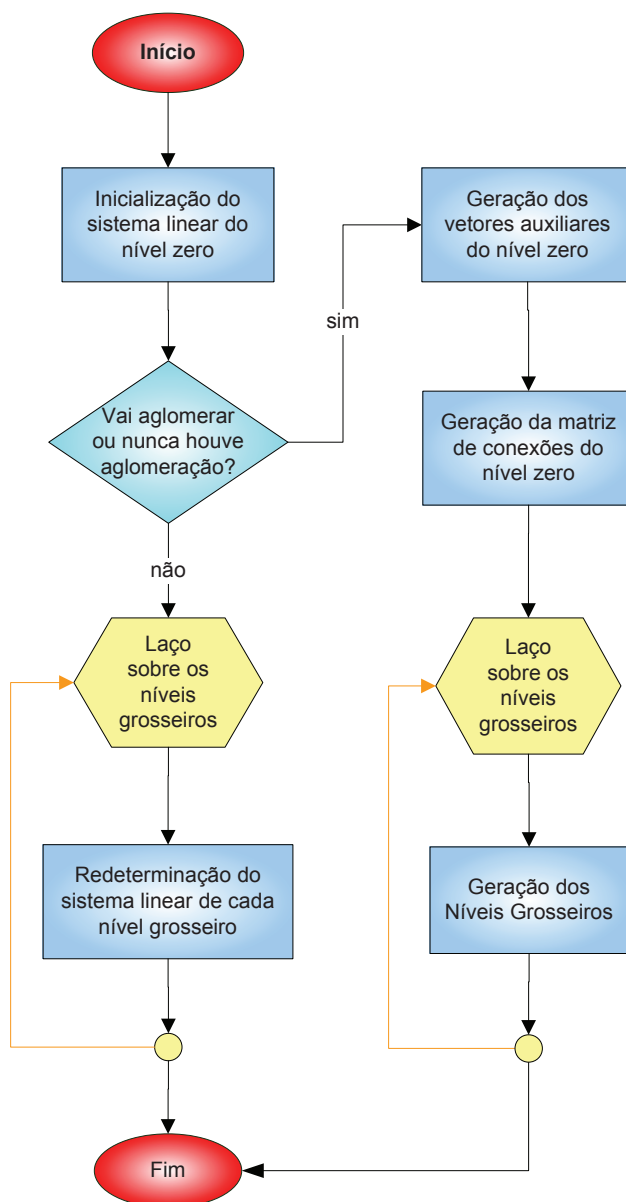


Figura A2.1 Fluxograma que representa a geração do nível zero e a chamada à geração dos níveis grosseiros.

### A2.2.2.1 Laço para a geração dos níveis grosseiros

Através da função newgen() cria-se cada um dos níveis de malha, utilizando para isso um laço do primeiro ao último nível e passando como argumentos o nível atual, já existente, e o nível logo abaixo dele a ser gerado. O procedimento utilizado para a criação de um nível de malha é exemplificado no fluxograma da Fig. A2.2.

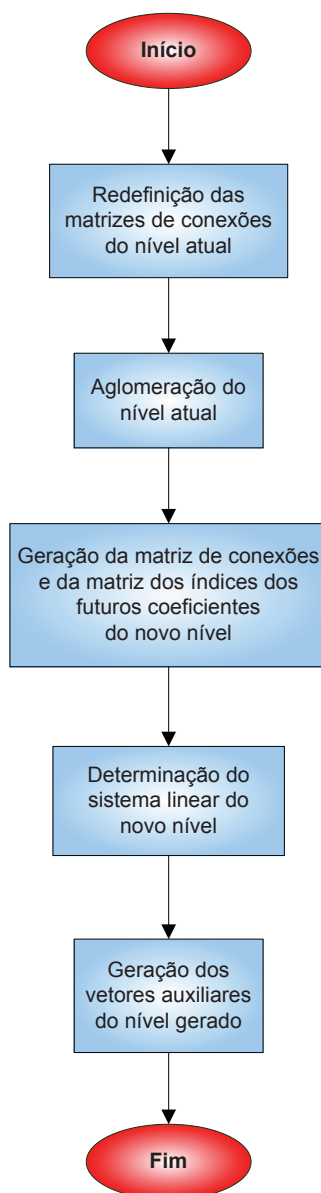


Figura A2.2 Fluxograma explicativo do laço executado para a geração dos níveis grosseiros.

- **Redefinição das matrizes de conexões do nível atual**

Nesse trecho é criada a variável *size*, que contém o valor dos coeficientes de conexão entre os volumes.

- **Aglomeración do nível atual**

Ao voltar para a função `newgen()`, deve-se agora optar em ler do arquivo ou construir o vetor *coarse*. Caso opte-se em construí-lo parte-se para a função `agglomerate<unit>()`, onde ocorrerá a aglomeração (mais detalhes podem ser vistos no Cap. 4). Portanto, depois de realizada a aglomeração é retornado um inteiro que representa a quantidade de blocos gerados. No próximo passo determina-se quem são os vizinhos de cada bloco.

- **Geração da matriz de conexões e da matriz dos índices dos futuros coeficientes do novo nível**

A primeira variável do nível a ser determinada é a que indica quais são os blocos vizinhos de cada bloco. Para isso utiliza-se o vetor *coarse* do nível anterior, criado no processo de aglomeração.

- **Determinação do sistema linear do novo nível**

Como foi visto no capítulo 3, para a resolução dos sistemas lineares nos níveis grosseiros e conseqüentemente para a obtenção da correção  $\phi^*$ , a seguinte equação deve ser resolvida:

$$A_p^* \phi_p^* = \sum_{nb} A_{NB}^* \phi_{NB}^* + b_p^*, \quad (\text{A2.1})$$

onde

$$A_p^* = \sum_{i,I} A_p^i - \sum A_{nb}^i, \quad (\text{A2.2})$$

$$A_{NB}^* = \sum_{i,I} A_{nb}^i. \quad (\text{A2.3})$$

Assim  $\sum A_{nb}^i$  representa a conexão entre os volumes dentro do mesmo bloco  $I$  e  $\sum_{i,I} A_{nb}^i$  representa a conexão com os volumes que situam-se nos blocos  $I$  vizinhos.

A resolução do sistema de equações representado pela Eq. (A2.1) fornecerá as correções que serão somadas à solução da malha fina. Porém isso é feito mais adiante no código.

A partir de agora os blocos são tratados da mesma forma como foram tratados os volumes do nível zero, ou seja, a resolução do sistema linear para todos os níveis grosseiros se dá da mesma forma como foi feita a resolução do sistema linear na malha fina.

O próximo passo é a criação dos vetores auxiliares deste nível, que são usados para possíveis novas aglomerações e a resolução dos sistemas lineares.



- **Geração dos vetores auxiliares do nível gerado**

Chama-se novamente a função `GenerAuxVector<type>()`, porém agora para o nível que foi recém criado. Portanto o processo é idêntico ao comentado no item 2.2.

Com isso, retorna-se para a função `newgen()` (item 2.2.1) e, em seguida, sai-se do escopo desta retornando ao laço da função de geração dos níveis. Caso existam novos níveis a serem gerados, chama-se novamente a função `newgen()`, agora passando como argumentos o nível recém criado e o próximo a ser criado até que todos os níveis desejados sejam gerados.

Após a criação dos novos níveis de malha, só resta a resolução dos sistemas lineares. Retorna-se, portanto, para a função `Tacm<type>()` onde o ciclo desejado deverá ser escolhido.

### **A2.2.3 Resolução do ciclo**

Ao retornar da geração dos níveis é acionada a função referente ao ciclo escolhido pelo usuário, a fim de resolver o sistema até que a solução convirja ou um número máximo de ciclos seja atingido. O processo de solução constitui-se dos seguintes passos:

#### **A2.2.3.1 Transferência da informação dos níveis inferiores aos superiores**

Para a transferência de informações da malha mais refinada à mais grosseira a função `compactb()` é utilizada. Nessa função determinam-se os valores do vetor  $b$  de cada nível, a partir dos resíduos dos volumes do nível anterior (mais fino) que fazem parte do mesmo bloco, conforme equação abaixo:

$$b_p^* = \sum_{i,l} r_i. \quad (\text{A2.4})$$

onde  $i$  representa os volumes do nível anterior (mais fino). Após a definição do vetor  $b$  parte-se para a solução do sistema linear.

#### **A2.2.3.2 Solução do sistema linear**

A solução do sistema linear no nível de malha mais grossa é feito pelo uso do método direto de fatoração LU. Nos outros níveis de malha utiliza-se os solvers iterativos Gauss-Seidel ou ILU conforme determinação do usuário. O próximo passo é a transferência de informação do nível de malha grossa para o nível imediatamente superior, de malha mais fina.

### A2.2.3.3 Transferência de informação dos níveis inferiores aos superiores

Utiliza-se para as operações de prolongação a função `atuasol()`, que atua de acordo com a equação abaixo:

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i + \phi_l^*, \quad (\text{A2.5})$$

onde  $\tilde{\phi}_i$  é a solução corrigida da variável  $\phi_i$  calculada para o volume  $i$  da malha fina e utilizada como estimativa inicial na próxima iteração nesta malha, e  $\phi_l^*$  é a correção proveniente da malha grossa. Isso é feito para cada um dos volumes de controle que compõem o bloco I. Depois de finalizado o ciclo é feito o cálculo do resíduo do nível de malha original.

### A2.2.3.4 Cálculo do resíduo do nível zero

Esse cálculo é feito com a chamada da função `residuo()` dentro do ciclo escolhido para a qual é passado o nível zero como argumento (`level[0]`). O objetivo desta rotina é verificar se o resíduo máximo já foi alcançado. Feito isso, parte-se para a finalização do método.

### A2.2.4 Salvando a solução final

Esse é o último procedimento executado no multigrid. Ele é chamado após os ciclos serem resolvidos quando a solução final do nível zero já foi determinada.

Com isso encerram-se, nesta rotina, os processos do multigrid e volta-se para a função que originou a chamada do programa, passando a solução obtida.

## A2.3 Diferenças na implementação para sistemas bloqueados

A diferença básica dos sistemas bloqueados para os não bloqueados é que cada termo da matriz de coeficientes agora é uma sub-matriz. A diferença computacional ocorre no armazenamento, onde os vetores de linhas (`row`) e colunas (`col`) passam a referenciar os blocos, e cada coeficiente presente nos blocos são armazenados em vetores de  $1 \times 9$ , totalizando uma matriz que tem como número de linhas a quantidade de blocos e como número de colunas a quantidade de coeficientes em cada bloco. Essa é uma forma geral que

permite utilizar a mesma estrutura do multigrid independentemente da forma do sistema linear.

Assim foi necessária a criação de outra classe (classe solver) que pudesse armazenar essas variáveis no formato bloqueado e também chamar as rotinas para a criação das mesmas. Como essas rotinas são executadas apenas uma vez no início da resolução do multigrid, o tempo deste processo é compensado pela rapidez obtida na resolução dos sistemas lineares, procedimento que é feito em todos os níveis de malha nos inúmeros ciclos realizados.